

Ушаков А.Н. О распределении напряжений на контурах одиночных подземных горизонтальных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // *Construction and Geotechnics*. – 2022. – Т. 13, № 4. – С. 86–102. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.4.07

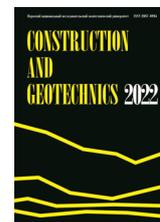
Ushakov A.N. On the distribution of stresses on the contours of single underground horizontal workings of various cross-sections subjected to all-round uniform pressure. *Construction and Geotechnics*. 2022. Vol. 13. No. 4. Pp. 86-102. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.4.07



CONSTRUCTION AND GEOTECHNICS

Т. 13, № 4, 2022

<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2022.4.07

УДК 624.131.522

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТУРАХ ОДИНОЧНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК РАЗЛИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВСЕСТОРОННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

А.Н. Ушаков

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 04 сентября 2022
Одобрена: 08 ноября 2022
Принята к публикации:
15 ноября 2022

Ключевые слова:

отображающая функция, напряженное состояние, односвязная область, горизонтальная выработка, равномерное давление, глубина заложения выработки, коэффициент бокового распора.

АННОТАЦИЯ

Приведен вывод формулы нормальных тангенциальных напряжений для одиночных подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения, расположенных на заданной глубине, при растягивающем равномерном всестороннем давлении, приложенном в точках контуров выработок. В качестве отображающей функции используется функция комплексного переменного, представляющая собой полином натуральной степени n с полюсом первого порядка в нуле, и позволяющая проводить построение различных семейств простых замкнутых кривых, имитирующих конфигурации контуров подземных горизонтальных выработок.

Приведены примеры контуров, поперечное сечение которых имеет форму прямой и обратной трапеции, треугольника, сводов с вертикальными и наклонными стенками, ромба, прямоугольника, квадрата и эллипса. На основе предложенного автором способа вычислены коэффициенты полинома седьмой степени, осуществляющего конформное отображение внутренности единичного круга на плоскость с трапециевидным отверстием заданных размеров. Исследовано напряженное состояние построенной выработки в точках ее контура при различных глубинах заложения, величинах растягивающего равномерного всестороннего давления при двух фиксированных значениях коэффициента бокового распора горной породы. Приведены графические изображения эпюр напряжений, действующих на контуре рассматриваемой выработки. Полученные результаты могут быть применены для решения задач об определении допустимых глубин заложения выработок и вычислении значений допустимых величин равномерного давления в точках их контуров. Критерием для определения значений этих величин является условие отсутствия на контурах выработок точек, в которых нормальные тангенциальные напряжения превышают пределы прочности вмещающей породы на растяжение и сжатие.

© ПНИПУ

© Ушаков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: miit.vgasu@mail.ru

Andrei N. Ushakov – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: miit.vgasu@mail.ru

ON THE DISTRIBUTION OF STRESSES ON THE CONTOURS OF SINGLE UNDERGROUND HORIZONTAL WORKINGS OF VARIOUS CROSS-SECTIONS SUBJECTED TO ALL-ROUND UNIFORM PRESSURE

A.N. Ushakov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 04 September 2022
Approved: 08 November 2022
Accepted for publication:
15 November 2022

Keywords:

mapping function, stress state, simply-connected domain, horizontal working, uniform pressure, laying depth of working, lateral expansion coefficient.

ABSTRACT

The formula for normal tangential stresses for single underground workings of different cross-sectional shapes, located at a given depth, with all-round tensile uniform pressure applied at the points of the contours of the workings, is derived. As a mapping function is considered a function of complex variable, which is a polynomial of natural degree n with a pole of first order in zero, allowing the construction of various families of simple closed curves, simulating configurations of the contours of underground workings.

Examples are given of contours whose cross-section has the form of a straight and inverse trapezoid, triangle, vaults with vertical and sloping walls, rhombus, rectangle, square and ellipse. Based on the method proposed by the author, the coefficients of the polynomial of the seventh degree, which performs conformal mapping of the interior of a unit circle on a plane with a trapezoidal hole of a given dimensions, are calculated. The stress state of constructed workings at the points of its contour at different depths of laying, the values of the all-round tensile uniform pressure at two fixed values of the lateral expansion coefficient of the rock is investigated. The graphical representations of the stress acting on the contour of the working in question are given.

The obtained results can be used to solve problems of determining the permissible depths of mine workings and calculating the values of permissible values of uniform pressure in the points of their contours. The criterion for determining the values of these values is the condition of absence of points on the contours of workings, in which the normal tangential stresses exceeding the limits of tensile and compressive strength of the host rock.

© PNRPU

Введение

Добыча полезных ископаемых и производство подземного строительства приводят к необходимости изучения напряженного состояния горного массива, ослабленного подземными выработками. В предположении однородности и изотропности массива горных пород, заметим, что для исследования напряженного состояния подземных горизонтальных выработок, имеющих неограниченную длину, можно применить методы двумерной линейной теории упругости [1–5], использующие аппарат комплексного анализа [5–9].

Для получения сечения выработки необходимо найти функцию комплексного переменного, осуществляющую конформное отображение внутренности или внешности единичного круга на интересующую нас область. Однако построение отображающей функции представляет собой довольно трудную задачу. Даже если эта функция известна, она, как правило, представляется сложным аналитическим выражением, которое приводит на практике к большим вычислительным трудностям. Поэтому приходится заменять эти функции на более удобные выражения, состоящие из простых и хорошо изученных функций. К таким функциям прежде всего, безусловно, следует отнести полиномы. Данное обстоятельство способствовало созданию приближенных методов построения отображающих функций [10–12].

Методы и средства

При решении задач было бы желательно использовать достаточно простые функции, при помощи которых можно было бы получить довольно широкий класс контуров, имитирующих различные формы сечений подземных выработок. В качестве такой функции рассмотрим полином натуральной степени n с простым полюсом в нуле, т.е. функцию вида

$$z = \omega(\zeta) = i \left(A\zeta^{-1} + \sum_{k=1}^n A_k \zeta^k \right), \quad (1)$$

где $A, A_1 - A_n$ – действительные коэффициенты, осуществляющую отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную односвязную область, граница которой представляет собой семейство простых замкнутых кривых. В зависимости от значений коэффициентов отображающей функции (1) возможно построение кривых различных конфигураций, имитирующих соответствующие формы сечений подземных горных выработок.

Частные случаи функции (1) были использованы в работах [13–20] для решения ряда задач геомеханики.

Рассмотрим подземную горизонтальную выработку, форма сечения которой определяется при помощи отображающей функции (1). Допустим, что данная выработка расположена на достаточно большой глубине H , причем по ее контуру действует внутреннее равномерное давление интенсивности p , что позволяет рассматривать горную выработку как подземное хранилище, например, углеводородов.

Целью настоящей статьи является исследование напряженного состояния в точках контуров подземных горизонтальных выработок заданных конфигураций и размеров при действии на контуры изнутри выработки всестороннего равномерного давления, проиллюстрированное на примере выработки, форма поперечного сечения которой представляет собой трапецию, при различных значениях глубины ее заложения и величины внутреннего равномерного давления.

Для решения поставленной задачи необходимо прежде всего провести построение области, имитирующей выработку заданной конфигурации, для чего могут быть привлечены различные способы [10–12, 14], направленные на нахождение коэффициентов отображающей функции (1). В частности, для построения отображающих функций односвязных областей, ограниченных многоугольниками, можно использовать интеграл Кристоффеля – Шварца. На рис. 1 приведены примеры построения областей, ограниченных контурами заданной конфигурации, полученных на основе способа, предложенного в работе [21], при помощи отображающей функции (1).

Для исследования напряженного состояния в точках контуров выработок необходима формула, позволяющая получать значения нормальных тангенциальных напряжений.

Полагая в выражении (1) $\zeta = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, и, отделяя действительную часть от мнимой, получим уравнения контуров отверстий в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (A - A_1) \sin \theta - \sum_{k=2}^n A_k \sin k\theta, \\ y(\theta) &= (A + A_1) \cos \theta + \sum_{k=2}^n A_k \cos k\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

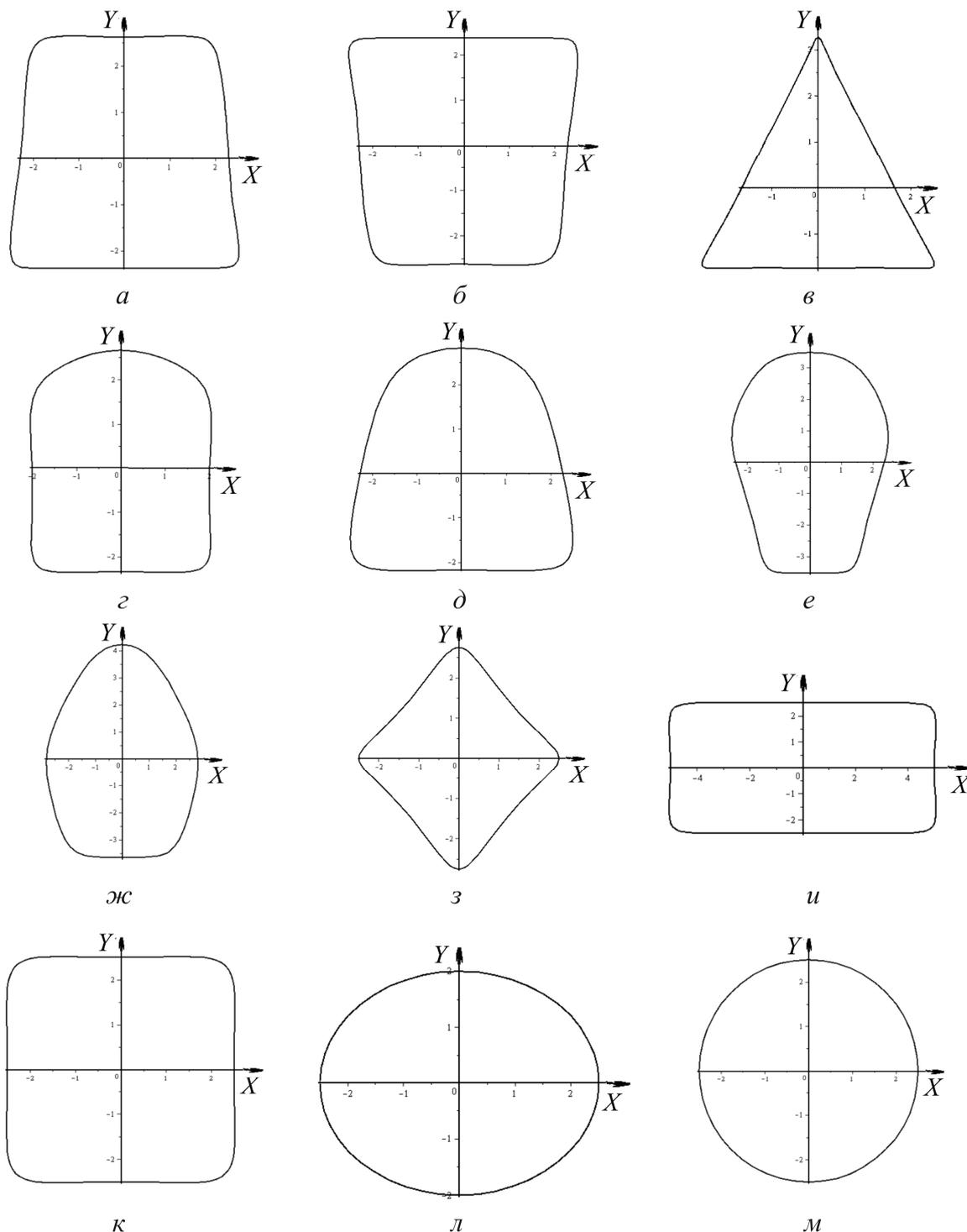


Рис. 1. Формы поперечного сечения выработок (отверстий): а – трапециевидная форма (прямая); б – трапециевидная форма (обратная); в – треугольная форма; г – свод с вертикальными стенками; д – свод с наклонными стенками; е – подковообразная форма; ж – подковообразная форма; з – ромбовидная форма; и – прямоугольная форма; к – квадратная форма; л – эллиптическая форма; м – круглая форма

Fig. 1. Cross-sectional shapes of workings (holes): а – trapezoidal shape (straight); б – trapezoidal shape (reverse); в – triangular shape; г – vault with vertical walls; д – a vault with sloping walls; е – horseshoe shape; ж – horseshoe shape; з – diamond shape; и – rectangular shape; к – square shape; л – elliptical shape; м – round shape

Рассмотрим подземную горизонтальную выработку неограниченной длины и сечения, конфигурация которого определяется при помощи отображающей функции (1) и задается параметрическим уравнением (2). Пусть выработка находится на глубине H , а ее контур подвержен равномерному давлению p .

Тогда напряженное состояние в горном массиве, ослабленном выработкой, имеет вид

$$\sigma_x^0 = \mu\gamma H + p, \quad \sigma_y^0 = \gamma H + p, \quad (3)$$

где μ – коэффициент бокового распора, а p – постоянная величина, причем, согласно [22], будем полагать, что при $p > 0$ контур выработки испытывает равномерное сжатие постоянной величины p , а при $p < 0$ – равномерное растяжение той же интенсивности.

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (4)$$

где $\varphi_1(\zeta)$ соответствует напряженному состоянию в ненарушенном выработкой массиве горных пород, а $\varphi_0(\zeta)$ определяет дополнительную компоненту напряжения, вызванную наличием выработки.

Согласно [12], с учетом (3) имеем

$$\varphi_1(\zeta) = \left(\frac{\gamma H i (1 + \mu)}{4} + \frac{p i}{2} \right) \left(A \zeta^{-1} + \sum_{k=1}^n A_k \zeta^k \right). \quad (5)$$

Перейдем к получению выражения для $\varphi_0(\zeta)$. Для этого рассмотрим граничное условие [12, с. 60], т.е.

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \overline{b_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + i f_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (6)$$

где γ – единичный круг $|\zeta| < 1$, $\sigma = e^{i\theta}$, а $f_1^0 + i f_2^0$ – приведенное контурное условие для функции $\varphi_0(\zeta)$.

Так как функция $\varphi_0(\zeta)$ голоморфна в круге $|\zeta| < 1$, то примем

$$\varphi_0(\zeta) = a_1 i \zeta + a_2 i \zeta^2 + a_3 i \zeta^3 + a_4 i \zeta^4 + a_5 i \zeta^5 + a_6 i \zeta^6 + \dots, \quad (7)$$

тогда

$$\overline{\varphi_0' \left(\frac{1}{\zeta} \right)} = -a_1 i - 2a_2 i \frac{1}{\zeta} - 3a_3 i \frac{1}{\zeta^2} - 4a_4 i \frac{1}{\zeta^3} - 5a_5 i \frac{1}{\zeta^4} - 6a_6 i \frac{1}{\zeta^5} - \dots$$

при $|\zeta| > 1$.

Далее

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = -\sigma^{n-2} \frac{A + A_1 \sigma + A_2 \sigma^3 + \dots + A_n \sigma^{n+1}}{-A \sigma^{n+1} + A_1 \sigma^{n-1} + 2A_2 \sigma^{n-2} + 3A_3 \sigma^{n-3} + \dots + nA_n}.$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

в котором функция $\varphi_0(\zeta)$ имеет вид (7). Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{A + A_1\sigma + A_3\sigma^3 + \dots + A_n\sigma^{n+1}}{-A\sigma^{n+1} + A_1\sigma^{n-1} + 2A_2\sigma^{n-2} + 3A_3\sigma^{n-3} + \dots + nA_n} \right] \cdot \\ & \cdot i \left[a_1\sigma^{n-2} + 2a_2\sigma^{n-3} + 3a_3\sigma^{n-4} + \dots + na_n \frac{1}{\sigma} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ & = -\frac{i}{A} \left[\sum_{k=2}^n (k-1)a_{k-1}A_k + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{k=3}^n (k-2)a_{k-2}A_k \right) \zeta + \left(\sum_{k=4}^n (k-3)a_{k-3}A_k \right) \zeta^2 + \dots + a_1A_n\zeta^{n-2} \right] = \\ & = -\frac{i}{A} \sum_{l=0}^{n-2} D_l \zeta^l, \end{aligned} \tag{8}$$

где $D_l = \sum_{k=l+2}^n (k-(l+1))a_{k-(l+1)}A_k$.

Теперь перейдем к вычислению интеграла, стоящего в правой части граничного условия (6). Согласно [12] заметим, что

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 &= -\frac{1}{2} \left[(\gamma H(1+\mu) + 2p)\omega(\sigma) + \gamma H(1-\mu)\overline{\omega(\sigma)} \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \left[(\gamma H(1+\mu) + 2p)(A\sigma^{-1} + \sum_{k=1}^n A_k\sigma^k) - \right. \\ & \left. - \gamma H(1-\mu)(A\sigma + \sum_{k=1}^n A_k\sigma^{-k}) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{i}{2} \left[((\gamma H(1+\mu) + 2p) \sum_{k=1}^n A_k \zeta^k - \gamma H(1-\mu)A\zeta) \right] = \\ & = -\frac{i}{2} \left[((\gamma H(1+\mu) + 2p)A_1 - \gamma H(1-\mu)A)\zeta + ((\gamma H(1+\mu) + 2p) \sum_{k=2}^n A_k \zeta^k) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя значения интегралов (8), (9) в граничное условие (6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ζ , получим систему линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{A_3}{A} \right) a_1 - \frac{1}{A} [2A_4a_2 + 3A_5a_3 + \dots + (n-2)A_n a_{n-2}] = \\ & = -\frac{1}{2} (\gamma H(1+\mu) + 2p)A_1 - \gamma H(1-\mu)A, \\ & -\frac{A_4}{A} a_1 + \left(1 - \frac{2A_5}{A} \right) a_2 - \frac{1}{A} [3A_6a_3 + 4A_7a_4 + \dots + (n-3)A_n a_{n-3}] = \\ & = -\frac{1}{2} (\gamma H(1+\mu) + 2p)A_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{A_5}{A}a_1 - \frac{2A_6}{A}a_2 + \left(1 - \frac{3A_7}{A}\right)a_3 - \frac{1}{A}[4A_8a_4 + \dots + (n-4)A_n a_{n-4}] = \\
 & = -\frac{1}{2}(\gamma H(1+\mu) + 2p)A_3, \dots \\
 & -\frac{1}{A}a_1 + a_{n-2} = -\frac{1}{2}(\gamma H(1+\mu) + 2p)A_{n-2}, \\
 & a_{n-1} = -\frac{1}{2}(\gamma H(1+\mu) + 2p)A_{n-1}, \\
 & a_n = -\frac{1}{2}(\gamma H(1+\mu) + 2p)A_n.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть решением системы (10) являются числа

$$a_i = -\gamma H f_i - p g_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{11}$$

где $f_i = f_i(A, A_1 - A_n, \mu)$ и $g_i = g_i(A, A_1 - A_n, \mu)$ – действительные числа, зависящие от коэффициентов $A, A_1 - A_n$ отображающей функции (1) и коэффициента бокового распора горной породы μ , связанного с коэффициентом Пуассона ν соотношением $\mu = \nu(1-\nu)^{-1}$.

Тогда, с учетом решения (11) системы линейных уравнений (10), формула (7) принимает вид

$$\Phi_0(\zeta) = -\gamma H i \sum_{k=1}^n f_k \zeta^k - p i \sum_{k=1}^n g_k \zeta^k. \tag{12}$$

Компонента напряжения $\varphi_1(\zeta)$ описывается формулой (5).

Для нахождения формулы нормальных тангенциальных напряжений воспользуемся известным соотношением [6]

$$\sigma_p + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \tag{13}$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{14}$$

Подставляя в правую часть равенства (13) выражения для производных функций (1) и (4) и учитывая соотношения (5) и (12), получим

$$4\Phi_1(\zeta) = \gamma H(1+\mu) - 4\gamma H \frac{\sum_{k=1}^n k f_k \zeta^{k+1}}{-A + \sum_{k=1}^n k A_k \zeta^{k+1}}, \tag{15}$$

$$4\Phi_2(\zeta) = 2p - 4p \frac{\sum_{k=1}^n k g_k \zeta^{k+1}}{-A + \sum_{k=1}^n k A_k \zeta^{k+1}}. \tag{16}$$

Тогда

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta).$$

Положим $\zeta = \cos \theta + i \sin \theta$. Введем обозначения

$$R_1 = \sum_{k=1}^n k f_k \cos(k+1)\theta, \quad R_2 = \sum_{k=1}^n k f_k \sin(k+1)\theta,$$

$$R_3 = \sum_{k=1}^n k g_k \cos(k+1)\theta, \quad R_4 = \sum_{k=1}^n k g_k \sin(k+1)\theta,$$

$$S_1 = -A + \sum_{k=1}^n k A_k \cos(k+1)\theta, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k A_k \sin(k+1)\theta.$$

Тогда соотношения (15) и (16) принимают вид

$$4\Phi_1(\zeta) = \gamma H(1+\mu) - 4\gamma H \frac{R_1 + iR_2}{S_1 + iS_2}, \quad (15')$$

$$4\Phi_2(\zeta) = 2p - 4p \frac{R_3 + iR_4}{S_1 + iS_2}. \quad (16')$$

Умножая числители и знаменатели дробей, стоящие в правых частях соотношений (15') и (16') на $S_1 - iS_2$ и выделяя действительные части, получим

$$\operatorname{Re} \left(\frac{R_n + iR_{n+1}}{S_1 + iS_2} \right) = \frac{R_n S_1 + R_{n+1} S_2}{S_1^2 + S_2^2}, \quad n = 1, 3,$$

причем

$$S_1^2 + S_2^2 = K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta, \quad (17)$$

где

$$K_n = A^2 + \sum_{k=1}^n k^2 A_k^2, \quad L_n = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)A_k A_{k+1},$$

$$M_n^p = 2 \sum_{k=1}^{n-p} k(k+p)A_k A_{k+1} - 2(p-1)AA_{p-1}. \quad (18)$$

Далее, с учетом полученных выше выражений соотношение (13) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_p + \sigma_\theta &= 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta) = \\ &= \frac{\gamma H(1+\mu)(S_1^2 + S_2^2) - 4\gamma H(R_1 S_1 + R_2 S_2)}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta} + \\ &+ 2p - 4p \cdot \\ &\cdot \frac{R_3 S_1 + R_4 S_2}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1 S_1 + R_2 S_2 &= \sum_{k=1}^n k^2 f_k A_k + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)[f, A]_{k,1} \cos \theta + \\
 &+ \sum_{p=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} k(k+p)[f, A]_{k,p} - (p-1)A f_{p-1} \right) \cos p\theta - A \sum_{k=n}^{n+1} (k-1) f_{k-1} \cos k\theta, \\
 R_3 S_1 + R_4 S_2 &= \sum_{k=1}^n k^2 g_k A_k + \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)[g, A]_{k,1} \cos \theta + \\
 &+ \sum_{p=2}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-p} k(k+p)[g, A]_{k,p} - (p-1)A g_{p-1} \right) \cos p\theta - A \sum_{k=n}^{n+1} (k-1) g_{k-1} \cos k\theta,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$[f, A]_{k,s} = f_{k+s} A_k + f_k A_{k+s}, \quad [g, A]_{k,s} = g_{k+s} A_k + g_k A_{k+s}, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Подставляя соотношения (17) и (20) в формулу (19), получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_p + \sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = \\
 &= -\gamma H \cdot \frac{I_n + I_n^1 \cos \theta + \left(\sum_{p=2}^{n-1} I_n^p - 4(p-1)A f_{p-1} \right) \cos p\theta}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta} + \\
 &+ 2p - 4p \cdot \frac{G_n + G_n^1 \cos \theta + \left(\sum_{p=2}^{n-1} G_n^p - (p-1)A g_{p-1} \right) \cos p\theta -}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta} \\
 &\frac{-(n-1)AA_{n-1} \cos n\theta - nAA_n \cos(n+1)\theta}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2AnA_n \cos(n+1)\theta},
 \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_n &= 4F_n - (1+\mu)K_n, \quad I_n^1 = 4F_n^1 - (1+\mu)L_n, \quad I_n^p = 4F_n^p - (1+\mu)M_n^p; \\
 F_n &= \sum_{k=1}^n k^2 f_k A_k, \quad F_n^p = \sum_{k=1}^{n-p} k(k+p)[f, A]_{k,p}, \quad G_n = \sum_{k=1}^n k^2 g_k A_k, \\
 G_n^p &= \sum_{k=1}^{n-p} k(k+p)[g, A]_{k,p}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку к контуру отверстия приложено давление интенсивности p , формула для определения нормальных тангенциальных напряжений (21) принимает вид

$$\sigma_{\theta} = -\gamma H \cdot \frac{I_n + I_n^1 \cos \theta + \left(\sum_{p=2}^{n-1} (I_n^p - 4(p-1)f_{p-1}) \cos p\theta \right)}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2nA_n \cos(n+1)\theta} +$$

$$+ p \cdot \left(1 - 4 \frac{G_n + G_n^1 \cos \theta + \left(\sum_{p=2}^{n-1} G_n^p - (p-1)Ag_{p-1} \right) \cos p\theta -}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2nA_n \cos(n+1)\theta} \right. \quad (23)$$

$$\left. \frac{-(n-1)AA_{n-1} \cos n\theta - nAA_n \cos(n+1)\theta}{K_n + L_n \cos \theta + \sum_{p=2}^{n-1} M_n^p \cos p\theta - 2A(n-1)A_{n-1} \cos n\theta - 2nA_n \cos(n+1)\theta} \right).$$

Нетрудно видеть, что функция $\sigma_{\theta} = \sigma(\theta)$ определена при любых значениях аргумента θ . Действительно, из равенства (17) следует, что знаменатель дроби (23) неотрицателен при всех значениях аргумента θ . Поскольку, согласно (8), коэффициент A отображающей функции (1) не может быть равен нулю, а из (18) следует, что вместе с этим, и K_n положителен, то заключаем, что знаменатель дроби (23) не обращается в нуль ни при каких значениях аргумента θ .

Заметим, что формула (23) получена в предположении, что глубина заложения выработки H значительна, и согласно [23] будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (24)$$

где R_{\max} – наибольший линейный размер сечения выработки.

Приравнивая к нулю выражение (23), получаем при заданном значении n тригонометрическое уравнение степени $n + 1$, при помощи которого можно определить аргументы точек контуров выработок, дающие нулевые значения нормальных тангенциальных напряжений. Соответствующие уравнения для отображающей функции (1) при $n = 3$ приведены, например, в работе [16], а при $n = 5$ – в работе [24].

Результаты

Теперь применим приведенные выше соотношения для исследования напряженного состояния на границе подземной горизонтальной выработки трапециевидной формы поперечного сечения, в точках контура которой действует растягивающее всестороннее равномерное давление заданной интенсивности при заданных значениях коэффициента бокового распора. Для этого прежде всего необходимо построить выработку нужной конфигурации, предварительно задав размеры этой выработки.

Полагая в (1) и (2) $n = 7$, следуя [21], построим выработку, поперечное сечение которой представляет собой трапецию высоты $h = 5$, нижнее основание которой $b = 2$, а верхнее основание $a = 2,5$. Проводя необходимые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} A = -2,792, A_1 = -0,099, A_2 = 0,179, A_3 = 0,398, A_4 = -0,034, \\ A_5 = 0,100, A_6 = -0,018, A_7 = -0,015. \end{aligned} \quad (25)$$

Контур выработки приведен на рис. 1, а.

Заметим, что отображающая функция (1) с коэффициентами (25) совершает конформное отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на полученную область. Для того, чтобы убедиться в этом, заметим, что отображающая функция не имеет в круге $|\zeta| < 1$ других особенностей, кроме простого полюса. Далее покажем, что производная $\omega'(\zeta)$ не обращается в нуль в точках единичного круга, т.е. уравнение $\omega'(\zeta) = 0$ не имеет решений на рассматриваемом множестве. Для этого воспользуемся теоремой Руше [25].

Вычисляя производную функции (1) с коэффициентами (25) и приравнявая ее нулю, получим уравнение

$$0,105\zeta^8 + 0,108\zeta^7 - 0,5\zeta^6 + 0,136\zeta^5 - 1,194\zeta^4 - 0,358\zeta^3 + 0,099\zeta^2 - 2,792 = 0.$$

Положим $f(\zeta) = 2,792$ и $g(\zeta) = 0,105\zeta^8 + 0,108\zeta^7 - 0,5\zeta^6 + 0,136\zeta^5 - 1,194\zeta^4 - 0,358\zeta^3 + 0,099\zeta^2$. На окружности $|\zeta| = 1$ имеем

$$|f(\zeta)| = 2,792,$$

$$\begin{aligned} |g(\zeta)| &= |0,105\zeta^8 + 0,108\zeta^7 - 0,5\zeta^6 + 0,136\zeta^5 - 1,194\zeta^4 - 0,358\zeta^3 + 0,099\zeta^2| \leq \\ &\leq 0,105|\zeta^8| + 0,108|\zeta^7| + 0,5|\zeta^6| + 0,136|\zeta^5| + 1,194|\zeta^4| + 0,358|\zeta^3| + 0,099|\zeta^2| = 2,5. \end{aligned}$$

Итак, во всех точках окружности $|\zeta| = 1$ выполняется неравенство $|f(\zeta)| > |g(\zeta)|$. Функция $f(\zeta) = 2,792$ не имеет нулей внутри круга $|\zeta| < 1$, а значит, по теореме Руше не имеет нулей и функция $0,105\zeta^8 + 0,108\zeta^7 - 0,5\zeta^6 + 0,136\zeta^5 - 1,194\zeta^4 - 0,358\zeta^3 + 0,099\zeta^2 - 2,792$.

Теперь перейдем к исследованию напряженного состояния на контуре трапециевидной выработки в зависимости от глубины ее заложения, интенсивности растягивающего давления, приложенного к точкам ее границы при заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5$ т/м³ и пределами прочности при растяжении $R_{\text{рас}} = -1735$ т/м² и сжатии $R_{\text{сж}} = 20\,400$ т/м². Поскольку наибольший линейный размер трапециевидной выработки согласно ее построению составляет 5 м, то с учетом (24) положим $H \geq 250$ м.

При решении задачи используем два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона, которая в среднем для горных пород равна значению $\nu = 0,20$ [23]. Второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в горном массиве, которое принимается при определении напряжений на достаточно больших глубинах [26].

Итак, рассмотрим выработку трапециевидного сечения (см. рис. 1, а), полученную при помощи отображающей функции (1) с коэффициентами (25).

Случай $\mu_1 = 0,25$.

Подставляя значения коэффициентов (25) отображающей функции (1) в формулы (18) и (22), с учетом соотношения (23) получим уравнение для определения нулевых значений тангенциальных нормальных напряжений в виде

$$\begin{aligned} &17,646p \cos^8 \theta + 40,249p \cos^7 \theta + (3,469\gamma H - 167,216p) \cos^6 \theta + \\ &+ (2,827\gamma H - 56,278p) \cos^5 \theta + (-3,704\gamma H + 65,790p) \cos^4 \theta + \\ &+ (-1,866\gamma H + 11,290p) \cos^3 \theta + (-28,788\gamma H + 24,107p) \cos^2 \theta + \\ &+ (-2,500\gamma H + 3,218p) \cos \theta + 22,735\gamma H - 3,154p = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для нахождения нулей необходимо задать глубину заложения выработки H и значение давления p . Из условий задачи следует, что необходимо выбирать значения $p < 0$.

Положим $H_1 = 250$ м.

В качестве значений давления, приложенного к контуру выработки, примем p , т/м²:

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 102, \quad p_3 = 408. \quad (27)$$

Подставляя значения давления (27) в уравнение (26), получим следующие значения нулей:

при $p_1 = 0$ $\theta_1 = 0,582$, $\theta_2 = 2,725$;

при $p_2 = 102$ $\theta_1 = 0,621$, $\theta_2 = 2,669$;

при $p_3 = 408$ $\theta_1 = 0,789$, $\theta_2 = 2,463$.

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления действуют растягивающие напряжения, а именно:

при $p_1 = 0$ имеем $\theta \in (0, 0,582) \cup (2,725, 3,558) \cup (5,701, 2\pi)$;

при $p_2 = 102$ имеем $\theta \in (0, 0,621) \cup (2,669, 3,614) \cup (5,662, 2\pi)$;

при $p_3 = 408$ имеем $\theta \in (0, 0,789) \cup (2,463, 3,820) \cup (5,494, 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Теперь рассмотрим выработку, положив

$$H_2 = 500, \quad H_3 = 1000 \quad (28)$$

при принятых выше значениях давления (27).

Прямые вычисления по формуле (26) дают:

при $H_2 = 500$ м имеем:

при $p_2 = 102$ $\theta \in (0, 0,600) \cup (2,699, 3,584) \cup (5,683, 2\pi)$;

при $p_3 = 408$ $\theta \in (0, 0,671) \cup (2,600, 3,683) \cup (5,612, 2\pi)$;

при $H_3 = 1000$ м получим:

при $p_2 = 102$ $\theta \in (0, 0,591) \cup (2,712, 3,571) \cup (5,692, 2\pi)$;

при $p_3 = 408$ $\theta \in (0, 0,621) \cup (2,669, 3,614) \cup (5,662, 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для данной выработки трапециевидной формы поперечного сечения при заданных значениях равномерного давления $p_1 - p_3$ и $H_1 = 250$ м в случае $\mu = 0,25$ приведены на рис. 2.

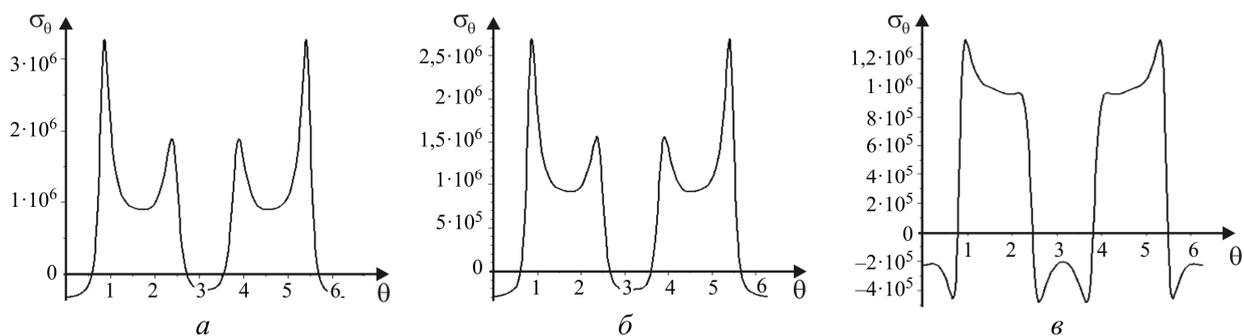


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции при значениях p , т/м²: $a - p_1 = 0$, $б - p_2 = 102$, $в - p_3 = 408$

Fig. 2. Plots of tangential normal stresses on the contours in the form of a trapezoid at p , t/m²:
 $a - p_1 = 0$, $б - p_2 = 102$, $в - p_3 = 408$

Случай $\mu_2 = 1$.

Уравнение для определения нулевых значений тангенциальных нормальных напряжений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 &17,646p \cos^8 \theta + 40,249p \cos^7 \theta + (1,065\gamma H - 167,216p) \cos^6 \theta + \\
 &+ (-7,116\gamma H - 56,278p) \cos^5 \theta + (23,459\gamma H + 65,790p) \cos^4 \theta + \\
 &+ (16,028\gamma H + 11,290p) \cos^3 \theta + (-33,441\gamma H + 24,107p) \cos^2 \theta + \\
 &+ (-9,366\gamma H + 3,218p) \cos \theta + 34,877\gamma H - 3,154p = 0.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Анализ напряженного состояния в точках контура рассматриваемой трапециевидной выработки при принятых в предыдущем случае значениях глубин заложения выработки и значениях интенсивности равномерного давления (27) показывает, что при $H_1 = 250$ м во всех точках контура действуют лишь сжимающие напряжения; растягивающие напряжения возникают в точках контура при значениях давления $p \geq 415$ т/м². При $H_2 = 500$ м, растягивающие напряжения возникают при значениях $p \geq 830$ т/м², а в случае $H_3 = 1000$ м аналогичная ситуация возможна при значениях $p \geq 1660$ т/м². На рис. 3 проиллюстрировано распределение сжимающих и растягивающих напряжений в точках контура трапециевидной выработки, находящейся на глубине $H_1 = 250$ м при возрастающей величине давления.

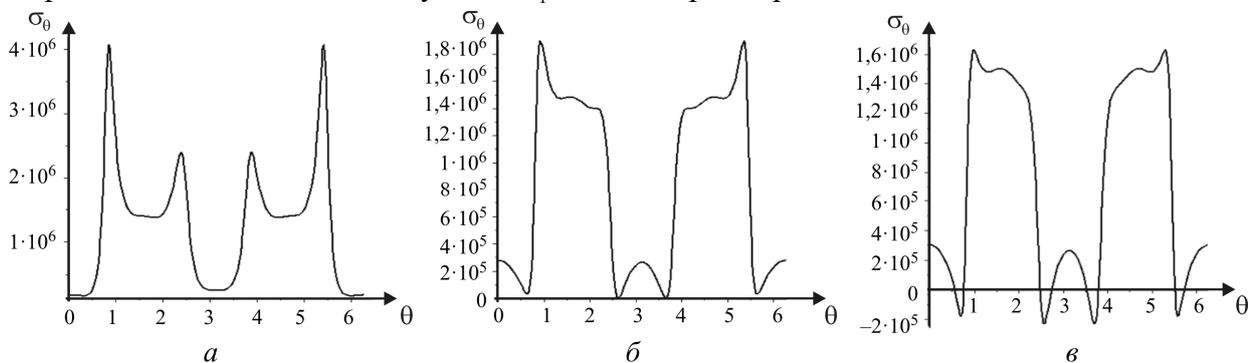


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции при значениях p , т/м²: $a - p_1 = 0$, $б - p_2 = 415$, $в - p_3 = 510$

Fig 3. Plots of tangential normal stresses on the contours in the form of a trapezoid at p , t/m²:
 $a - p_1 = 0$, $б - p_2 = 415$, $в - p_3 = 510$

Выводы

1. Приведенные в работе формулы для нахождения значений нормальных тангенциальных напряжений в точках контуров подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения позволяют проводить исследование напряженного состояния подземных горизонтальных выработок, находящихся на заданной глубине и испытывающих внутреннее всестороннее равномерное давление при известных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

2. На примере выработки, поперечное сечение которой имеет форму трапеции, при заданных значениях коэффициента бокового распора, глубины заложения и равномерного давления выделены участки, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения.

3. Проведенное при $\mu_1 = 0,25$ исследование показывает, что при увеличении интенсивности равномерного растягивающего давления в пределах фиксированной глубины заложения выработки значения сжимающих напряжений в точках контура выработки уменьшаются, а значения растягивающих напряжений увеличиваются. При увеличении глубины заложения выработки в пределах заданного значения равномерного давления сжимающие напряжения увеличиваются, а растягивающие – уменьшаются. При этом необходимо заметить, что при любой глубине заложения рассматриваемой выработки и сколь угодно большой интенсивности равномерного давления на контуре имеются участки со значениями напряжений обоих знаков; при $\mu_2 = 1$ на контуре имеются участки, на которых напряжения принимают значения одного знака.

4. Основываясь на соотношениях и результатах, приведенных в статье, можно рассмотреть задачи об определении допустимой глубины заложения выработки и об определении величин допустимого равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок при заданных значениях физико-механических свойств горной породы.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Вклад 100 %.

Библиографический список

1. Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
2. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1968. – 457 p.
3. Poulos H.G., Davis E.H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. – New York: Wiley, 1974. – 411 p.
4. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
5. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
7. Jian-ke Lu. Complex variable methods in plane elasticity. – World Scientific, 1995. – 237 p.
8. Chau K.T. Analytical Methods in Geomechanics. – New York: CRC Press, 2012. – 424 p.

9. Schinzinger R., Laura P. Conformal mappings. Methods and applications. – Elsevier, 1991. – 581 p.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1962. – 709 с.
11. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. – Киев: Наукова думка, 1964. – 536 с.
12. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
13. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1986. – № 2. – С. 24–29.
14. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
15. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2017. – № 5. – С. 2–9.
16. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9, № 3. – С. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06
17. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. Об определении напряжений на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2019. – Т. 10, № 2. – С. 36–55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04
18. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. Анализ напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных равномерному давлению, и определение допустимой глубины их заложения // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2021. – № 6. – С. 15–18.
19. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of an allowable value of internal uniform pressure on the underground horizontal working contour with a trapezoidal form of its cross-section // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1928. – P. 012059.
20. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. О прочности подземных горизонтальных выработок эллиптической формы поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Construction and Geotechnics. – 2022. – Т. 13, № 1. – С. 16–33. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.02
21. Ушаков А.Н. О построении контуров подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения // Вестник Волгоградского архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2020. – Вып. 4 (81). – С. 50–64.
22. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
23. Цимбаревич П.М. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
24. Ушаков А.Н. О напряженном состоянии на контурах подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2021. – Вып. (4) 85. – С. 55–69.

25. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. 1989. – 480 с.
26. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра, 1989. – 488 с.

References

1. Khan H. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moscow, Mir, 1988, 344 p.
2. Green A.E., Zerna W. *Theoretical elasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1968, 457 p.
3. Poulos H.G., Davis E.H. *Elastic solutions for soil and rock mechanics*. New York, Wiley, 1974, 411 p.
4. Kalandiia A.I. *Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]*. Moscow, Nauka, 1973, 304 p.
5. Parton V.Z., Perlin P.I. *Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of mathematical theory of elasticity]*. Moscow, Nauka, 1981, 688 p.
6. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]*. Moscow, Nauka, 1966, 708 p.
7. Jian-ke Lu. *Complex variable methods in plane elasticity*. World Scientific, 1995, 237 p.
8. Chau K.T. *Analytical Methods in Geomechanics*. New York, CRC Press, 2012, 424 p.
9. Schinzinger R., Laura P. *Conformal mappings. Methods and applications*. Elsevier, 1991, 581 p.
10. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximated methods of higher analysis]*. Moscow, GITTL, 1962, 709 p.
11. Fil'chakov P.F. *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazhenii [Approximate methods of conformal maps]*. Kiev, Naukova Dumka, 1964, 536 p.
12. Savin G.N. *Raspredelenie napryazhenii vdol' otverstii [Distribution of stresses near holes]*. Kiev, Naukova Dumka, 1968, 888 p.
13. Tsvetkov V.K. *Opreделение form sechenii gornyykh vyrabotok s zadannymi napryazheniyami na konturakh [Determination of sections formes of mine workings with specified stresses on contours]*. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 1986, no. 2, pp. 24–29.
14. Tsvetkov V.K. *Raschet ratsional'nykh parametrov gornyykh vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]*. Moscow, Nedra, 1993, 251 p.
15. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. *Opreделение glybiny zalozheniia gorizonta'noi vyrabonki na osnove analiza napryazhennogo sostoianiia vmeshjushego massiva [Determination of the depth of the horizontal output on the basis of the analysis of the stress state of the host array]*. *Bases, foundations and soil mechanics*, 2017, no 5, pp. 2–9.
16. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. *O napryazheniiakh v konturnykh tochках odinochnyykh podzemnykh vyrabotok razlichnogo poperechnogo secheniia, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [About stresses in a contour points in a single underground mines of different cross-sections, subject to an overall uniform pressure]*. *Vestnik Permskogo natsyonalnogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2018, vol. 9, iss. 3, pp. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06.
17. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. *Ob opredelenii napryazhenij na konturakh podzemnykh gorizonta'nykh vyrabotok, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [On the determination of stresses on the contours of underground horizontal mines, subjected to an overall uniform pressure]*. *Vestnik Permskogo natsyonalnogo politekh-*

nicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura, 2019, vol. 10, iss. 2, pp. 36–55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04.

18. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Analiz napryazhennogo sostoyaniia na konturakh podzemnykh gorizontaľnykh vyrabotok, podverzhennykh ravnomernomu davleniyu, i opredelenie dopustimoy glubiny ih zalozheniia [Analysis on the stress state at the contours of underground horizontal mine workings exposed to uniform pressure and determination of the safe laying depth]. *Bases, foundations and soil mechanics*, 2021, no 6, pp. 15–18.

19. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Determination of an allowable value of internal uniform pressure on the underground horizontal working contour with a trapezoidal form of its cross-section. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1928, p. 012059.

20. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. O prochnosti podzemnykh gorizontaľnykh vyrabotok ellipticheskoi formy poperechnogo secheniia, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [The strength of underground horizontal workings of elliptical cross-section shape subjected to all-round uniform pressure]. *Construction and Geotechnics*, 2022, vol. 13, iss. 1, pp. 16–33. DOI: 10.15593/2224 -9826/2022.1.02.

21. Ushakov A.N. O postroenii konturov podzemnykh gorizontaľnykh vyrabotok razlichnykh form poperechnogo secheniia [About construction of contours of underground horizontal workings of various form of cross-section]. *Vestnik Volgogradskogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2020, iss. 4 (81), pp. 50–64.

22. Bulychev N.S. Mekhanika podzemnykh sooruzheii [Mechanics of underground structures]. Moscow, Nedra, 1989, 270 p.

23. Tsimbarevich P.M. Mekhanika gornykh porod [Mechanics of rock]. Moscow, Ugletekhizdat, 1948, 184 p.

24. Ushakov A.N. O napryazhonnom sostoyanii konturakh podzemnykh gorizontaľnykh vyrabotok razlichnykh form poperechnogo secheniia [On the stress state on the contours of underground horizontal workings of various cross-section forms]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2021, iss. 4 (85), pp. 55–69.

25. Sidorov Ju. V, Fedorjuk M.V., Shabunin M.I. Lekcii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Lectures on the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1989, 480 p.

26. Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kaspar'jan E.V. Osnovy mekhaniki gornykh porod [Fundamentals of rock mechanics]. Leningrad, Nedra, 1989, 488 p.