

DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.05

УДК 624.131

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОГО МАССИВА В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О.А. Богомолова<sup>1</sup>, А.В. Жиделев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

<sup>2</sup>Филиал «Взлет» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) в г. Ахтубинске, Ахтубинск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 21 декабря 2021  
Одобрена: 28 января 2022  
Принята к публикации:  
03 марта 2022

#### Ключевые слова:

устойчивость откоса, коэффициент запаса устойчивости, напряженное состояние, угол наклона площадки разрушения, след наиболее вероятной площадки разрушения (линия скольжения), физико-механические свойства грунта, коэффициент бокового давления.

### АННОТАЦИЯ

Перечислены основные недостатки традиционно применяемых методов расчета устойчивости откосов и склонов и представлен метод расчета, в котором впервые, по нашему мнению, сделана попытка построения наиболее опасной «линии скольжения», основываясь на анализе напряженного состояния грунтового массива. Представлены и анализируются три возможных подхода к решению задачи об определении угла наклона наиболее вероятной площадки сдвига в исследуемой точке грунтового массива, основанные на анализе его напряженного состояния. Приведены результаты расчета величины коэффициента запаса устойчивости грунтового откоса методом Л.Г. Фисенко (один из традиционных методов расчета) для двух видов линии скольжения – круглоцилиндрической (классический случай) и построенной по методу Н.С. Никитина с учетом действующих напряжений; и методом В.К. Цветкова – А.Н. Богомолова. Все вычисления выполнены для одного объекта, геометрические параметры которого и численные значения физико-механических свойств слагающего грунта приведены в цитируемой ниже статье С.Н. Никитина. В результате оказалось, что первые два коэффициента запаса устойчивости соответственно равны  $K_1 = 1,6$  и  $K_2 = 1,75$ , а значение третьего коэффициента запаса равно  $K_3 = 2,18$ . Сравнивая эту величину со значениями коэффициентов запаса устойчивости, вычисленных методом С.Н. Никитина и методом Л. Г. Фисенко, видим, что она больше их соответственно на 26 и 20 %, при этом  $K_2 > K_1$  на 9,4 %. Опираясь на анализ результатов расчетов для рассмотренного в работе примера, можно констатировать, что методы, основанные на анализе напряженного состояния грунтового массива, дают более высокие значения коэффициентов запаса устойчивости, чем традиционно применяемые. Так, величина коэффициента запаса устойчивости откоса, вычисленная методом В.К. Цветкова – А.Н. Богомолова, получилась равной  $K_3 = 2,18$ . Сравнивая эту величину со значениями коэффициентов запаса устойчивости, вычисленных методом С.Н. Никитина и методом Л.Г. Фисенко, которые соответственно равны  $K_1 = 1,75$  и  $K_2 = 1,6$ , видим, что она больше их соответственно на 20 и 26 %. В это же время  $K_1 > K_2$  на 9,4 % – это указывает на то, что учет напряжений при построении линии скольжения делает ее форму отличной от круглоцилиндрической, что сказывается на величине коэффициента запаса устойчивости.

© ПНИПУ

© Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285.

Жиделев Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: redskorhion@mail.ru.

Oksana A. Bogomolova – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285.

Andrei V. Zhidelev – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: redskorhion@mail.ru.

## DETERMINATION OF THE VALUE OF THE STABILITY MARGIN COEFFICIENT BASED ON THE ANALYSIS OF THE STRESSED STATE OF THE SOIL MASS IN THE FRAMEWORK OF THE LINEAR THEORY OF ELASTICITY

O.A. Bogomolova<sup>1</sup>, A.V. Zhidelev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

<sup>2</sup>Branch «Vzlet» of Moscow Aviation Institute (National Research University), Akhtubinsk, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 21 December 2021  
Approved: 28 January 2022  
Accepted for publication:  
03 March 2022

#### Keywords:

slope stability, coefficient of stability margin, stressed state, angle of slope of fracture site, trace of most probable fracture site (sliding line), physical and mechanical properties of soil, lateral pressure coefficient.

### ABSTRACT

The introduction lists the main disadvantages of the traditionally used methods for calculating the stability of slopes and presents a calculation method in which, for the first time, in our opinion, an attempt was made to construct the most dangerous "slip line" based on the analysis of the stressed state of the soil mass. Further, in the first chapter of the article, three possible approaches to solving the problem of determining the angle of inclination of the most probable shear site at the studied point of the soil mass, based on the analysis of its stress state, are presented and analyzed. The second chapter presents the results of calculating the value of the coefficient of stability of the soil slope by L.G. Fisenko (one of the traditional calculation methods) for two types of sliding line: circular cylindrical (classical case) and constructed by the method of N.S. Nikitin taking into account the operating stresses; and by V.K. Tsvetkov – A.N. Bogomolov. All calculations are performed for one object, the geometric parameters of which and the numerical values of the physico-mechanical properties of the composing soil are given in the article cited below by S.N. Nikitin. As a result, it turned out that the first two coefficients of the margin of stability are respectively equal to  $K_1 = 1.6$  and  $K_2 = 1.75$ , and the value of the third coefficient of the margin is equal to  $K_3 = 2.18$ . Comparing this value with the values of the coefficients of the margin of stability calculated by the method of S.N. Nikitin and the method of L.G. Fisenko, we see that it is 26 and 20 % higher, respectively, while  $K_2 > K_1$  is 9.4 %. Based on the analysis of the calculation results for the example considered in this paper, it can be stated that methods based on the analysis of the stressed state of the soil mass give higher values of the stability margin coefficients than traditionally used. Thus, the value of the slope stability margin coefficient calculated by the method of V.K. Tsvetkov – A.N. Bogomolov turned out to be equal to  $K_3 = 2.18$ . Comparing this value with the values of the stability margin coefficients calculated by the method of S.N. Nikitin and the method of L.G. Fisenko, which are respectively equal to  $K_1 = 1.75$  and  $K_2 = 1.6$ , we see that it is 20 and 26 % more than them, respectively. At the same time,  $K_1 > K_2$  by 9.4 % – this indicates that taking into account the stresses during the construction of the sliding line makes its shape different from the circular cylindrical one, which affects the value of the stability margin coefficient.

© PNRPU

---

## Введение

Расчет величины коэффициента запаса устойчивости грунтовых массивов (откосов, склонов, оснований фундаментов) является одной из важнейших задач геомеханики. Как в свое время отметили Н.А. Цытович и З.Г. Тер-Мартirosян [1], решение этой задачи может быть получено известными методами механики грунтов, которые подразделены ими на три группы. К первой группе отнесены методы, основанные на предположении о том, что положение и форма поверхности разрушения известны [2; 3]. Методы второй группы позволяют определить величину критических нагрузок и геометрических параметров грунтовых массивов методами теории предельного равновесия [4; 5]. И, наконец, методы третьей группы опираются на анализ напряженного состояния грунтового массива, базирующегося на решениях задач линейной теории упругости и упругопластических задач [6; 7].

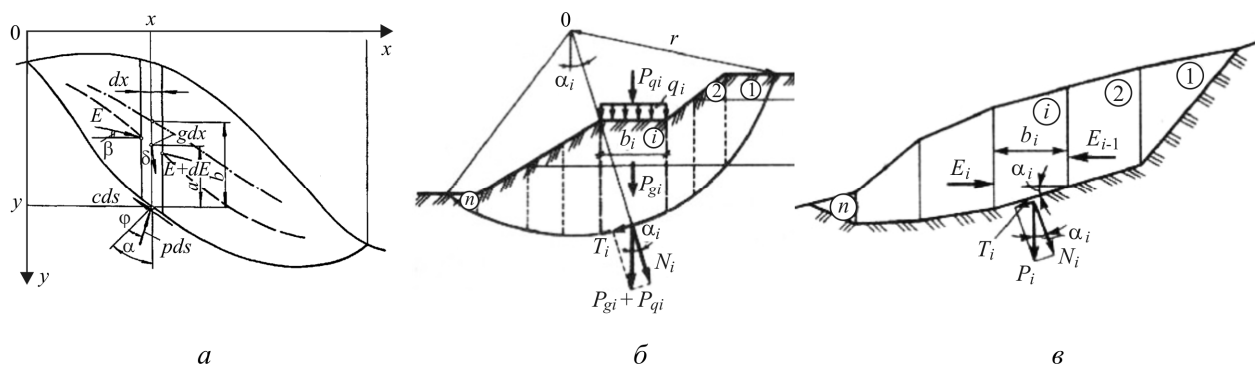


Рис. 1. Расчетные схемы методов первой группы: *a* – метода А.Л. Можевеитинова; метода Г.М. Шахунянца *б* – при круглоцилиндрической и *в* – полилинейной форме следа поверхности разрушения (скольжения)

Fig. 1. Calculation diagrams of the first group methods: *a* – A.L. Mozhevetinov's method; G.M. Shahunyants' method *б* – for circular-cylindrical and *в* – polylinear fracture surface trace (sliding) forms

Известно, что результаты расчета устойчивости грунтового массива разными методами порой сильно отличаются. В этой связи представляется справедливым объяснение, которое дает этому факту проф. И.В. Федоров: «Характер происходящих деформаций грунта при обрушении земляных масс существенно зависит от свойств грунта. Невозможно создать такую расчетную модель, которая одновременно бы отражала все многообразие физико-механических свойств. Любая расчетная модель – это лишь идеализация реальных свойств того или иного материала. Расчетная модель должна выбираться таким образом, чтобы в основных чертах удовлетворять запросы практики» [8].

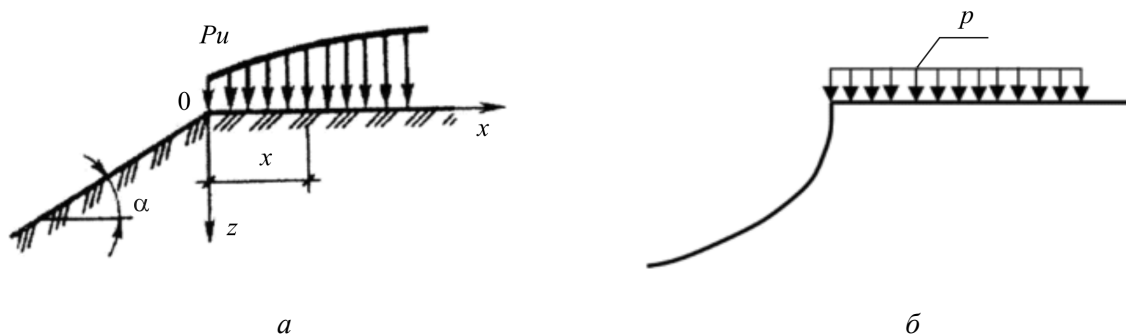


Рис. 2. Расчетные схемы методов второй группы: определение максимального значения интенсивности внешней нагрузки: *a* – при заданном очертании откоса, *б* – при заданной интенсивности внешнего воздействия определить контур равноустойчивого откоса

Fig. 2. The calculation diagrams of the second group methods: determining the maximum value of the external load intensity: *a* – for a given slope outline, *б* – for a given external load intensity determine the contour of an equally stable slope

Подавляющее большинство расчетных методов первой и второй группы (см. рис. 1 и 2) не в полной мере и весьма приближенно отвечают физической сущности задачи об устойчивости грунтового массива. По этому поводу отметим некоторые наиболее существенные их недостатки.

1. Форма и положение поверхности разрушения считаются заранее известными. Не устанавливается их непосредственная связь с физико-механическими свойствами грунтов, геометрией и геологическим строением массива грунта, поверхностными нагрузками.

2. Призмы разрушения (обрушения или выпора) грунта расчленяются на отдельные блоки, силы взаимодействия и трение между которыми не всегда учитываются. При рассмотрении равновесия блоков составляются одно или два уравнения статики (при плоской задаче их должно быть три), что часто приводит к получению результата  $K < 1$ , противоречащему условию предельного равновесия.

3. При определении суммарных удерживающих и сдвигающих сил операция сложения векторных величин выполняется как для скалярных (метод алгебраического сложения сил).

4. При вычислении величины коэффициента запаса устойчивости практически всегда учитывается лишь одна вертикальная, и то весьма приблизительно, составляющая напряжений (вес блоков).

5. При расчете устойчивости откоса игнорируется наличие его подошвы (рис. 3, а), т.е. не учитывается тот факт, что в месте его перехода в подошву возникают зоны концентрации напряжений, могущие повлечь за собой образование областей предельного состояния грунта (областей пластических деформаций).

6. В расчетах устойчивости не учитывается величина коэффициента бокового давления грунта  $\xi_0$ .

Исключить эти и другие недостатки при построении следа наиболее вероятной поверхности разрушения СНВПР (в современной научной терминологии закрепилось название «линия скольжения», которая есть не что иное, как след поверхности разрушения или поверхности скольжения на вертикальном сечении откоса или основания сооружения) позволяют методы, основанные на анализе напряженного состояния (НС) грунтового массива.

По всей видимости, впервые (работ иного автора, посвященных данному вопросу, мы не нашли в научной литературе) метод построения СНВПР по напряжениям был предложен С.Н. Никитиным [9] (рис. 3, а–г).

Согласно версии С.Н. Никитина, «зарождение поверхности скольжения в однородных породах связано с развитием площадок скольжения, возникающих под углом  $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$  к направлению наибольших главных напряжений  $\sigma_1$  (где  $\varphi$  – угол внутреннего трения пород) (рис. 3, б).

Направления  $\sigma_1$  в массиве откоса определяются по напряжениям  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , вычисляемым по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma y + \gamma \xi \operatorname{tg} x^2 \beta (x - y \operatorname{tg} \beta) \\ \sigma_y &= \gamma y + \gamma \xi (x - y \operatorname{tg} \beta) \\ \tau_{xy} &= \gamma \xi \operatorname{tg} \beta (x - y \operatorname{tg} \beta) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – объемный вес,  $\alpha$  – коэффициент бокового распора (давления) горных пород, рассчитываемый через коэффициент Пуассона.

$$\alpha = \frac{\mu}{1 - \mu} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{3 \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^3 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} \quad (3)$$

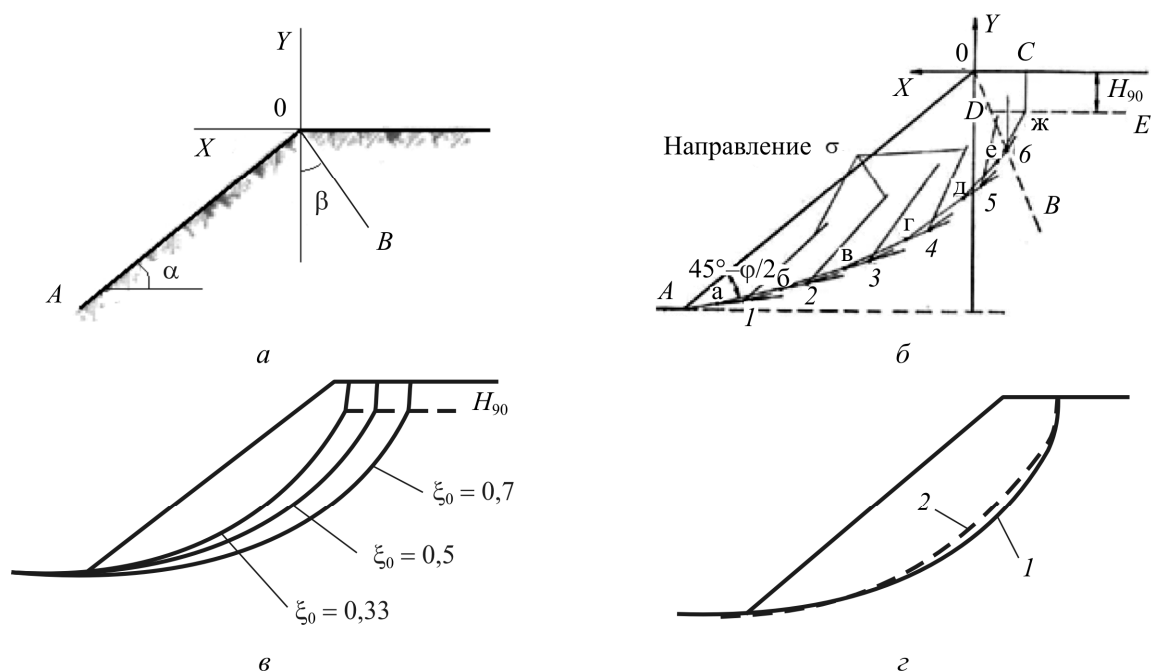


Рис. 3. Схема откоса (а); последовательность построения следа наиболее вероятной поверхности разрушения методом [9] (б); СНВПР, построенные методом [9], при различных значениях коэффициента бокового давления грунта (в); СНВПР, построенные методом [9] (1) и методом [10] (2) при величине коэффициента бокового давления  $\xi_0 = 0,5$  (г) (цитируется по работе [9])  
 Fig. 3. Schematic of the slope (a); sequence of construction of the most probable fracture surface trace by method [9] (б); SNVPR constructed by method [9] at different values of the soil lateral pressure coefficient (в); SNVPR constructed by method [9] (1) and method [10] (2) at value of lateral pressure coefficient  $\xi_0 = 0.5$  (г) (cited from work [9])

Угол  $\beta$  находим из соотношения

$$\operatorname{tg}\beta = \alpha \operatorname{tg}\alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол откоса карьера (рис. 3, а).

Угол между касательной к следу НВПР в рассматриваемой точке грунтового массива и направлением максимального нормального напряжения определяется выражением

$$\operatorname{tg}2\alpha' = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (5)$$

где  $\alpha'$  – острый угол» [9].

Сам процесс построения следа наиболее вероятной поверхности разрушения подробно описан в работе [9].

На рис. 3, в приведены следы наиболее вероятных поверхностей разрушения в породном откосе, построенные автором работы [9] при различных значениях коэффициента бокового давления (распора) горной породы  $\xi_0$  (в дальнейшем будем придерживаться этого принятого в механике грунтов обозначения величины коэффициента бокового давления). Из рисунка видно, что положение наиболее вероятных поверхностей разрушения весьма существенно зависит от этой величины. Справедливо будет предположить, что и соответствующие величины коэффициентов запаса устойчивости  $K$  также будут зависеть от  $\xi_0$ . К сожалению, данные об этом в работе [9] отсутствуют.

Сделав большой шаг вперед, предложив метод построения потенциально наиболее опасной поверхности разрушения на основе анализа НДС грунтового массива, автор не пошел дальше, а использовал для определения величины коэффициента запаса устойчивости  $K$  одну из разновидностей методов первой группы [10].

### Определение угла ориентации наиболее вероятной площадки разрушения на основе анализа напряженного состояния грунтового массива

В работах В.К. Цветкова [11] и А.Н. Богомолова [12] приведены методы расчета устойчивости грунтовых массивов, основанных на анализе напряженного состояния грунтовых откосов и оснований сооружений. Напряженное состояние исследуемых объектов определяется либо методом конечных элементов (МКЭ), либо на основе аналитических решений задач линейной теории упругости методами теории функций комплексного переменного (МТФКП). Идея построения СНВПР авторами [11; 12] заимствована из работы [9], а вот углы ориентации наиболее вероятной площадки разрушения определяются совершенно другим образом.

Ниже приведены два способа определения угла наклона наиболее вероятной площадки разрушения, которые подробно описаны в нашей работе [15].

#### Предложение В.К. Цветкова

Величина коэффициента запаса устойчивости в точке грунтового массива  $K_t$  определяется выражением (6) [5], полученным на основании условия прочности Кулона [13; 14]:

$$K_t = \frac{\sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C}{\tau_n}. \quad (6)$$

Если заменить напряжения  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  в формуле (6) напряжениями  $\sigma_y$ ;  $\sigma_x$ ;  $\tau_{xy}$ , получим выражение

$$K_t = \frac{\left[ \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) + \tau_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_{св} \right] \operatorname{tg} \varphi}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha}, \quad (7)$$

где  $\sigma_x$ ;  $\sigma_z$  и  $\tau_{xz}$  – безразмерные (в долях  $\gamma H$ ) компоненты напряжения в точке грунтового массива;  $\sigma_{св} = C (\gamma H \operatorname{tg} \varphi)^{-1}$  – приведенное давление связности;  $H$  – высота откоса или глубина заложения фундамента.

Очевидно, что условиями минимизации величины  $K_t$  по параметру  $\alpha$  будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_t}{\partial \alpha} &= 0; \\ \frac{\partial^2 K_t}{\partial \alpha^2} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Выполнение первого из условий (8) сводится к решению квадратного уравнения, корни которого определяются по формуле

$$\sin 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{xz}}{B} \pm (\sigma_z - \sigma_x) \sqrt{\frac{D - B^2}{B^2 D}}, \quad (9)$$

где

$$B = (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_{св}); \quad (10)$$

$$D = 4\tau_{xz}^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2. \quad (11)$$

Выбирать из полученных двух углов следует тот, при подстановке значения которого во второе условие (8) будет выполняться неравенство

$$D - \frac{2\tau_{xz}(\sigma_z - \sigma_x) + [(\sigma_z - \sigma_x)\sin 2\alpha - 2\tau_{xz}\cos 2\alpha]^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha + B^{-1}[(\sigma_z - \sigma_x)\sin 2\alpha + 2\tau_{xz}\cos 2\alpha]} > 0. \quad (12)$$

Оказалось, что величина угла  $\alpha$ , при котором значение коэффициента устойчивости в рассматриваемой точке  $K_t = K_{t\min}$  соответствует знаку «+» перед радикалом в формуле (9).

Из формул (7)–(11) следует, что угол  $\alpha_{\text{экстр}}$  является функцией напряженного состояния, физико-механических свойств и характерного размера грунтового массива  $H$ .

На рис. 4 приведены графические зависимости величины коэффициента устойчивости  $K_t$  в точке грунтового массива по наклонной площадке, угол наклона которой изменяется от 0 до 90°. Величины безразмерных (в долях  $\gamma H$ ) напряжений в точке приоткосной области определены методом конечных элементов и равны  $\sigma_x = 1,3$ ;  $\sigma_y = 5,6$ ;  $\tau_{xy} = 2$ , а физико-механические свойства грунта таковы, что давление связности  $\sigma_{св} = 1,4$ , а угол внутреннего трения  $\varphi = 28,6^\circ$ .

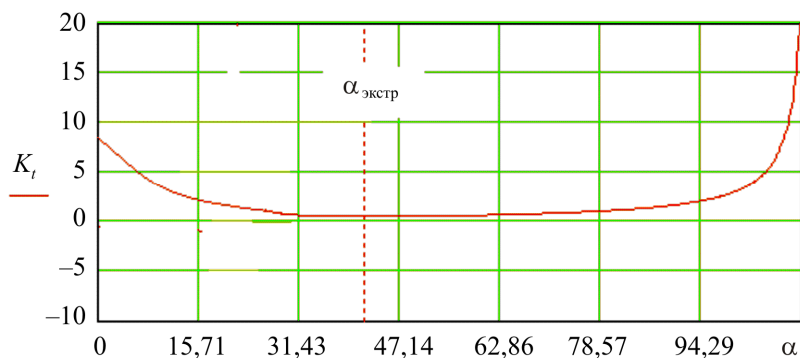


Рис. 4. Графическая зависимость вида  $K_t = f(\alpha)$

Fig. 4. Graphical relationship  $K_t = f(\alpha)$

Из рис. 4 видно, что экстремальное значение  $K_t$  соответствует величине  $\alpha_{\text{экстр}} = 42^\circ$ , полученной на основании выражений (8)–(12). Величина коэффициента запаса устойчивости в рассматриваемой точке, вычисленная по формуле (7), равна  $K_t = 1,08$ .

### Предложение А. Н. Богомолова

Рассмотрим выражение

$$f_{\text{ост}} = C + \sigma_n \cdot \text{tg}\varphi - \tau_n, \quad (13)$$

где  $f_{\text{ост}}$  – остаточное сопротивление сдвигу [12].

Выразив нормальное и касательное напряжения, действующие по наклонной площадке, через компоненты напряжения  $\sigma_y$ ;  $\sigma_x$ ;  $\tau_{xy}$  и угол ее наклона  $\alpha$ , подставив их в выражение (8), а затем применив к полученному выражению условия (8), найдем величину угла наклона площадки, которому соответствует минимальное значение величины остаточного сопротивления сдвигу  $f_{ост\ min}$ . При вычислениях используем те же значения напряжений и физико-механических свойств грунта, что указаны в предыдущем примере.

На рис. 5 приведены кривые зависимостей величины коэффициента запаса устойчивости  $K_t$ , остаточного сопротивления сдвигу  $f_{ост}$ , удерживающих  $f_{уд}$  и сдвигающих  $f_{сд}$  сил, вычисленных в исследуемой точке приоткосной области. При этом величина угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига изменяется в интервале  $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ .

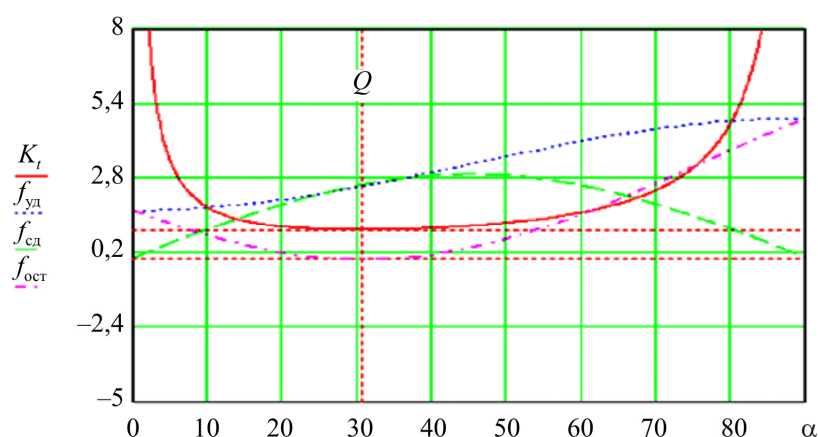


Рис. 5. Графические зависимости вида  $K_t = f(\alpha_{экрстр})$ ;  $f_{ост} = f(\alpha_{экрстр})$ ;  $f_{уд} = f(\alpha_{экрстр})$  и  $f_{сд} = f(\alpha_{экрстр})$  для рассматриваемой точки приоткосной области  
 Fig. 5. Graphical relationships of the form  $K_t = f(\alpha_{экрстр})$ ;  $f_{ост} = f(\alpha_{экрстр})$ ;  $f_{уд} = f(\alpha_{экрстр})$  and  $f_{сд} = f(\alpha_{экрстр})$  for the considered near-surface point

Из рис. 5, иллюстрирующего результаты проведенных вычислений, видно, что минимум значения остаточного сопротивления сдвигу  $f_{ост}$  соответствует площадке, ориентированной к оси абсцисс под углом  $\alpha_{экрстр} = 31^\circ$ . Данное значение на  $11^\circ$ , или на 24 %, меньше значения угла  $\alpha_{экрстр}$ , определенного для тех же условий выше. Тем не менее значения соответствующих коэффициентов запаса устойчивости  $K_t$  для первого ( $K_t = 1,08$ ) и второго ( $K_t = 1,044$ ) примеров, вычисленных по формуле (7), отличаются менее чем на 4 %.

Последнее обстоятельство объясняется обоснованным в работах [11; 12] положением о том, что в приоткосных областях и активных зонах фундаментов имеются равноустойчивые области, характеризующиеся тем, что величины коэффициентов запаса устойчивости, вычисленные для множества поверхностей разрушения, расположенных внутри этих зон, либо совпадают, либо отличаются друг от друга весьма незначительно. Таким образом, при потере устойчивости грунтовым массивом в предельное состояние переходит некая прослойка грунта, внутри которой располагается наиболее вероятная поверхность разрушения.

### Предложение, реализованное в работе [9]

Известно, что нормальное  $\sigma_n$  и касательное  $\tau_n$  напряжения, действующие в направлениях главных осей, могут быть выражены через соответствующие главные напряжения следующим образом:



$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (14)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha. \quad (15)$$

На рис. 6 в качестве примера представлена геометрическая интерпретация соотношения (14) в системе координат ( $\sigma$ ;  $\tau$ ) и соответствующие круги Мора.

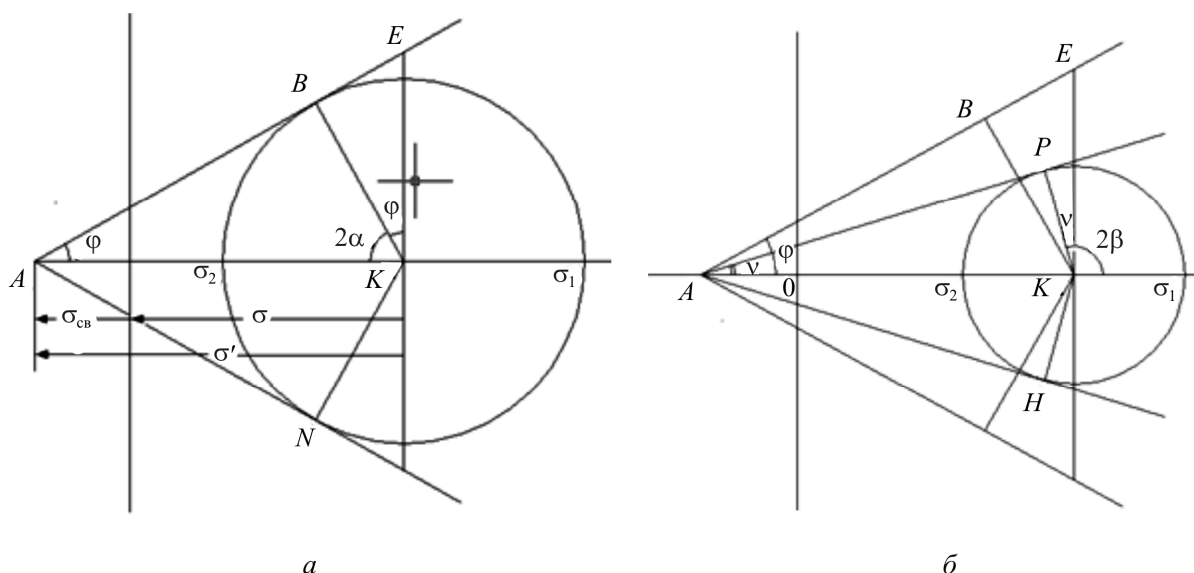


Рис. 6. Круги Мора *a* – для предельного и *б* – допредельного состояния в точке грунтового массива  
 Fig. 6. Mohr circles *a* – for the limit and *b* – sub-limit conditions at a point in the soil mass

Величина коэффициента запаса устойчивости в точке грунтового массива определяется отношением

$$K_t = \frac{\sin \varphi}{\sin \nu} = \frac{\varphi}{\nu}. \quad (16)$$

В предельном состоянии эта величина равна единице и растет по мере снижения нагрузки. При  $K_t \geq 1$  нагрузка меньше критической для всех углов  $\alpha$ . Поэтому величину  $K_t$  можно называть коэффициентом запаса устойчивости грунта в точке. Линия, в каждой точке которой выполняется равенство  $K_t = 1$ , также является границей области предельного состояния грунта.

Числитель выражения (16)  $\sin \varphi = \frac{BK}{AK}$  определен прочностными свойствами грунта,

а знаменатель  $\sin \nu = \frac{PK}{AK} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + 2C \operatorname{ctg} \varphi}$  определяется фактическими напряжениями,

действующими в рассматриваемой точке и физико-механическими свойствами грунтового массива. В допредельном состоянии  $\nu < \varphi$ , так как  $PK < BK$ . По мере роста напряжений (нагрузки) угол  $\nu$  увеличивается. При достижении предельного напряженного состояния (рис. 3, *a*), выполняются условия  $PK = BK$  и  $\sin \varphi = \sin \nu$ , вытекающие из выражения (15). Отрезок  $KB$  указывает направление максимального касательного напряжения в момент достижения предельного напряженного состояния.

Из рис. 6, б видно, что в предельном состоянии  $\angle AKB = \angle AKN = \pm \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$  соответственно. Обозначив через  $\alpha$  угол, составляемый направлением  $\overline{\sigma_1}$  и направлением максимального касательного напряжения  $\overline{\tau_{\max}}$ , получим, что

$$2\alpha = \pm \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right), \text{ или } \alpha = \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (17)$$

Угол  $\alpha$  не зависит от того, при каких значениях главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  наступает предельное состояние.

Автор работы [11] считает, что выражение, определяющее величину угла  $\alpha$ , справедливо не только для критической, но и для любой, меньшей по величине, нагрузки.

Это означает, что для площадки, ориентированной под углом  $\alpha$ , разность между удерживающей и сдвигающей силами будет заведомо меньше, чем для любой другой площадки, угол ориентации которой  $\beta \neq \alpha$ .

Угол отклонения направления действия напряжения  $\sigma_1$  от оси  $x$  расчетной схемы равен углу  $\theta$ , определяемому по формуле

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right). \quad (18)$$

Таким образом, угол наклона вектора максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$ , а значит, и площадки наиболее вероятного сдвига относительно оси  $OX$  расчетной схемы будет равен

$$Q = \alpha + \theta = \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right). \quad (19)$$

Вычисленное по формуле (19) значение угла  $Q$  используется, например, в работах [11; 12] для построения наиболее вероятной линии скольжения. Анализ этого выражения показывает, что величина угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига является функцией напряженного состояния и угла внутреннего трения.

В результате выполненных вычислений по формуле (19) при численных значениях напряжений в исследуемой точке, которые использованы в двух предыдущих примерах, определены два значения угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига:  $\alpha_{\text{экстр1}} = 11^\circ$  и  $\alpha_{\text{экстр2}} = 74^\circ$ . Сравнивая полученные значения углов ориентации наиболее вероятной площадки сдвига с численными значениями соответствующих углов, полученных в первых двух случаях, можно видеть, что они отличаются в 2–3 раза. Кроме того из графиков, приведенных на рис. 4 и 5, видно, что при углах  $\alpha_{\text{экстр1}} = 11^\circ$  и  $\alpha_{\text{экстр2}} = 74^\circ$  численные значения коэффициентов запаса устойчивости  $K_t$  в рассматриваемой точке грунтового массива приблизительно равны 3 и 2,8, что существенно больше, чем при  $\alpha_{\text{экстр}} = 42^\circ$  (1,08 – первый случай) и  $\alpha_{\text{экстр}} = 31^\circ$  (1,044 – второй случай).

## Вычисление величины коэффициента запаса устойчивости откоса

### Вычисление величины коэффициента запаса устойчивости методом Л.Г. Фисенко [10]

Выше было отмечено, что автор работы [9] предложил новый по сравнению с ранее известными метод построения следа наиболее опасной поверхности разрушения, который отличается от метода Л.Г. Фисенко, изложенного в [10, с. 300–304]. Сама же процедура вычисления величины коэффициента запаса устойчивости осталась такой же, как в [4, с. 296–300].

Анализируя способы построения СНВПР, изложенные в работах [9] и [10], можно сделать вывод, что они существенно разнятся, а следовательно, положение соответствующих СНВПР в грунтовом откосе должно быть разным. Это подтверждается рис. 3, 2 (цитируется по работе [9]), на котором приведены следы круглоцилиндрической поверхности разрушения, построенной по методу Л.Г. Фисенко [4] (пунктирная кривая 2), и наиболее вероятной поверхности разрушения (кривая 1), построенной методом [3] для однородного откоса с углом  $\beta = 40^\circ$  и высотой  $H = 200$  м, сложенного грунтом со следующими физико-механическими характеристиками:  $\gamma = 2$  т/м<sup>3</sup>,  $C = 50$  т/м<sup>2</sup>,  $\varphi = 30^\circ$  и  $\xi_0 = 0,5$  ( $\gamma$ ,  $C$ ,  $\varphi$  и  $\xi_0$  – соответственно объемный вес, удельное сцепление, угол внутреннего трения и коэффициент бокового давления грунта; размерность автора работы [9]).

Как отмечено выше, вычисление величины коэффициента запаса устойчивости в работе [9] проведено методом [10], являющимся одной из разновидностей методов первой группы. Это значит, что поверхность разрушения принимается круглоцилиндрической, призма разрушения разбивается на вертикальные отсеки, вес каждого из которых принимается приблизительно равным вертикальной составляющей напряжений  $\sigma_n$ ; напряжение  $\tau_n$  определяется через  $\sigma_n$  по паспорту пород, а величина коэффициента запаса устойчивости откоса вычисляется по формуле [10]

$$n = \frac{f \sum N + KL + A}{\sum T + B}, \quad (20)$$

где  $f \sum N$ ,  $KL$  – сумма сил трения и сцепления, удерживающих откос;  $A$  – другие силы, удерживающие откос;  $\sum T$  – сумма касательных сил, сдвигающих откос и действующих по расчетной поверхности;  $B$  – другие силы, сдвигающие откос (обозначения и терминология работы [10]).

Проведя вычисление коэффициентов запаса устойчивости для этих СНВПР методом [10], автор работы [9] установил, что их величины соответственно равны  $K_1 = 1,75$  и  $K_2 = 1,6$ , причем  $K_1$  больше  $K_2$  на 9,4 %.

### Вычисление величины коэффициента запаса устойчивости методом В.К. Цветкова – А.Н. Богомолова

Для сопоставления результатов, полученных в предыдущем параграфе, с результатами, получаемые методом Цветкова – Богомолова, проведены вычисления величины коэффициента запаса устойчивости того же объекта при помощи компьютерных про-

грамм [16; 17], в которых для определения напряжений используются решения основных граничных задач теории упругости методами теории функций комплексного переменного [12] (однородные откосы) и метод конечных элементов (неоднородные откосы). Отметим, что формализованный в этих программах метод позволяет учесть все три компоненты напряжения при построении следа наиболее вероятной поверхности разрушения (формулы (7)–(13)) и вычисления величины коэффициента запаса устойчивости, которая отыскивается по формуле

$$K = \frac{\int_0^l F_{уд}(S)ds}{\int_0^l F_{сд}(S)ds}, \quad (21)$$

где  $F_{уд}$  и  $F_{сд}$  – удерживающие и сдвигающие силы в точках СНВПР, определяемые соответственно числителем и знаменателем формулы (7), а координаты начальной точки СНВПР приняты такими же, как в работе [9], что делает одинаковыми условия всех расчетов.

На рис. 7, а–в приведены изображения изолиний компонент напряжений, возникающих в исследуемом объекте от собственного веса пород при величине коэффициента бокового давления  $\xi_0 = 0,5$ . Из этих рисунков видно, что в месте перехода откоса в подошву наблюдаются концентрации всех трех компонент напряжения, что уже отмечено нами выше. Положение СНВПР также несколько отличается: на рис. 7, г–е ясно виден небольшой ниспадающий ее участок. В местах концентрации напряжений возникают области пластических деформаций (ОПД), которые определяются и по условию прочности Кулона [13; 14] (рис. 7, д), и при использовании решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта [12; 18] (рис. 7, е). Однако эти области весьма малы, СНВПР их не пересекает, и они не оказывают какого-либо влияния на устойчивость откоса.

Кроме того, на рис. 7, г показана ориентация площадок наиболее вероятного сдвига (ПНВС), которые построены на основе использования формул (9)–(12).

В результате вычислений установлено, что величина коэффициента запаса устойчивости откоса  $K$  получилась равной 2,18. Сравнивая эту величину со значениями коэффициентов запаса устойчивости, вычисленных методом С.Н. Никитина [9] и методом Л.Г. Фисенко [10], видим, что она больше их соответственно на 20 и 26 %.

## Выводы

Опираясь на анализ результатов расчетов для рассмотренного в работе примера, можно констатировать, что методы, основанные на анализе напряженного состояния грунтового массива, дают более высокие значения коэффициентов запаса устойчивости, чем традиционно применяемые. Так, величина коэффициента запаса устойчивости откоса  $K_3$ , вычисленная методом В.К. Цветкова – А.Н. Богомолова, получилась равной 2,18. Сравнивая эту величину со значениями коэффициентов запаса устойчивости, вычисленных методом С.Н. Никитина [9] и методом Л.Г. Фисенко [10], которые соответственно равны  $K_1 = 1,75$  и  $K_2 = 1,6$ , видим, что она больше их соответственно на 20 и 26 %. В это же время  $K_1 > K_2$  на 9,4 % – это указывает на то, что учет напряжений при построении линии скольжения

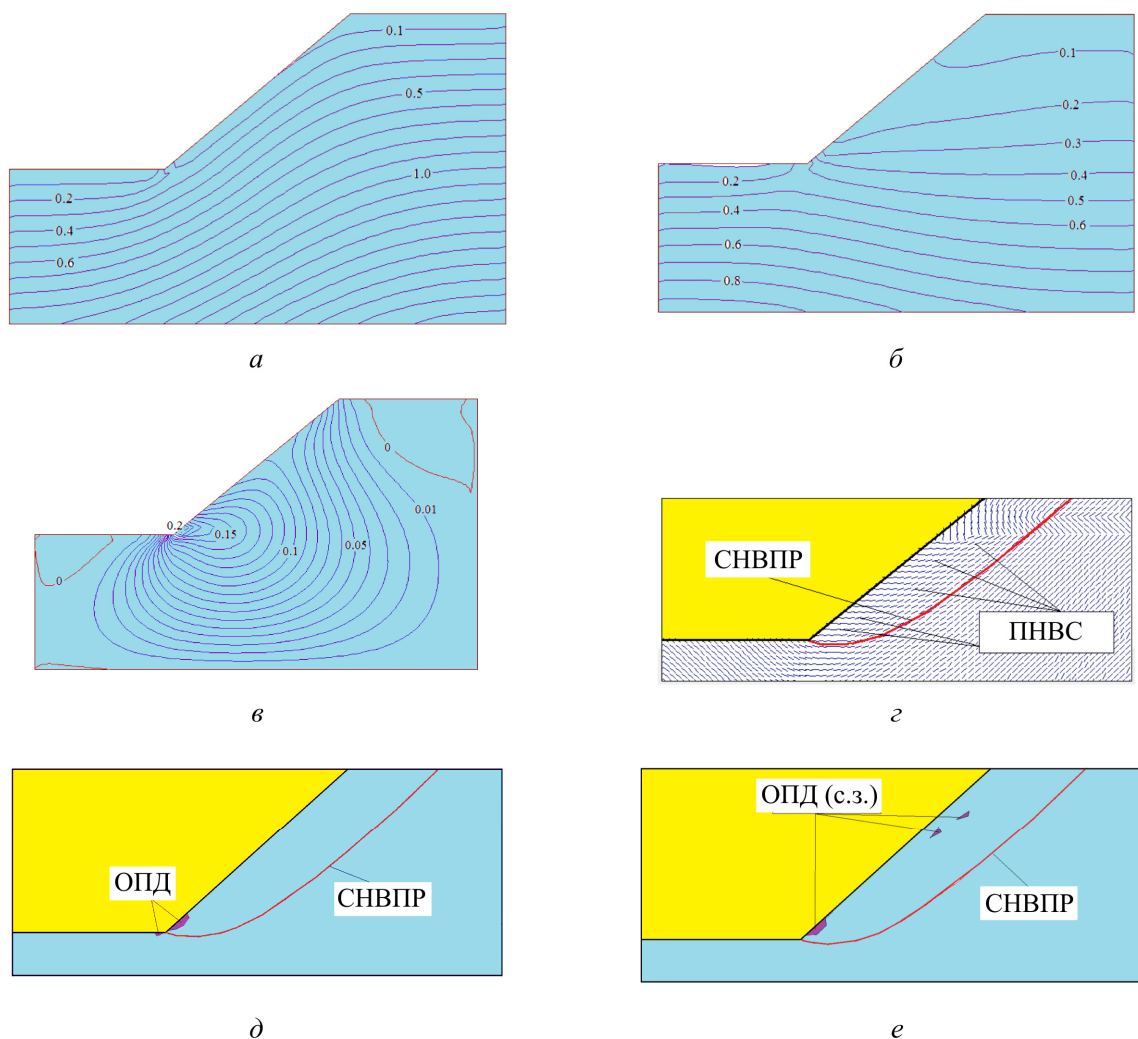


Рис. 7. Картины изолиний безразмерных (в долях  $\gamma h$ ) вертикальных  $\sigma_z$  (а), горизонтальных  $\sigma_x$  (б) и касательных  $\tau_{xz}$  (в) напряжений, следов наиболее вероятных поверхностей разрушения и ПНВС – площадок наиболее вероятного сдвига (г); областей пластических деформаций, построенных в исследуемом откосе исходя из условия прочности Кулона [13; 14] и на основе решения смешанной задачи (с. з.) теории упругости и теории пластичности грунта [15], соответственно (д) и (е)

Fig. 7. Plots of dimensionless (in fractions of  $\gamma h$ ) vertical  $\sigma_z$  (a), horizontal  $\sigma_x$  (б) and tangential  $\tau_{xz}$  (в) stresses, traces of most probable fracture surfaces and most probable shear areas (г); areas of plastic deformation constructed in the studied slope based on Coulomb strength condition [13; 14] and on solution of mixed problem of elasticity theory and soil plasticity theory [15], respectively (д) and (е)

делает ее форму отличной от круглоцилиндрической, что сказывается на величине коэффициента запаса устойчивости. Повышенные значения расчетной величины коэффициента запаса устойчивости позволяют в случае необходимости увеличивать углы заложения откосов грунтов сооружений, что дает существенный экономический эффект в связи с резким уменьшением объемов земляных работ.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов.** Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации.

## Библиографический список

1. Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: Высшая школа, 1981. – 320 с.
2. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams // Transactions of II Congress on Large Dams. – Washington DC, 1933. – Vol. 4. – P. 445–462.
3. Tscytbatarioff G. Foundations, retaining and earth structures. – N.Y.: McCraw-Hill Book Company, 1973.
4. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Физ.-мат. лит., 1960. – 121 с.
5. Голушкевич С.С. Статика предельных состояний грунтовых масс. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1957. – 288 с.
6. Wang F.D., Sun M.C., Ropchan D.M. Compyter program for pit slope stability analysis bee the finite element stress analysis and limiting equilibrium method // RJ 7685. – Burin of Mints, 1972.
7. Desai C.S., Lightner J.G. Mixed fenite element procedure for Soil-Structure iteration and construction sequeces // Inter. J. for Numerical Mhetods in Engineering. – 1985. – Vol. 21, № 5.
8. Федоров И.В. Методы расчета устойчивости откосов и склонов. – М.: Госстройиздат, 1962. – 202 с.
9. Никитин С.Н. Построение ожидаемой поверхности скольжения по напряжения в бортах карьеров // Уголь. – 1962. – № 1. – С. 36–38.
10. Фисенко Л.Г. Устойчивость бортов карьеров и отвалов. – М.: Недра, 1965. – 378 с.
11. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
12. Богомолов А.Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке. – Пермь: ПГТУ, 1996. – 150 с.
13. Coulomb C.A. Application des riles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L`architecture // Memories de savants strangers de L`Academlie des sciences de Paris, 1773. – 233 p.
14. Coulomb C.A. Essay sure one application des regales des maxims et minims a quelques problems statique relatives, a la architecture // Memo. Acad. Roy. Div. Sav. – 1776. – Vol. 7. – P. 343–387.
15. Богомолова О.А., Жиделев А.В. Determination of an inclination angle of the most probable destruction site at the ground point // Construction and Geotechnics. – 2020. – Т. 11, № 1. – С. 20–29. DOI: 10.15593/2294-9826/2020.1.02
16. FEA: св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2015617889 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 23 июля 2015 г.
17. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2009613499 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 30 июня 2009 г.
18. Богомолов А.Н., Богомолова О.А. Сопоставление результатов физических и численных экспериментов по определению несущей способности однородного основания штампа // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2015. – № 6. – С. 7–11.

## References

1. Tsytoovich N.A., Ter-Martirosyan Z.G. Fundamentals of applied geomechanics in construction. Moscow, High School, 1981, 320 p.
2. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams. *Transactions of II Congress on Large Dams*. Washington DC, 1933, vol. 4, pp. 445-462.
3. Tscytbatarioff G. Foundations, retaining and earth structures. New York, McCraw-Hill Book Company, 1973.
4. Sokolovsky V.V. Statics of a friable medium. 3rd ed. Moscow, Physical and Mathematical Literature, 1960, 121 p.
5. Golushkevich S.S. Static limit state of soil masses. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1957, 288 p.
6. Wang F.D., Sun M.C., Ropchan D.M. Computer program for pit slope stability analysis by the finite element stress analysis and limiting equilibrium method. *RJ 7685*. Burin of Mints, 1972.
7. Desai C.S., Lightner J.G. Mixed finite element procedure for Soil-Structure interaction and construction sequences. *Inter. J. for Numerical Methodes in Engineering*, 1985, vol. 21, no. 5.
8. Fedorov I.V. Methods of calculation of stability of slopes and slopes. Moscow, Gosstrojizdat, 1962, 202 p.
9. Nikitin S.N. Construction of expected sliding surface for stress in pit bores. *Ugol*, 1962, no. 1, pp. 36-38.
10. Fisenko L.G. Stability of pit walls and dumps. Moscow, Nedra, 1965, 378 p.
11. Tsvetkov V.K. Calculation of rational parameters of mine workings. Moscow, Nedra, 1993, 251 p.
12. Bogomolov A.N. Calculation of bearing capacity of foundations of structures and stability of ground massifs in elastoplastic formulation. Perm, PGTU, 1996, 150 p.
13. Coulomb C. Application des riles de maxim us et minimis a quelques problems de statique relatives an L`architecture. *Memories de savants strangers de L`Academie des sciences de Paris*, 1773, 233 p.
14. Coulomb C.A. Essay sure one application des regales des maxims et minimis a quelques problems statique relatives, a la architecture. *Memo. Acad. Roy. Div. Sav.*, 1776, vol. 7, pp. 343-387.
15. Bogomolova O.A., Zhidelev A.V. Determination of an inclination angle of the most probable destruction site at the ground point. *Construction and Geotechnics*, 2020, vol. 11, no. 1, pp. 20-29. DOI: 10.15593/2294-9826/2020.1.02
16. Bogomolov A.N. FEA. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2015617889* (2015).
17. Bogomolov A.N. Ustoichivost' (Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie) [Stability (Stress-strain state)]. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2009613499* (2009).
18. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A. Comparison of physical and numerical experiments results in determination of bearing capacity of homogeneous stamp foundation. *Bases, Foundations and Soil Mechanics*, 2015, no. 6, pp. 7-11.