

Богомолов А.Н., Ушаков А.Н., Богомолова О.А. О прочности подземных горизонтальных выработок эллиптической формы поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // *Construction and Geotechnics*. – 2022. – Т. 13, № 1. – С. 16–33. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.02

Bogomolov A.N., Ushakov A.N., Bogomolova O.A. The strength of underground horizontal workings of elliptical cross-section shape subjected to all-round uniform pressure. *Construction and Geotechnics*. 2022. Vol. 13. No. 1. Pp. 16-33. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.02

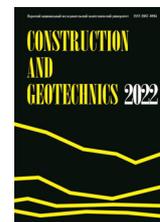


**пермский
политех**

CONSTRUCTION AND GEOTECHNICS

Т. 13, № 1, 2022

<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.02

УДК 624.131.522

О ПРОЧНОСТИ ПОДЗЕМНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВСЕСТОРОННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков, О.А. Богомолова

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 26 ноября 2021
Одобрена: 22 января 2022
Принята к публикации:
03 марта 2022

Ключевые слова:

отображающая функция, напряженное состояние, горизонтальная выработка, глубина заложения выработки, равномерное давление, коэффициент бокового распора.

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты исследования по определению напряженного состояния на контурах подземных выработок, поперечное сечение которых имеет вид эллипса с фиксированным значением большой полуоси. Для выработок данного типа при различных значениях параметра эллипса определены допустимые глубины заложения и величины равномерного давления в точках их контуров, при которых нормальные тангенциальные напряжения не превосходят пределов прочности вмещающей породы при растяжении и сжатии. На основании используемого в работе условия прочности вычислены значения допустимых глубин заложения выработок при изменяющихся величинах равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок, и заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы. Приведены допустимые величины растягивающего равномерного давления в точках контуров эллиптической формы поперечного сечения при изменении глубин заложения, заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы и параметра эллипса. Кроме того, в работе приведены формулы, на основании которых рассмотрена задача о распределении напряжений в точках контуров, поперечное сечение которых имеет форму эллипса с фиксированным значением большой полуоси. Установлено, что при изменении интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок эллиптической формы поперечного сечения, и заданных значениях параметра эллипса, глубины заложения выработки и величины коэффициента бокового распора вмещающей породы выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения. При изменении глубин заложения выработок эллиптической формы поперечного сечения выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения при заданных значениях параметра эллипса, величины интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного к точкам контуров, и значениях коэффициента бокового распора горной породы.

© ПНИПУ

© **Богомолов Александр Николаевич** – доктор технических наук, профессор, e-mail: banzaritcyn@mail.ru

Ушаков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: miit.vgasu@mail.ru

Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285

Alexander N. Bogomolov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: banzaritcyn@mail.ru

Andrei N. Ushakov – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: miit.vgasu@mail.ru

Oksana A. Bogomolova – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285

THE STRENGTH OF UNDERGROUND HORIZONTAL WORKINGS OF ELLIPTICAL CROSS-SECTION SHAPE SUBJECTED TO ALL-ROUND UNIFORM PRESSURE

A.N. Bogomolov, A.N. Ushakov, O.A. Bogomolova

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 26 November 2021
Approved: 22 January 2022
Accepted for publication:
03 March 2022

Keywords:

mapping function, stress state, horizontal work-out, depth of work-out, uniform pressure, lateral expansion coefficient.

ABSTRACT

The paper presents the results of a study to determine the stress state on the contours of underground workings, the cross-section of which has the form of an ellipse with a fixed value of the large semi-axis. For workings of this type, at different values of the ellipse parameter, the permissible depths of laying and the values of uniform pressure at the points of their contours are determined, at which normal tangential stresses do not exceed the tensile and compressive strength limits of the host rock. Based on the strength condition used in the work, the values of the permissible depths of the workings are calculated for varying values of uniform pressure applied at the points of the workings contours and the specified values of the lateral expansion coefficient of the rock. The permissible values of the stretching uniform pressure at the points of the contours of the elliptical shape of the cross-section with a change in the depth of laying, the specified values of the lateral expansion coefficient of the rock and the ellipse parameter are given. In addition, the paper presents formulas on the basis of which the problem of stress distribution at the points of contours whose cross-section has the shape of an ellipse with a fixed value of the large semi-axis is considered. It is established that when the intensity of the stretching uniform pressure applied at the points of the contours of the workings of an elliptical cross-section shape changes, and the specified values of the ellipse parameter, the depth of the workings and the magnitude of the lateral expansion coefficient of the host rock, sections of the contours on which tensile and compressive stresses act are highlighted. When changing the depths of the workings of the elliptical cross-section shape, sections of contours are identified on which tensile and compressive stresses act at given values of the ellipse parameter, the intensity of the stretching uniform pressure applied to the points of the contours, and the values of the lateral expansion coefficient of the rock.

© PNRPU

Исследование напряженного состояния вокруг одиночных выработок в горном или грунтовом массиве является одной из актуальных задач геомеханики, что следует из работ П.М. Цимбаревича [1], В.Т. Глушко [2], Н.С. Булычева [3], И.А. Турчанинова [1–4], при этом особый интерес представляет собой задача распределения напряжений на контурах выработок, поскольку ее решение связано с проблемой обеспечения прочности последних.

Форма поперечного сечения выработки определяется численными значениями действительных коэффициентов той или иной функции комплексного переменного, осуществляющей конформное отображение одной из канонических областей, чаще всего внутренности или внешности единичного круга, на внешность бесконечной односвязной области с отверстиями различной конфигурации. В качестве отображающих функций рационально использовать достаточно простые и хорошо изученные функции, в частности, полиномы, что показано в работах Л.В. Канторовича, П.Ф. Фильчакова, Г.Н. Савина [5–7].

Для решения ряда актуальных задач геомеханики проф. В.К. Цветковым [8; 9] предложена отображающая функция вида

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3), \quad (1)$$

где A, B, C, D – действительные числа, совершающая конформное отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную односвязную область, границей которой является семейство простых замкнутых кривых.

Рассмотрим подземную горизонтальную выработку, форма поперечного сечения которой определяется отображающей функцией (1). Будем полагать, что данная выработка расположена на достаточно большой глубине, причем по контуру выработки действует всестороннее равномерное давление, что позволяет рассматривать ее как подземное хранилище, например газообразных углеводородов.

В работе [10] приведена формула для определения напряжений в точках контуров одиночных горизонтальных подземных выработок с заданной формой поперечного сечения, расположенных на конкретной глубине, причем контуры подвержены равномерному всестороннему давлению. В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, приведено решение задачи о распределении напряжений на контуре выработки, имеющей форму поперечного сечения в виде трапеции.

Другой важной задачей является задача определения допустимых значений глубин заложения выработок при заданных значениях равномерного давления и величины коэффициента бокового распора вмещающей породы. Решению этой задачи посвящены работы [11–15]. В статье [16] рассматривается решение задачи об определении допустимой величины равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок, при заданных значениях глубины заложения и коэффициента бокового распора.

В упомянутых выше работах рассмотрены выработки, имеющие трапециевидную, треугольную и иные формы поперечного сечения, кроме эллиптической. Вместе с тем выработки с поперечным сечением в виде эллипса и, как частный случай, круга на практике встречаются гораздо чаще, и поэтому задачи, связанные с исследованием напряженного состояния в точках контура таких выработок, а также изучение вопросов их прочности представляют значительный интерес.

Целью данной статьи является исследование напряженного состояния в точках контура выработок, имеющих поперечное сечение в виде эллипса с фиксированным значением его большой полуоси, и определение допустимых значений глубины заложения и интенсивности равномерного давления при заданных значениях коэффициента бокового распора.

Следуя [10], в качестве критерия прочности (устойчивости) используем условие

$$\sigma_{\text{рас}} \leq \sigma_{\theta} \leq \sigma_{\text{сж}}, \quad (2)$$

согласно которому прочность контура выработки будет обеспечена, если на нем отсутствуют точки, в которых нормальные тангенциальные напряжения превосходят пределы прочности вмещающего грунта (горной породы) при растяжении и сжатии.

Согласно [15] заметим, что формула, описывающая напряженное состояние в точках контура выработки, конфигурация которого определяется при помощи отображающей функции (1) при условии всестороннего равномерного давления заданной интенсивности, приложенного к контуру, имеет вид

$$\sigma_{\theta} = - \frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V) \cos \theta + K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} + \frac{(M - 4W) \cos 2\theta - N \cos 3\theta - R \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}, \quad (3)$$

где

$$F = (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS, \quad Q = (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S, \quad (4)$$

$$G = 2C((1 + \mu)(B + 6D) + S);$$

$$S = \frac{(1 + \mu)(A + D)B - 2(1 - \mu)A^2}{A - D};$$

$$U = \frac{AB^2}{A - D} + 4C^2 + 9D^2, \quad V = \frac{2C}{A - D}[AB + (A - D)(B + 6D)], \quad (5)$$

$$W = \frac{B}{A - D}[6AD - A^2 - 3D^2];$$

$$K = A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2, \quad L = 4C(B + 3D), \quad M = 2B(3D - A), \quad N = -4AC, \quad R = -6AD, \quad (6)$$

где γ – объемный вес пород; μ – коэффициент бокового распора; H – глубина заложения выработки, p – величина равномерного давления, приложенного к контуру отверстия. Согласно [3] примем, что при $p > 0$ контур выработки испытывает сжатие постоянной величины p , а при $p < 0$ – растяжение той же интенсивности.

Следуя [1], будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (7)$$

где R_{\max} – наибольший линейный размер сечения выработки.

Нахождение нулевых значений нормальных тангенциальных напряжений σ_0 сводится к решению уравнения

$$8Rpt^4 + 4Npt^3 + 2(Q\gamma H + (4W - M - 4R)p)t^2 + (G\gamma H + (4V - L - 3N)p)t + (F - Q)\gamma H + (M - 4W + R - K + 4U)p = 0, \quad (8)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$, а определение экстремальных значений нормальных тангенциальных напряжений сводится к решению уравнений

$$\sin \theta = 0,$$

$$32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -RQ\gamma H + (2RM - 4RW)p, \\ a_2 &= -(3/2 GR + 1/2 NQ)\gamma H + (3RL - 6RV + 3RL + MN - 2NW)p, \\ a_3 &= -(GN + 4FR)\gamma H + (8RK + 2NL - 4VN - 16RU)p, \\ a_4 &= (1/2 QL - 1/2 MG - 5/2 GR - 3FN)\gamma H + \\ &+ (5RL + 2WL + 6NK - 10RV - 2VM - 12NU)p, \\ a_5 &= (2QK - 2MF - 2GN - 3RQ)\gamma H + \\ &+ (6MR + 4LN + 8WK - 12RW - 8VN - 8MU)p, \\ a_6 &= (GK + 3/2 QL - 5/2 NQ - 3/2 MG - FL)\gamma H + \\ &+ (5MN + 2WL + 4VK - 10NW - 6VM - 4LU)p. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение $\sin \theta = 0$ дает значения $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$; уравнение (10) может быть решено на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ приближенно с нужной для практики степенью точности.

Сформулируем следующие задачи.

Задача А. Исследовать напряженное состояние в точках контуров выработок с эллиптической формой поперечного сечения, находящихся под действием всестороннего равномерного давления при заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

Задача Б. Определить величины допустимых глубин заложения подземных горизонтальных выработок с эллиптической формой поперечного сечения при заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы и величины всестороннего равномерного давления, действующего по периметру контура ее поперечного сечения.

Задача В. Определить величины допустимых значений всестороннего равномерного давления, действующего по периметру контура поперечного сечения подземной горизонтальной выработки эллиптической формы поперечного сечения, при заданных значениях глубин ее заложения и коэффициента бокового распора горной породы.

Для решения этих задач предварительно положим, что

$$A = \frac{R}{2}(n+1), \quad B = \frac{R}{2}(n-1), \quad C = D = 0, \quad R > 0, \quad 0 < n \leq 1. \quad (11)$$

Тогда отображающая функция (1) примет вид

$$z = \omega(\zeta) = i \frac{R}{2} \left((n+1)\zeta^{-1} + (n-1)\zeta \right). \quad (12)$$

Функция (12) совершает конформное отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием, большая полуось которого неизменна и равна $a = R$, а меньшая полуось может принимать значения $b = nR$. Понятно, что при увеличении значений параметра n от нуля до единицы эллипс изменяет свою форму от прямолинейной щели длины $2R$ до окружности радиуса R .

Подставляя значения коэффициентов (11) в формулы (4)–(6), а затем в формулу (3), получаем

$$\sigma_\theta = - \frac{\gamma H ((n^2 - 2n - 1)\mu - n^2 - 2n + 1 + (n+1)^2(1-\mu) \cos 2\theta) -}{n^2 + 1 - (n^2 - 1) \cos 2\theta} - \frac{-p(4n - n^2 - 1 + (n^2 - 1) \cos 2\theta)}{n^2 + 1 - (n^2 - 1) \cos 2\theta}. \quad (13)$$

Проводя аналогичные вычисления по формуле (8), получаем уравнение для нахождения значения углов θ , при которых тангенциальные нормальные напряжения равны 0 в виде

$$((n+1)^2(1-\mu)\gamma H - (n^2-1)p)t^2 + n((\mu-1)n-2)\gamma H + (n-2)p = 0. \quad (14)$$

Подставляя значения коэффициентов (11) в соотношения (10) при помощи (4)–(6), убеждаемся в том, что уравнение (9) для нахождения точек с экстремальными значениями тангенциальных нормальных напряжений принимает вид

$$\cos \theta = 0.$$

Следовательно, экстремальные значения нормальных тангенциальных напряжений на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ достигаются в точках

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi. \quad (15)$$

При решении задач будем использовать два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона, которая в среднем для горных пород равна $\nu = 0,20$ [1], а второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в породном массиве, которое задается при определении напряжений на больших глубинах [4].

Будем изучать распределение напряжений в точках контура поперечного сечения выработок, варьируя значения глубин их заложения H , м, и интенсивности величин равномерного давления p , т/м², для чего положим:

$$p_0 = 0, p_1 = 204, p_2 = 306, p_3 = 510, p_4 = 612, p_5 = 816. \quad (16)$$

$$H_1 = 200, H_2 = 500, H_3 = 800, H_4 = 1000. \quad (17)$$

Назовем параметром эллипса действительное число n , являющееся отношением малой полуоси эллипса к его большой полуоси. Согласно [11] $n \in (0; 1]$.

Рассмотрим семейство эллипсов, параметр которых принимает значения

$$n_1 = 0,2, n_2 = 0,5, n_3 = 0,8. \quad (18)$$

Таким образом, согласно (18) будем рассматривать эллипсы с фиксированным значением большой полуоси при увеличивающихся значениях малой полуоси; полагая $n = 1$, получим выработку круглого сечения радиуса R .

Решение задачи А

Пусть наибольший линейный размер эллипса, т.е. величина его большей полуоси, $R = 2$ м. Тогда $R_{\max} = 4$ м и согласно условию (7) $H = 200$ м. Следовательно, $\gamma H = 500$ т/м².

Случай $\mu_1 = 0,25$

Воспользовавшись уравнением (14), вычислим значения углов θ , при которых тангенциальные нормальные напряжения равны 0 при различных заданных значениях интенсивности давления (16). Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения углов θ при различных значениях интенсивности давления

Table 1

Angle values θ at different values of pressure intensity

n	$p, \text{т/м}^2$	θ_1	θ_2
0,2	0	0,888	2,254
	204	0,875	2,267
	306	0,860	2,282
	510	0,661	2,480
	612	1,230	1,912
	816	0,966	2,176

Окончание табл. 1

n	$p, \text{т/м}^2$	θ_1	θ_2
0,5	0	0,576	2,566
	204	0,646	2,496
	306	0,692	2,450
	510	0,827	2,314
	612	0,938	2,204
	816	Нет	Нет
0,8	0	0,389	2,752
	204	0,536	2,606
	306	0,606	2,535
	510	0,752	2,390
	612	0,831	2,311
	816	1,105	2,127

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (16) и параметра эллипса (18) действуют растягивающие напряжения, а именно:

при $n_1 = 0,2$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,888) \cup (2,254, 4,029) \cup (5,395, 2\pi)$,

и $p_1 = 204 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,875) \cup (2,267, 4,016) \cup (5,408, 2\pi)$,

и $p_2 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,860) \cup (2,282, 4,001) \cup (5,429, 2\pi)$,

и $p_3 = 510 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,661) \cup (2,480, 3,803) \cup (5,622, 2\pi)$,

и $p_4 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (1,230, 1,912) \cup (4,374, 5,053)$,

и $p_5 = 816 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0,966, 2,176) \cup (4,107, 5,317)$;

при $n_2 = 0,5$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,576) \cup (2,566, 3,717) \cup (5,707, 2\pi)$,

и $p_1 = 204 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,646) \cup (2,496, 3,787) \cup (5,637, 2\pi)$,

и $p_2 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,692) \cup (2,450, 3,833) \cup (5,591, 2\pi)$,

и $p_3 = 510 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,827) \cup (2,314, 3,969) \cup (5,456, 2\pi)$,

и $p_4 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,938) \cup (2,204, 4,079) \cup (5,345, 2\pi)$,

и $p_5 = 816 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 2\pi)$;

при $n_3 = 0,8$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,389) \cup (2,752, 3,531) \cup (5,894, 2\pi)$,

и $p_1 = 204 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,536) \cup (2,606, 3,677) \cup (5,747, 2\pi)$,

и $p_2 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,606) \cup (2,535, 3,748) \cup (5,677, 2\pi)$,

и $p_3 = 510 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,752) \cup (2,390, 3,893) \cup (5,531, 2\pi)$,

и $p_4 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,831) \cup (2,311, 3,972) \cup (5,452, 2\pi)$,

и $p_5 = 816 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 1,015) \cup (2,127, 4,156) \cup (5,268, 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений для выработки эллиптической формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_0, p_2, p_4 и значениях параметра эллипса n_1, n_2 и n_3 в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 1–3.

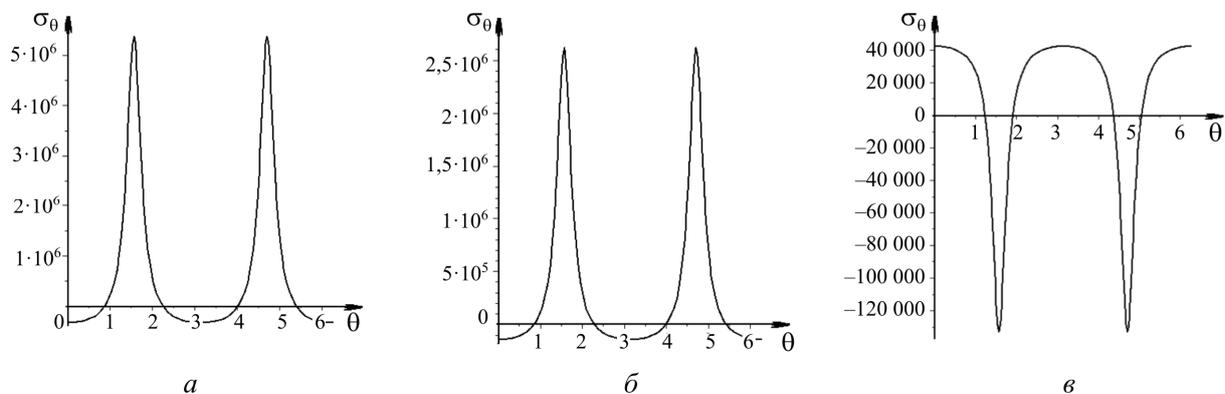


Рис. 1. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений при $n_1 = 0,2$ и давлениях: а – p_0 , б – p_2 , в – p_4
 Fig. 1. Plots of tangential normal stresses at $n_1 = 0.2$ at pressure а – p_0 , б – p_2 , в – p_4

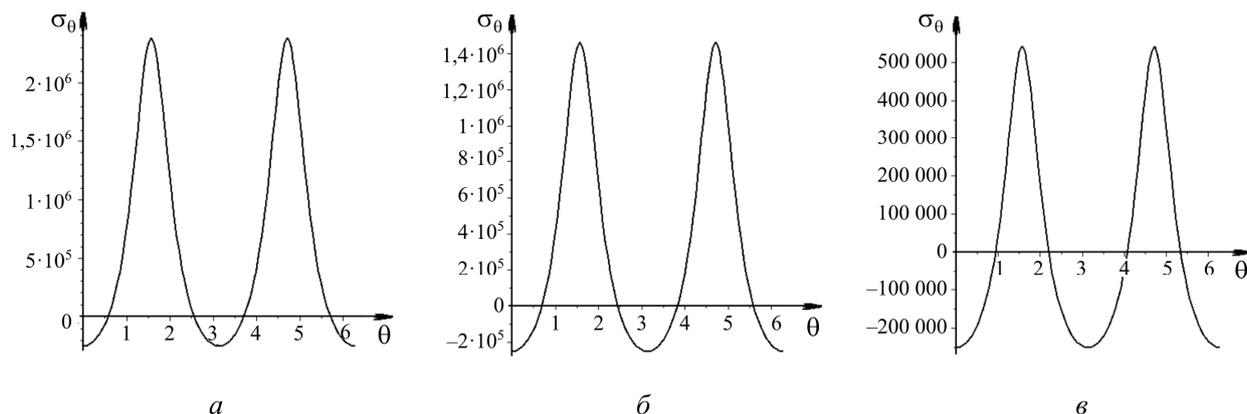


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений при $n_2 = 0,5$ и давлениях: а – p_0 , б – p_2 , в – p_4
 Fig. 2. Plots of tangential normal stresses at $n_2 = 0.5$ at pressure а – p_0 , б – p_2 , в – p_4

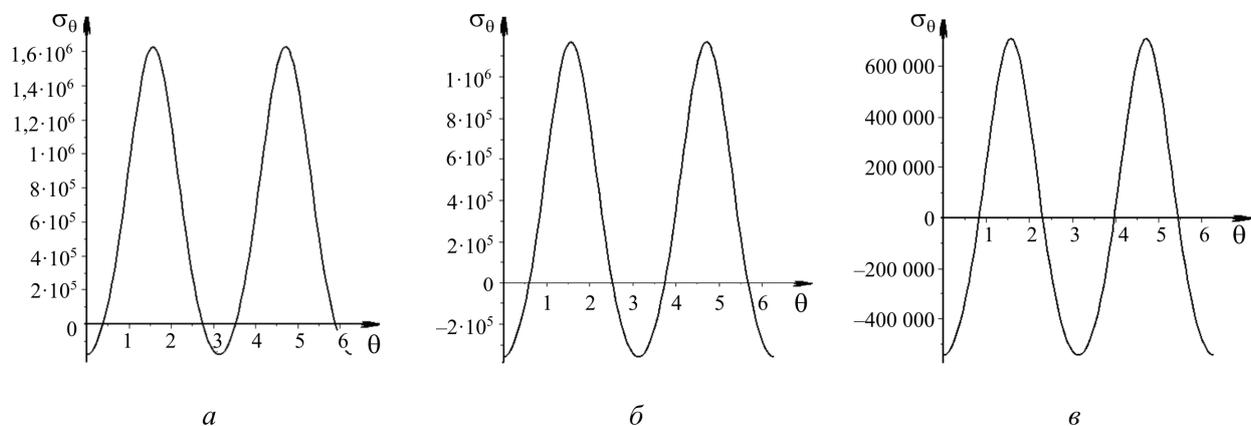


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений при $n_3 = 0,8$ и давлениях: а – p_0 , б – p_2 , в – p_4
 Fig. 3. Plots of tangential normal stresses at $n_3 = 0.8$ at pressure а – p_0 , б – p_2 , в – p_4

Заметим, что при $n_1 = 0,2$ для значений равномерного давления, изменяющегося в диапазоне $541,66 < p < 597,222$ т/м², в точках контура действуют сжимающие напряжения; при других значениях давления на контуре существуют участки, на которых действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения. При $n_2 = 0,5$ и $n_3 = 0,8$ и значениях давления, превышающих величины $p = 791,66$ и соответственно $p = 1083,33$ т/м², в точках контура будут действовать только растягивающие напряжения.

Теперь пусть подземные горизонтальные выработки, конфигурация которых определяется значениями параметра n (18), помещены на глубины, определяемые значениями (17). Вычислим, используя уравнение (14), нули нормальных тангенциальных напряжений, полагая интенсивность давления p в точках контуров выработок равной 102 т/м². Результаты проведенных вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения углов θ при различных значениях глубины заложения

Table 2

Angle values θ at different depths

n	H , м	θ_1	θ_2
0,2	200	0,883	2,259
	500	0,886	2,255
	800	0,887	2,255
	1000	0,887	2,255
0,5	200	0,608	2,534
	500	0,588	2,554
	800	0,583	2,559
	1000	0,582	2,560
0,8	200	0,464	2,677
	500	0,420	2,722
	800	0,409	2,733
	1000	0,405	2,737

Выделим участки контуров, на которых при заданных значениях глубин заложения (17) и параметров эллипса (18) действуют растягивающие напряжения.

Имеем:

$$n_1 = 0,2$$

при $H_1 = 200$ м имеем $\theta \in (0, 0,883) \cup (2,259, 4,024) \cup (5,400, 2\pi)$,

при $H_2 = 500$ м имеем $\theta \in (0, 0,886) \cup (2,255, 4,028) \cup (5,397, 2\pi)$,

при $H_3 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,887) \cup (2,255, 4,028) \cup (5,396, 2\pi)$,

при $H_4 = 1000$ м имеем; $\theta \in (0, 0,887) \cup (2,255, 4,028) \cup (5,396, 2\pi)$;

$$n_2 = 0,5$$

при $H_1 = 200$ м имеем $\theta \in (0, 0,608) \cup (2,234, 3,749) \cup (5,675, 2\pi)$,

при $H_2 = 500$ м имеем $\theta \in (0, 0,588) \cup (2,554, 3,729) \cup (5,695, 2\pi)$,

при $H_3 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,583) \cup (2,559, 3,724) \cup (5,700, 2\pi)$,

при $H_4 = 1000$ м имеем; $\theta \in (0, 0,582) \cup (2,560, 3,723) \cup (5,701, 2\pi)$;

$$n_1 = 0,8$$

при $H_1 = 200$ м имеем $\theta \in (0, 0,464) \cup (2,677, 3,606) \cup (5,819, 2\pi)$,

при $H_2 = 500$ м имеем $\theta \in (0, 0,420) \cup (2,722, 3,561) \cup (5,863, 2\pi)$,

при $H_3 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,409) \cup (2,733, 3,550) \cup (5,874, 2\pi)$,

при $H_4 = 1000$ м имеем $\theta \in (0, 0,405) \cup (2,737, 3,546) \cup (5,878, 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Проведенное исследование показывает, что при увеличении глубин заложения выработок в пределах одних и тех же значений параметра n существенной перестройки эпюр нормальных тангенциальных напряжений не происходит. В качестве примера построим эпюры этих напряжений при глубине заложения выработки $H_2 = 500$ м и параметрах эллипса, принимающих значения (18). Результат приведен на рис. 4.

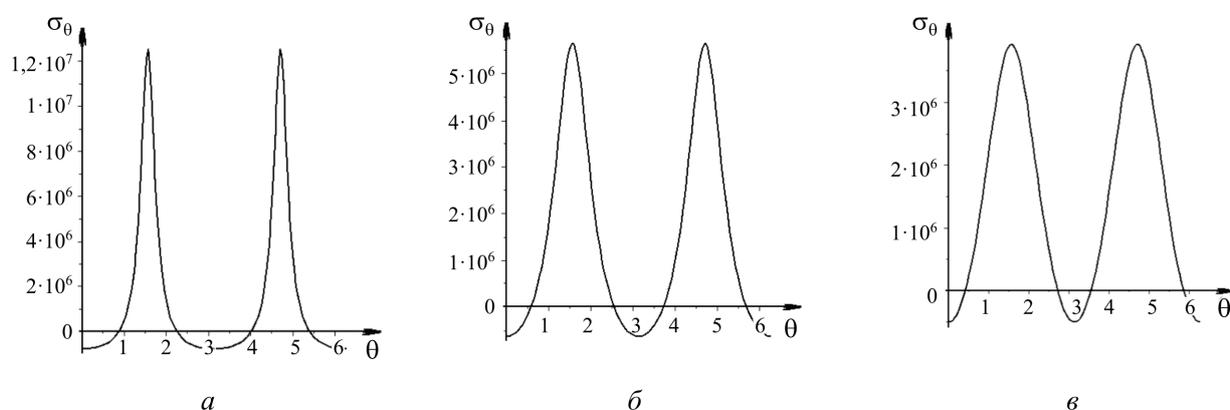


Рис. 4. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений при $H_2 = 500$ м
 и $a - n_1 = 0,2$, $б - n_2 = 0,5$, $в - n_3 = 0,8$

Fig. 4. Plots of tangential normal stresses at $H_2 = 500$ m and $a - n_1 = 0,2$, $б - n_2 = 0,5$, $в - n_3 = 0,8$

Случай $\mu_2 = 1$

Подставляя данное значение коэффициента бокового распора в формулы (13) и (14), получим

$$\sigma_\theta = \frac{4n\gamma H + p(4n - n^2 - 1 + (n^2 - 1)\cos 2\theta)}{n^2 + 1 - (n^2 - 1)\cos 2\theta}, \quad (19)$$

$$(n^2 - 1)p t^2 + 2n\gamma H - (n - 2)p = 0. \quad (20)$$

Подстановкой значений (18) параметра n в уравнения (19), (20) и принятой глубины заложения $H = 200$ м нетрудно убедиться в том, что при $p < 555,56$; $p < 666,67$; $p < 833,33$ т/м² соответственно для значений параметров n_1, n_2, n_3 на контурах выработок будут только сжимающие напряжения.

Рассматривая значения давлений (16), можно выделить участки, на которых действуют растягивающие напряжения. Итак,

при $n_1 = 0,2$

и $p_4 = 612$ т/м² имеем $\theta \in (1,384, 1,758) \cup (4,525, 4,899)$,

и $p_5 = 816$ т/м² имеем $\theta \in (1,218, 1,924) \cup (4,359, 5,065)$;

при $n_2 = 0,5$

и $p_5 = 816 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (1,129, 2,013) \cup (4,270, 5,154)$.

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений, соответствующие выделенным участкам, представлены на рис. 5.

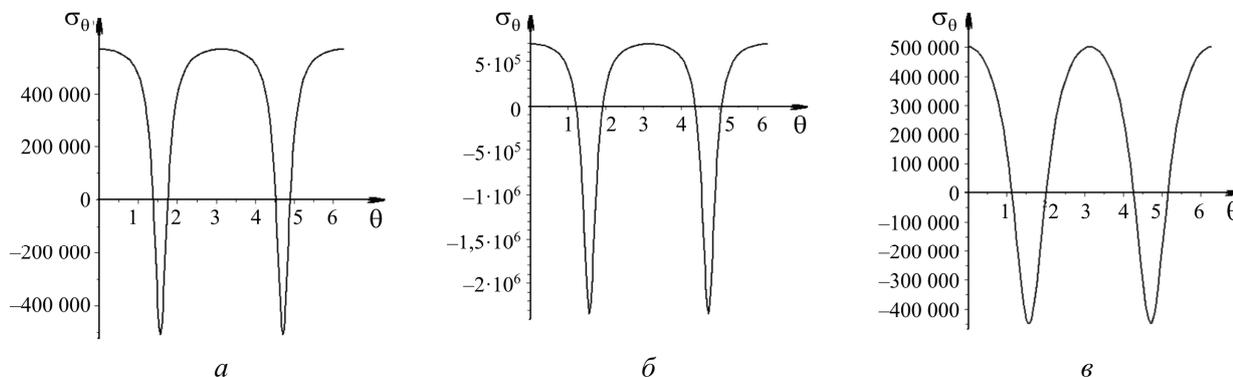


Рис. 5. Эпюры нормальных тангенциальных напряжений при: а – n_1 и p_4 ; б – n_1 и p_5 ; в – n_2 и p_5
 Fig. 5. Plots of normal tangential stresses at: а – n_1 и p_4 ; б – n_1 и p_5 ; в – n_2 и p_5

Заметим, что при всех рассматриваемых значениях глубин заложения (17) и параметра эллипса (18), при величине равномерного растягивающего давления, равной $p = 102 \text{ т/м}^2$, получаем во всех точках контуров только сжимающие напряжения.

Теперь положим $n = 1$, т.е. будем рассматривать выработку круглого сечения. Формула нормальных тангенциальных напряжений и уравнение для углов θ , при которых нормальные тангенциальные напряжения равны 0, принимают вид

$$\sigma_\theta = \gamma H(1 + \mu - 2(1 - \mu)\cos 2\theta) + p, \quad (21)$$

$$4(1 - \mu)\gamma H t^2 + (\mu - 3)\gamma H - p = 0. \quad (22)$$

Случай $\mu_1 = 0,25$

Воспользовавшись уравнением (22), вычислим значения углов θ , при которых тангенциальные нормальные напряжения равны 0 при условии, что заданное значение интенсивности давления (16) $p = 102 \text{ т/м}^2$ и глубина заложения (17) $H = 200 \text{ м}$. Результаты вычислений представлены в табл. 3, 4.

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (16) и глубин заложения (17) действуют растягивающие напряжения, а именно:

при $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,293) \cup (2,849, 3,434) \cup (5,990, 2\pi)$,

при $p_1 = 204 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,487) \cup (2,654, 3,629) \cup (5,796, 2\pi)$,

при $p_2 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,566) \cup (2,576, 3,707) \cup (5,717, 2\pi)$,

при $p_3 = 510 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,708) \cup (2,433, 3,850) \cup (5,575, 2\pi)$,

при $p_4 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,777) \cup (2,365, 3,918) \cup (5,506, 2\pi)$,

при $p_5 = 816 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,914) \cup (2,227, 4,056) \cup (5,369, 2\pi)$;

при $H_1 = 200 \text{ м}$ имеем $\theta \in (0, 0,400) \cup (2,742, 3,541) \cup (5,883, 2\pi)$,

при $H_2 = 500 \text{ м}$ имеем $\theta \in (0, 0,339) \cup (2,803, 3,480) \cup (5,944, 2\pi)$,

при $H_3 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,322) \cup (2,819, 3,464) \cup (5,961, 2\pi)$,

при $H_4 = 1000$ м имеем; $\theta \in (0, 0,317) \cup (2,825, 3,458) \cup (5,966, 2\pi)$.

Таблица 3

Значения углов θ при различных значениях интенсивности давления
 для выработок круглого сечения

Table 3

Angle values θ at different values of pressure intensity for circular workings

$p, \text{т/м}^2$	θ_1	θ_2
0	0,293	2,849
204	0,487	2,654
306	0,566	2,576
510	0,708	2,433
612	0,777	2,365
816	0,914	2,227

Таблица 4

Значения углов θ при различных значениях глубины заложения для выработок
 круглого сечения

Table 4

Angle values θ at different depths for circular excavations

$H, \text{м}$	θ_1	θ_2
200	0,400	2,742
500	0,339	2,803
800	0,322	2,819
1000	0,317	2,825

Эпюры нормальных тангенциальных напряжений для выработки круглой формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_0, p_2, p_4 в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 6.

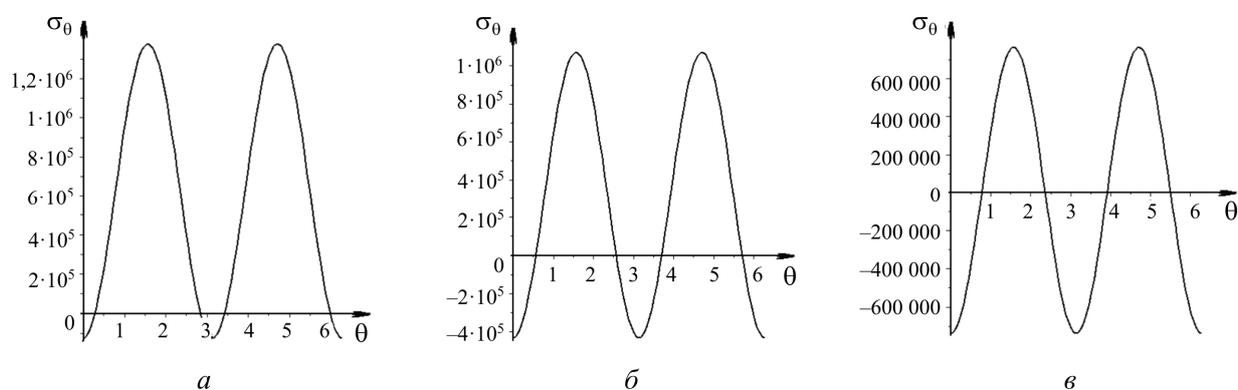


Рис. 6. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений выработки круглой формы
 при $\mu = 0,25$ и давлениях: а – p_0 , б – p_2 , в – p_4

Fig. 6. Diagrams of tangential normal stresses of round-shaped production
 at $\mu = 0.25$ at pressure а – p_0 , б – p_2 , в – p_4

Решение задачи Б

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5$ т/м³ и пределами прочности при растяжении $R_{\text{рас}} = -1735$ т/м² и сжатии $R_{\text{сж}} = 20\,400$ т/м².

В качестве величин напряжения, приложенных к контурам выработок, рассмотрим значения (16) при значениях (18) параметра эллипса n . Аргументы, в которых нормальные тангенциальные напряжения принимают экстремальные значения, согласно (15), равны $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi$. Замечая, что минимум на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ достигается в точках θ_1 и θ_3 , будем рассматривать лишь два значения аргумента – θ_1 и θ_2 .

Пусть $p_0 = 0$ и примем $\mu = 0,25$. Подставляя значения аргументов в формулу (13) с учетом значений (18), принимаемых параметром эллипса, имеем

$$\text{при } n_1 = 0,2 \quad \sigma_{\min}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_1) = -0,65\gamma H, \quad \sigma_{\max}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_2) = 10,75\gamma H,$$

$$\text{при } n_2 = 0,5 \quad \sigma_{\min}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_1) = -0,50\gamma H, \quad \sigma_{\max}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_2) = 4,75\gamma H,$$

$$\text{при } n_3 = 0,8 \quad \sigma_{\min}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_1) = -0,35\gamma H, \quad \sigma_{\max}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_2) = 3,25\gamma H,$$

$$\text{при } n_4 = 1 \quad \sigma_{\min}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_1) = -0,25\gamma H, \quad \sigma_{\max}(\theta) = \sigma_{\theta}(\theta_2) = 2,75\gamma H.$$

Используя результаты работы [11], получим

$$\text{при } n_1 = 0,2 \quad H_{\text{рас}} \approx 1067 \text{ м}, \quad H_{\text{сж}} \approx 759 \text{ м},$$

$$\text{при } n_2 = 0,5 \quad H_{\text{рас}} \approx 1387 \text{ м}, \quad H_{\text{сж}} \approx 1717 \text{ м},$$

$$\text{при } n_3 = 0,8 \quad H_{\text{рас}} \approx 1982 \text{ м}, \quad H_{\text{сж}} \approx 2510 \text{ м},$$

$$\text{при } n_4 = 1 \quad H_{\text{рас}} \approx 2775 \text{ м}, \quad H_{\text{сж}} \approx 2967 \text{ м},$$

где $H_{\text{рас}}$ и $H_{\text{сж}}$ – допустимые значения глубин заложения выработок, получаемых из условия (2) с учетом величин пределов прочности горной породы при растяжении $R_{\text{рас}}$ и сжатии $R_{\text{сж}}$.

Выбирая наименьшее из значений $H_{\text{рас}}$ и $H_{\text{сж}}$, т.е. полагая $H = \min(H_{\text{рас}}, H_{\text{сж}})$, находим допустимую глубину заложения выработки. Например, при $n_1 = 0,2$ допустимая глубина заложения выработки $H \approx 759$ м. Нетрудно видеть, что при данном значении параметра эллипса допустимая глубина заложения определяется из условия достижения предельного значения сжимающих напряжений на контуре. Отметим, что при значениях параметра эллипса $n > 0,325$ допустимые глубины заложений выработок определяются из условия достижения предельного значения растягивающих напряжений в точках контуров.

Пусть в точках контура выработки действует равномерное всестороннее растягивающее давление, интенсивность которого определяется значениями (16).

Рассмотрим выражение

$$\frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V) \cos \theta + K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta + (M - 4W) \cos 2\theta - N \cos 3\theta - R \cos 4\theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} = R, \quad (23)$$

где R – предел прочности горной породы при растяжении или сжатии, как функцию глубины заложения выработки $H(\theta)$.

Дифференцируя функцию $H(\theta)$, получим

$$\gamma H'(\theta) = -8n(n+1)(p(n-\mu) + (1-n\mu)R) \sin 2\theta((n^2-1)\cos^2 \theta - n^2). \quad (24)$$

Приравнявая выражение (24) к нулю, убеждаемся в том, что функция глубины заложения выработки достигает экстремума в точках со значениями аргументов (15).

При величинах равномерного давления (16) результаты вычислений глубин заложения приведены в табл. 5.

Таблица 5

Глубины заложений выработок

Table 5

Excavation depths

n	$p, \text{ т/м}^2$	$H_{\text{раст}}, \text{ м}$	$H_{\text{сж}}, \text{ м}$
0,2	204	1142	827
	306	1180	861
	510	1255	929
	612	1293	964
	816	1368	1032
0,5	204	1387	1769
	306	1387	1795
	510	1387	1846
	612	1387	1872
	816	1387	1924
0,8	204	1842	2548
	306	1772	2567
	510	1632	2604
	612	1562	2623
	816	1422	2661
1	204	2449	2996
	306	2285	3011
	510	1959	3041
	612	1796	3056
	816	1469	3085

Анализ данных, приведенных в табл. 5, показывает:

- 1) при $n_2 = 0,5$ допустимая глубина заложения выработки не зависит от интенсивности равномерного давления, прикладываемого к границе контура выработки;
- 2) при значениях параметра эллипса, меньших 0,5, глубина заложения выработки при увеличении значений давления возрастает, а при значениях параметра, больших 0,5, – убывает.

Решение задачи В

Теперь рассмотрим выражение (23) как функцию равномерного давления p . Дифференцируя ее и приравнявая получившуюся производную к нулю, получим

$$p'(\theta) = -4n(n+1)(2\gamma H(\mu-n) + (n-1)R) \sin 2\theta((n^2-1)\cos^2 \theta - n^2), \quad (25)$$

откуда следует, что экстремальные значения функции равномерного давления достигаются в точках с аргументами (15), причем

$$\sigma_{\min}(\theta) = \sigma(\theta_2).$$

Проведенное исследование функции $p(\theta)$ дает результаты, представленные в табл. 6.

Нетрудно видеть, что при увеличении глубин заложения выработок величины растягивающего давления на контурах увеличиваются.

Таблица 6

Значения функции $p(\theta)$

Table 6

Function values $p(\theta)$

n	$H, \text{ м}$	$p, \text{ т/м}^2$
0,2	200	789,965
	500	1685,799
	800	2581,632
	1000	3178,854
0,5	200	1369,897
	500	2557,397
	800	3744,897
	1000	4536,564
0,8	200	2239,795
	500	3864,795
	800	5489,795
	1000	6573,129
1	200	3109,693
	500	5172,193
	800	6573,129
	1000	8609,693

Графики функции глубины заложения $H(\theta)$ при $p = 204 \text{ т/м}^2$ и функции растягивающего равномерного давления $p(\theta)$ при $H = 200 \text{ м}$ приведены на рис. 7.

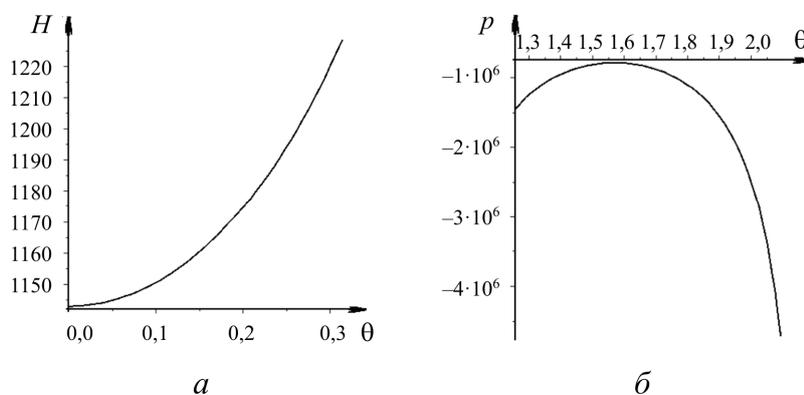


Рис. 7. Графики функций глубины заложения: a – равномерного давления, $б$ – при $n_1 = 0,2$

Fig. 7. Graphs of the functions of the depth of laying: a – uniform pressure, $б$ – $n_1 = 0,2$

Выводы

1. В работе приведены формулы, на основании которых рассмотрена задача о распределении напряжений в точках контуров, поперечное сечение которых имеет форму эллипса с фиксированным значением большой полуоси.

2. При изменении интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок эллиптической формы поперечного сечения, и заданных значениях параметра эллипса, глубины заложения выработки и величины коэффициента бокового распора вмещающей породы выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения.

3. При изменении глубин заложения выработок эллиптической формы поперечного сечения выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения при заданных значениях параметра эллипса, величины интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного к точкам контуров, и значениях коэффициента бокового распора горной породы.

4. На основании используемого в работе условия прочности вычислены значения допустимых глубин заложения выработок при изменяющихся величинах равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок, и заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

5. Приведены допустимые величины растягивающего равномерного давления в точках контуров эллиптической формы поперечного сечения при изменении глубин заложения, заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы и параметра эллипса.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации.

Библиографический список

1. Цимбаревич П.М. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
2. Глушко В.Т. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород. – М.: Недра, 1986. – 221 с.
3. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
4. Турчанинов И.А. Основы механики горных пород. – Л.: Недра. 1989. – 488 с.
5. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1962. – 709 с.
6. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: справ. рук. – Киев: Наукова Думка, 1964. – 536 с.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
8. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1986. – № 2. – С. 24–29.
9. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.

10. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9, № 3. – С. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

11. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2017. – № 5. – С. 2–9.

12. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Определение допустимой глубины заложения подземных хранилищ углеводородов // Геотехника Беларуси: наука и практика: материалы междунар. конф. (Минск, 23–26 октября 2018 г.) = Geotechnics Belarus: science and practice: proceeding of the International Conference (Minsk, October 23–26, 2018) / Беларусь. нац. техн. ун-т. – Минск: БНТУ, 2018. – С. 210–226.

13. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Расчет экстремальных глубин заложения горизонтальных выработок различной формы на основе анализа напряженного состояния однородного вмещающего массива // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2018. – Вып. 52 (71). – С. 5–18.

14. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Об определении напряжений на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2019. – Т. 10, № 2. – С. 36–55.

15. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Определение напряжений в точках контура одиночных подземных горизонтальных горных выработок, находящихся под равномерным давлением, и расчет допустимой глубины их заложения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2021. – Т. 12, № 3. – С. 117–129. DOI: 10.15593/2224-9826/2021.3.12

16. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of an allowable value of internal uniform pressure on the underground horizontal working contour with a trapezoidal form of its cross-section // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1928. – P. 012059.

References

1. Zimbarevich P.M. Mechanics of rocks. Moscow, Ugletekhizdat, 1948, 184 p.
2. Glushko V.T. Assessment of the stress-strain state of rock massifs. Moscow, Nedra, 1986, 221 p.
3. Bulychev N.S. Mechanics of underground structures. Moscow, Nedra, 1989, 270 p.
4. Turchaninov I.A. Fundamentals of Rock Mechanics. Leningrad: Nedra. 1989. 488 p.
5. Kantorovich L.V. Approximated methods of higher analysis. Moscow, GITTL, 1962, 709 p.
6. Filchakov P.F. Approximated methods of conformal mappings. Kiev, Naukova Dumka, 1964, 536 p.
7. Savin G.N. Distribution of stresses near holes. Kiev, Naukova Dumka, 1968, 888 p.
8. Tsvetkov V.K. Determination of sections forms of mine workings with specified stresses on contours. *Fiziko-tehnicheskije problemy razrabotki poleznyh iskopajemyh*, 1986, no. 2, pp. 24-29.

9. Tsvetkov V.K. Calculation of rational parameters of mine workings. Moscow, Nedra, 1993, 251 p.

10. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. About stresses in contour points of single underground workings of different cross-section, subjected to all-round uniform pressure. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Construction and architecture*, 2018, vol. 9, iss. 3, pp. 54-70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

11. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of the horizontal excavation depth based on the analysis of the stress state of the surrounding massif. *Bases, foundations and soil mechanics*, 2017, no. 5, pp. 2-9.

12. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of permissible depth of underground hydrocarbon storages. *Geotechnics Belarus: science and practice. Proceedings of the International Conference*, Minsk, 23–26 October 2018, Belarus National Technical University. Minsk, BNTU, 2018, pp. 210-226.

13. Bogomolov A., Bogomolova O., Ushakov A. Calculation of extreme depths of laying of horizontal workings of various shapes based on the analysis of the stress state of the homogeneous massif. *Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*, 2018, iss. 52 (71), pp. 5-18.

14. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. On determining stresses on the contours of underground horizontal workings subjected to all-round uniform pressure. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Construction and architecture*, 2019, vol. 10, iss. 2, pp. 36-55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.2.04

15. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of stresses in points of the contour of single underground horizontal mine workings under uniform pressure and calculation of their permissible depth. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Construction and architecture*, 2021, vol. 12, iss. 3, pp. 117-129. DOI: 10.15593/2224-9826/2021.3.12

16. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of an allowable value of internal uniform pressure on the underground horizontal working contour with a trapezoidal form of its cross-section. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1928, p. 012059.