

Пономарев А.Б., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Анализ напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок эллиптической формы поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Construction and Geotechnics. – 2023. – Т. 14, № 2. – С. 5–21. DOI: 10.15593/2224-9826/2023.2.01

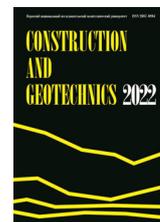
Ponomarev A.B., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Analysis of the stress state at the contours of underground horizontal workings of elliptical cross-section shape subjected to all-round uniform pressure. *Construction and Geotechnics*. 2023. Vol. 14. No. 2. Pp. 5-21. DOI: 10.15593/2224-9826/2023.2.01



CONSTRUCTION AND GEOTECHNICS

Т. 14, № 2, 2023

<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2023.2.01

УДК 624.131.522

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА КОНТУРАХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВСЕСТОРОННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

А.Б. Пономарев^{1,3}, О.А. Богомолова², А.Н. Ушаков²

¹Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

²Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

³Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 января 2023

Одобрена: 17 марта 2023

Принята к публикации:

03 июля 2023

Ключевые слова:

отображающая функция, коэффициент бокового распора, нормальные тангенциальные напряжения, подземная горизонтальная выработка, равномерное давление.

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты исследования по определению напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок, поперечное сечение которых имеет вид эллипса любого размера и формы. При изменении интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок эллиптической формы поперечного сечения, заданных значениях глубин заложения выработок, параметров эллипса и величин коэффициента бокового распора горной породы выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения. При изменении глубин заложения выработок рассматриваемой формы поперечного сечения выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения при заданных значениях величин интенсивности растягивающего равномерного давления, приложенного к точкам контуров выработок, параметров эллипса и значений коэффициента бокового распора горной породы. Приведены графические изображения эпюр нормальных тангенциальных напряжений, действующих на контурах рассматриваемых выработок. Определены диапазоны интенсивности растягивающего равномерного давления, при которых в зависимости от глубины заложения выработки, значений параметров эллипса и коэффициента бокового распора горной породы в точках контуров выработок действуют растягивающие и (или) сжимающие напряжения. Приведенные соотношения и результаты могут быть применены для вычисления значений допустимых величин всестороннего равномерного давления в точках контуров выработок и определения допустимых глубин их заложения. В качестве критерия для определения значений этих величин может быть принято условие отсутствия на контурах выработок точек, в которых нормальные тангенциальные напряжения превышают пределы прочности горной породы при растяжении и сжатии.

© ПНИПУ

© Пономарев Андрей Будимирович – доктор технических наук, профессор, e-mail: andreypab@mail.ru.

Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285.

Ушаков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: miit.vgasu@mail.ru.

Andrey B. Ponomaryov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: andreypab@mail.ru.

Oksana A. Bogomolova – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru, ORCID: 0000-0003-1163-6285.

Andrei N. Ushakov – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: miit.vgasu@mail.ru.



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

ANALYSIS OF THE STRESS STATE AT THE CONTOURS OF UNDERGROUND HORIZONTAL WORKINGS OF ELLIPTICAL CROSS-SECTION SHAPE SUBJECTED TO ALL-ROUND UNIFORM PRESSURE

A.B. Ponomarev^{1,3}, O.A. Bogomolova², A.N. Ushakov²

¹Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russian Federation

²Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

³Perm National Research Polytechnic University, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 January 2023
Approved: 17 March 2023
Accepted for publication:
03 July 2023

Keywords:

mapping function, lateral expansion coefficient, normal tangential stresses, underground horizontal production, uniform pressure.

ABSTRACT

The results of the research to determine the stress state on the contours of underground horizontal excavations, the cross-section of which has the form of an ellipse of any size and shape are presented. When changing the intensity of tensile uniform pressure applied to the points of elliptical shape cross-section excavation contours, the given values of excavation depths, ellipse parameters and rock side spreading coefficient values, the areas of the contours with tensile and compressive stresses are identified. If the depths of workings of the considered form of cross-section change, the areas where tensile and compressive stresses act at given values of the intensity of tensile uniform pressure applied to the points of working's contours, ellipse parameters and values of the coefficient of rock lateral spreading are highlighted. The graphical images of the normal tangential stresses, acting on the contours of the considered workings are given. The ranges of intensity of the tensile uniform pressure, at which, depending on the depth of excavation, values of ellipse parameters and the coefficient of rock lateral spread, tensile and (or) compressive stresses act in the points of excavation contours have been determined. The given relations and results can be applied to calculate the values of the permissible values of all-round uniform pressure in the points of the workings contours and to determine the permissible depths of their embedding. As a criterion for determining the values of these values, the condition of absence on the contours of excavations of points in which the normal tangential stresses exceed the limits of tensile and compression strength of the rock can be accepted.

© PNRPU

Одной из актуальных проблем геомеханики является задача, связанная с исследованием напряженного состояния вокруг одиночных выработок в горном или грунтовом массиве [1–6], однако особый интерес представляет задача распределения напряжений в точках контуров выработок, поскольку ее решение тесно связано с проблемой обеспечения их прочности.

Формы поперечных сечений выработок могут быть получены при помощи функций комплексного переменного, осуществляющих отображения внутренности или внешности единичного круга на бесконечные односвязные области, границами которых являются семейства кривых, имитирующих отверстия различной конфигурации. Однако эффективное построение отображающих функций часто представляет собой довольно трудную задачу. Даже если эта функция хорошо известна, она, как правило, представляется сложным аналитическим выражением, которое приводит на практике к серьезным вычислительным трудностям. Поэтому приходится отказываться от точных выражений, заменяя их более удобными выражениями из числа простых и хорошо изученных функций. К таким функциям прежде всего нужно отнести полиномы. Это обстоятельство способствовало созданию весьма удобных методов построения отображающих функций [7–10].

Задачи, связанные с исследованием напряженного состояния на контурах выработок, формы поперечных сечений которых описывают при помощи построенных для этих целей отображающих функций, в рамках модели линейно-деформируемой среды могут быть решены методами плоской теории упругости [11–15], при этом весьма эффективным является использование аппарата комплексного анализа [13–20].

Следуя В.К. Цветкову [21], рассмотрим отображающую функцию вида

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3), \quad (1)$$

где A, B, C, D – действительные числа, совершающие отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную односвязную область, границей которой является семейство простых замкнутых кривых. При помощи функции (1) был решен ряд актуальных задач геомеханики [21–24].

Рассмотрим подземную горизонтальную выработку, геометрическое строение которой определяется при помощи отображающей функции (1). Предположим, что выработка находится на достаточно большой глубине, причем по ее контуру действует всестороннее равномерное давление заданной интенсивности. Это позволяет рассматривать выработку как подземное хранилище, например газообразных углеводородов [25].

В статье [26] приведена формула для определения напряжений в точках контуров одиночных подземных горизонтальных выработок заданной формы поперечного сечения, находящихся на фиксированной глубине при условии, что контуры подвержены всестороннему растягивающему равномерному давлению. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрена задача о распределении напряжений на контуре выработки трапециевидной формы поперечного сечения; в работе [27] исследовано напряженное состояние на контуре выработки, конфигурация которой представляет собой свод с вертикальными стенками. При этом необходимо заметить, что на практике гораздо чаще встречаются выработки эллиптической и, в частности, круглой формы, поэтому задачи, связанные с изучением напряженного состояния в точках контуров выработок таких конфигураций, представляют определенный интерес.

В работе [28] приведено решение задачи о напряженном состоянии на контурах выработок, поперечное сечение которых имеет форму эллипса с фиксированным значением большой полуоси. Однако этот тип выработок не исчерпывает всего класса выработок данной конфигурации.

Целью данной статьи является исследование напряженного состояния в точках контуров выработок, поперечное сечение которых имеет вид эллипса любого размера и формы, находящихся на заданной глубине, под действием всестороннего растягивающего внутреннего равномерного давления при фиксированных значениях коэффициента бокового распора горной породы.

Следуя [26], заметим, что формула, описывающая напряженное состояние в точках контура выработки, конфигурация которого определяется при помощи отображающей функции (1), находящейся на заданной глубине, при условии всестороннего равномерного давления, приложенного к контуру, имеет вид

$$\sigma_{\theta} = -\frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V) \cos \theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} + \frac{(M - 4W) \cos 2\theta - N \cos 3\theta - R \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}, \quad (2)$$

где

$$F = (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS, \quad Q = (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S, \quad (3)$$

$$G = 2C((1 + \mu)(B + 6D) + S);$$

$$S = \frac{(1 + \mu)(A + D)B - 2(1 - \mu)A^2}{A - D};$$

$$U = \frac{AB^2}{A-D} + 4C^2 + 9D^2, \quad V = \frac{2C}{A-D} [AB + (A-D)(B+6D)], \quad (4)$$

$$W = \frac{B}{A-D} [6AD - A^2 - 3D^2];$$

$$K = A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2, \quad L = 4C(B+3D), \quad M = 2B(3D-A), \quad (5)$$

$$N = -4AC \quad R = -6AD,$$

где γ – объемный вес пород; μ – коэффициент бокового распора; H – глубина заложения выработки, p – величина равномерного давления, приложенного к контуру отверстия, причем, согласно [4], будем полагать, что при $p > 0$ контур выработки испытывает сжатие постоянной величины p , а при $p < 0$ – растяжение той же интенсивности.

Согласно [1] будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (6)$$

где R_{\max} – наибольший линейный размер сечения выработки.

Нахождение значений аргументов, в которых нормальные тангенциальные напряжения σ_θ равны нулю, сводится к решению уравнения

$$\begin{aligned} &8Rpt^4 + 4Npt^3 + 2(Q\gamma H + (4W - M - 4R)p)t^2 + \\ &+ (G\gamma H + (4V - L - 3N)p)t + (F - Q)\gamma H + \\ &+ (M - 4W + R - K + 4U)p = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$, а определение значений аргументов, в которых нормальные тангенциальные напряжения принимают экстремальные значения, сводится к решению уравнений

$$\sin \theta = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + \\ &+ 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -RQ\gamma H + (2RM - 4RW)p, \\ a_2 &= -(3/2 GR + 1/2 NQ)\gamma H + (3RL - 6RV + 3RL + MN - 2NW)p, \\ a_3 &= -(GN + 4FR)\gamma H + (8RK + 2NL - 4VN - 16RU)p, \\ a_4 &= (1/2 QL - 1/2 MG - 5/2 GR - 3FN)\gamma H + \\ &+ (5RL + 2WL + 6NK - 10RV - 2VM - 12NU)p, \\ a_5 &= (2QK - 2MF - 2GN - 3RQ)\gamma H + \\ &+ (6MR + 4LN + 8WK - 12RW - 8VN - 8MU)p, \\ a_6 &= (GK + 3/2 QL - 5/2 NQ - 3/2 MG - FL)\gamma H + \\ &+ (5MN + 2WL + 4VK - 10NW - 6VM - 4LU)p. \end{aligned} \quad (10)$$

Решением уравнения (8) на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ являются значения $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$; уравнение (9) может быть решено на этом отрезке приближенно с необходимой для практики точностью.

Полагая в отображающей функции (1)

$$A = r, B = mr, C = D = 0, \quad r > 0, \quad -1 < m \leq 0, \quad (11)$$

получим

$$z = \omega(\zeta) = ir(\zeta^{-1} + m\zeta). \quad (12)$$

Функция (12) осуществляет конформное отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием, причем окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями

$$a = r(1 - m), b = r(1 + m). \quad (13)$$

Задавая значения параметров r и m , можно получить эллипс любого размера и формы. Если $m = 0$, то эллипс обращается в окружность. В предельном случае $m \rightarrow -1$ эллипс обращается в отрезок оси Ox длины $4r$, заключенный между точками $x = \pm 2r$, при этом область обращается в бесконечную плоскость с прямолинейной щелью.

Подставляя значения коэффициентов (11) в формулы (3)–(5), а затем в формулу (2), получим

$$\sigma_\theta = -\frac{\gamma H((1 + \mu)m^2 + 2(\mu - 1)m - \mu - 1 + 2(1 - \mu)\cos 2\theta)}{m^2 + 1 - 2m \cos 2\theta} - \frac{p(1 - 3m^2 + 2m \cos 2\theta)}{m^2 + 1 - 2m \cos 2\theta}. \quad (14)$$

Тогда уравнение для нахождения аргументов, в которых нормальные тангенциальные напряжения принимают нулевые значения, имеет вид

$$4((1 - \mu)\gamma H - mp)t^2 + ((1 + \mu)m^2 + 2(\mu - 1)m + \mu - 3)\gamma H + (3m^2 + 2m - 1)p = 0, \quad (15)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$.

Подстановкой значений коэффициентов (11) в формулы (3)–(5) с учетом соотношений (10) убеждаемся, что уравнение (9) принимает вид

$$\cos \theta = 0,$$

откуда следует, что экстремальные значения нормальных тангенциальных напряжений на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ достигаются в точках

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi, \quad (16)$$

причем, как следует из (14), $\sigma_\theta(\theta_1) = \sigma_\theta(\theta_3)$.

Замечая, что

$$\sigma_{\theta}(\theta_1) = -\frac{\gamma H((1+\mu)m + 3\mu - 1) + p(3m + 1)}{m - 1}, \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta}(\theta_2) = -\frac{\gamma H((1+\mu)m + \mu - 3) + p(3m - 1)}{m + 1}, \quad (18)$$

вычислим разность значений тангенциальных нормальных напряжений в этих точках. Имеем

$$\sigma_{\theta}(\theta_1) - \sigma_{\theta}(\theta_2) = -\frac{4\gamma H((\mu + 1)m + \mu - 1) + 8mp}{m - 1}. \quad (19)$$

Соотношения (17)–(19) будут применены для определения диапазонов интенсивности растягивающего равномерного давления, при которых на контурах выработок действуют сжимающие или растягивающие напряжения при заданных значениях глубин заложения выработок, коэффициента бокового распора горной породы для любой формы эллипса, определяемой значениями $m \in (-1, 0]$.

При решении задач будем использовать два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона, которая в среднем для горных пород равна $\nu = 0,20$ [1], а второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в горном массиве, принимаемое при определении напряжений на достаточно больших глубинах [3].

Будем анализировать распределение напряжений на контурах выработок при изменении глубин их заложения H и интенсивности значений растягивающего равномерного давления p , для чего примем:

$$p_0 = 0 \text{ т/м}^2, \quad p_1 = 306 \text{ т/м}^2, \quad p_2 = 612 \text{ т/м}^2. \quad (20)$$

$$H_1 = 400 \text{ м}, \quad H_2 = 800 \text{ м}, \quad H_3 = 1000 \text{ м}. \quad (21)$$

Рассмотрим семейство эллипсов, полагая

$$m_1 = -0,8, \quad m_2 = -0,5, \quad m_3 = -0,2. \quad (22)$$

Согласно (13) нетрудно видеть, что при возрастании значений параметра $m \in (-1, 0]$ величина большой полуоси эллипса будет уменьшаться, а малой – увеличиваться, принимая при $m = 0$ равные значения (рис. 1). Рассматривая значения (22), нетрудно видеть, что большая полуось эллипса, являясь его наибольшим линейным размером, будет изменяться от $a = 1,8r$ до $a = 1,2r$.

Пусть $r = 2$ м. Тогда, применяя формулы (13) и (22), получим значения максимальных линейных размеров эллипсов:

$$R_{\max}^1 = 7,2 \text{ м}, \quad R_{\max}^2 = 6 \text{ м}, \quad R_{\max}^3 = 4,8 \text{ м}. \quad (23)$$

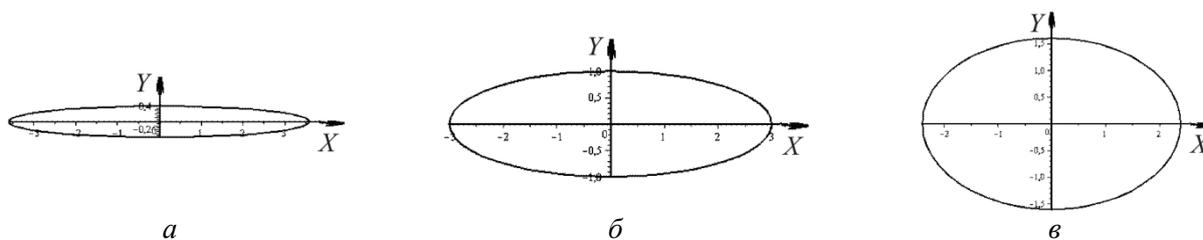


Рис. 1. Формы эллипсов при: $a - m_1 = -0,8$; $б - m_2 = -0,5$; $в - m_3 = -0,2$

Fig. 1. Shapes of ellipses at $a - m_1 = -0,8$; $б - m_2 = -0,5$; $в - m_3 = -0,2$

Тогда, согласно (6) и (23), соответственно положим

$$H^1 = 360 \text{ м}, H^2 = 300 \text{ м}, H^3 = 240 \text{ м}. \quad (24)$$

Заметим, что наибольшее значение глубины заложения выработки, принимаемое в данной работе, соответствует значению $m = -1$ и равно $H = 400$ м. Поэтому проведем исследование напряженного состояния в точках выработок, полагая в качестве глубин их заложения как значения (24), так и значение $H = 400$ м, при котором будет выполняться условие (6) для каждого из значений (22).

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$. Тогда для значений (24) имеем

$$\gamma H^1 = 900 \text{ т/м}^2, \gamma H^2 = 750 \text{ т/м}^2, \gamma H^3 = 600 \text{ т/м}^2; \quad (25)$$

для значения $H = 400$ м находим $\gamma H = 1000 \text{ т/м}^2$.

Теперь, используя приведенные выше формулы, рассмотрим задачу о распределении напряжений на контурах, имеющих поперечное сечение в виде эллипса с полуосями, определяемыми по формуле (13).

Случай $\mu_1 = 0,25$.

Подставляя в уравнение (15) значения (22) и (25) при заданных значениях интенсивности равномерного давления (20) и принятой величине коэффициента бокового распора, получим значения аргументов, при которых нормальные тангенциальные напряжения равны нулю. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения углов θ при различных значениях интенсивности давления

Table 1

Angle values θ at different values of pressure intensity

m	$p, \text{ т/м}^2$	θ_1	θ_2
-0,8	0	1,047	2,094
	306	1,023	2,119
	612	0,939	2,203
-0,5	0	0,723	2,419
	306	0,746	2,395
	612	0,797	2,344
-0,2	0	0,464	2,678
	306	0,608	2,534
	612	0,784	2,357

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (20) и параметра (22) действуют растягивающие напряжения, а именно:

при $m_1 = -0,8$

и $p_0 = 0$ т/м² имеем $\theta \in (0, 1,047) \cup (2,094, 4,189) \cup (5,236, 2\pi)$;

и $p_1 = 306$ т/м² имеем $\theta \in (0, 1,023) \cup (2,119, 4,164) \cup (5,260, 2\pi)$;

и $p_2 = 612$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,939) \cup (2,203, 4,080) \cup (5,344, 2\pi)$.

при $m_2 = -0,5$

и $p_0 = 0$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,723) \cup (2,419, 3,864) \cup (5,560, 2\pi)$;

и $p_1 = 306$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,746) \cup (2,395, 3,888) \cup (5,537, 2\pi)$;

и $p_2 = 612$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,797) \cup (2,344, 3,939) \cup (5,486, 2\pi)$;

при, $m_3 = -0,2$

и $p_0 = 0$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,464) \cup (2,678, 3,605) \cup (5,819, 2\pi)$;

и $p_1 = 306$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,608) \cup (2,534, 3,749) \cup (5,675, 2\pi)$;

и $p_2 = 612$ т/м² имеем $\theta \in (0, 0,784) \cup (2,3573, 3,926) \cup (5,499, 2\pi)$.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки эллиптической формы сечения при значении равномерного давления $p_1 = 306$ т/м² и величинах $m_1 - m_3$ в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 2.

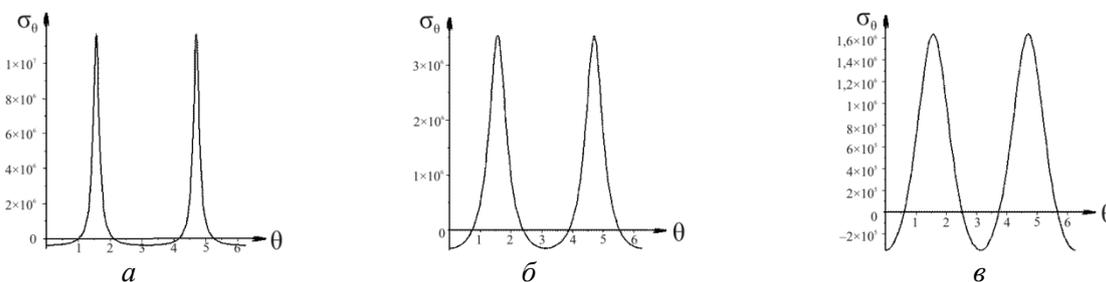


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений при:

$a - m_1 = -0,8$; $b - m_2 = -0,5$; $v - m_3 = -0,2$

Fig. 2. Plots of tangential normal stresses at $a - m_1 = -0,8$; $b - m_2 = -0,5$; $v - m_3 = -0,2$

Теперь определим величины интенсивности растягивающего давления, при которых в зависимости от значений параметра m на контурах выработок возникают сжимающие и растягивающие напряжения.

Пусть $m_1 = -0,8$. Тогда, полагая $H^1 = 360$ м и $\gamma = 2,5$ т/м³, после подстановки в формулу (19) имеем

$$\sigma_{\theta}(\theta_1) - \sigma_{\theta}(\theta_2) = -\frac{6,4(p + 984,375)}{0,36}. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что полученная разность положительна при значениях давления, превышающих $p = 984,375$ т/м²; при этом функция (14) дает минимум в точке $\theta_2 = \pi/2$.

Определим величину интенсивности давления, при которой на контуре выработки возникают лишь сжимающие напряжения. Применяя формулу (18), получаем

$$\sigma_{\theta}(\theta_2) = \frac{3,4(p + 992,647)}{0,2}. \quad (27)$$

Поскольку выражение (27) принимает положительные значения при величинах давления, меньших $p = 992,647 \text{ т/м}^2$, то интервал, при котором в точках контура действуют сжимающие напряжения при условии, что минимум функции (14) достигается в точке $\theta_2 = \pi/2$, имеет вид

$$984,375 < p < 992,647 \text{ т/м}^2. \quad (28)$$

Рассмотрим значения давления, меньшие $p = 984,375 \text{ т/м}^2$. В этом случае разность (26) будет отрицательна. Значит, минимум функции (14) достигается в точках $\theta_1 = 0$ и $\theta_3 = \pi$. Тогда по формуле (17) имеем

$$\sigma_{\theta}(\theta_1) = -\frac{1,4(p + 803,571)}{1,8}, \quad (29)$$

откуда следует, что сжимающие напряжения действуют на контуре при значении давления, большем $p = 803,571 \text{ т/м}^2$. Объединяя полученный интервал с (28), находим интервал, при котором в точках контура действуют сжимающие напряжения

$$803,571 < p < 992,647 \text{ т/м}^2. \quad (30)$$

Теперь изучим характер напряжений на интервалах, составляющих дополнение к интервалу (30). Пусть нас интересуют значения давления, при которых на контуре выработки действуют напряжения обоих знаков. Это возможно тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$0 < \frac{((1 + \mu)m^2 + 2(\mu - 1)m + \mu - 3)\gamma H + (3m^2 + 2m - 1)p}{4(mp - (1 - \mu)\gamma H)} < 1. \quad (31)$$

Подставляя данные задачи в неравенство (31) и решая его, получим $p < 803,571$ и $p > 992,647 \text{ т/м}^2$.

Итак, проведенный анализ показывает, что при значениях интенсивности давления (30) в точках рассматриваемой выработки действует сжимающее напряжение; в противном случае в точках контура действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Участков выработки, на которых действуют лишь растягивающие напряжения при рассматриваемом значении параметра $m_1 = -0,8$, нет.

Для значений $m_2 = -0,5$ и $m_3 = -0,2$ аналогичное исследование дает следующие результаты:

– при $m_2 = -0,5$ и значениях давления, изменяющегося в диапазоне $1012,500 < p < 1312,500 \text{ т/м}^2$, в точках контура действуют растягивающие напряжения; при остальных значениях интенсивности давления в них будут действовать как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_3 = -0,2$ и величинах давления, больших $p = 1125,000 \text{ т/м}^2$, в точках контура действуют растягивающие напряжения; при остальных значениях давления на контуре действуют сжимающие и растягивающие напряжения.

Если $m = 0$, т.е. в случае круглой выработки при значениях давления, больших $p = 1375,000 \text{ т/м}^2$, в точках контура действуют растягивающие напряжения; в противном случае в точках контура действуют сжимающие и растягивающие напряжения.

Теперь положим для всех значений (22) глубину заложения выработок, равную $H = 400 \text{ м}$. Результаты вычислений аргументов, при которых нормальные тангенциальные напряжения обращаются в нуль, представлены в табл. 2.

Используя данные, приведенные в табл. 2, выделим участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (20) и параметра (22) действуют растягивающие напряжения. Итак,

при $m_1 = -0,8$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 1,047) \cup (2,094, 4,189) \cup (5,236, 2\pi)$;

и $p_1 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 1,026) \cup (2,115, 4,168) \cup (5,257, 2\pi)$;

и $p_2 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,969) \cup (2,173, 4,110) \cup (5,314, 2\pi)$;

при $m_2 = -0,5$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,723) \cup (2,419, 3,864) \cup (5,561, 2\pi)$;

и $p_1 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,739) \cup (2,403, 3,880) \cup (5,544, 2\pi)$;

и $p_2 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,766) \cup (2,376, 3,907) \cup (5,517, 2\pi)$;

при, $m_3 = -0,2$

и $p_0 = 0 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,464) \cup (2,678, 3,605) \cup (5,819, 2\pi)$;

и $p_1 = 306 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,548) \cup (2,594, 3,689) \cup (5,735, 2\pi)$;

и $p_2 = 612 \text{ т/м}^2$ имеем $\theta \in (0, 0,639) \cup (2,502, 3,781) \cup (5,644, 2\pi)$.

Таблица 2

Значения углов θ при различных значениях интенсивности давления

Table 2

Angle values θ at different values of pressure intensity

m	$p, \text{ т/м}^2$	θ_1	θ_2
-0,8	0	1,047	2,094
	306	1,026	2,115
	612	0,969	2,173
-0,5	0	0,723	2,419
	306	0,739	2,403
	612	0,766	2,376
-0,2	0	0,464	2,678
	306	0,548	2,594
	612	0,639	2,502

Теперь определим величины интенсивности растягивающего давления, при которых в зависимости от значений параметра m на контурах выработок возникают сжимающие и растягивающие напряжения.

Полагая $H = 400$ м и $\gamma = 2,5$ т/м³, получаем:

– при $m_1 = -0,8$ в диапазоне $892,857 < p < 1102,941$ т/м² действуют сжимающие напряжения; при остальных значениях давления на контуре действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_2 = -0,5$ в диапазоне $1350,000 < p < 1750,000$ т/м² действуют растягивающие напряжения; при остальных значениях давления на контуре действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_3 = -0,2$, полагая значения давления $p > 1875,000$ т/м², на контуре действуют растягивающие напряжения; при остальных значениях давления на контуре действуют напряжения обоих знаков;

– при $m = 0$ и значении интенсивности давления $p > 2750,000$ т/м² на контуре действуют лишь растягивающие напряжения; при других значениях давления на контуре возникают как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Теперь допустим, что выработки, форма которых определяется значениями (22), находятся на заданных глубинах (21). Вычислим, используя уравнение (15), значения аргументов, при которых нормальные тангенциальные напряжения принимают нулевые значения, полагая величину интенсивности растягивающего давления $p = 102$ т/м².

Результаты проведенных вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения углов θ при различных значениях глубины заложения

Table 3

Angle values θ at different values depths

m	$H, \text{ м}$	θ_1	θ_2
-0,8	400	1,042	2,100
	800	1,045	2,097
	1000	1,045	2,097
-0,5	400	0,727	2,414
	800	0,725	2,417
	1000	0,725	2,417
-0,2	400	0,491	2,651
	800	0,477	2,664
	1000	0,475	2,667

Выделим участки контуров, на которых при заданных значениях глубин заложения (21) и параметра (22) действуют растягивающие напряжения.

Имеем:

$$m_1 = -0,8$$

$$\text{и } H_1 = 400 \text{ м имеем } \theta \in (0, 1,042) \cup (2,100, 4,183) \cup (5,241, 2\pi),$$

$$\text{и } H_2 = 800 \text{ м имеем } \theta \in (0, 1,045) \cup (2,097, 4,186) \cup (5,238, 2\pi),$$

$$\text{и } H_3 = 1000 \text{ м имеем } \theta \in (0, 1,045) \cup (2,097, 4,186) \cup (5,238, 2\pi);$$

$$m_2 = -0,5$$

и $H_1 = 400$ м имеем $\theta \in (0, 0,727) \cup (2,414, 3,869) \cup (5,556, 2\pi)$,

и $H_2 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,725) \cup (2,417, 3,866) \cup (5,558, 2\pi)$,

и $H_3 = 1000$ м имеем $\theta \in (0, 0,725) \cup (2,417, 3,866) \cup (5,558, 2\pi)$;

$$m_3 = -0,2$$

и $H_1 = 400$ м имеем $\theta \in (0, 0,491) \cup (2,651, 3,632) \cup (5,792, 2\pi)$,

и $H_2 = 800$ м имеем $\theta \in (0, 0,477) \cup (2,664, 3,619) \cup (5,806, 2\pi)$,

и $H_3 = 1000$ м имеем $\theta \in (0, 0,475) \cup (2,667, 3,616) \cup (5,808, 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Проведенное исследование показывает, что при увеличении глубин заложения выработок в пределах одних и тех же значений параметра m существенной перестройки эпюр нормальных тангенциальных напряжений не происходит. В качестве примера построим эпюры этих напряжений при глубине заложения выработки $H_2 = 800$ м и значениях (22). Результат приведен на рис. 3.

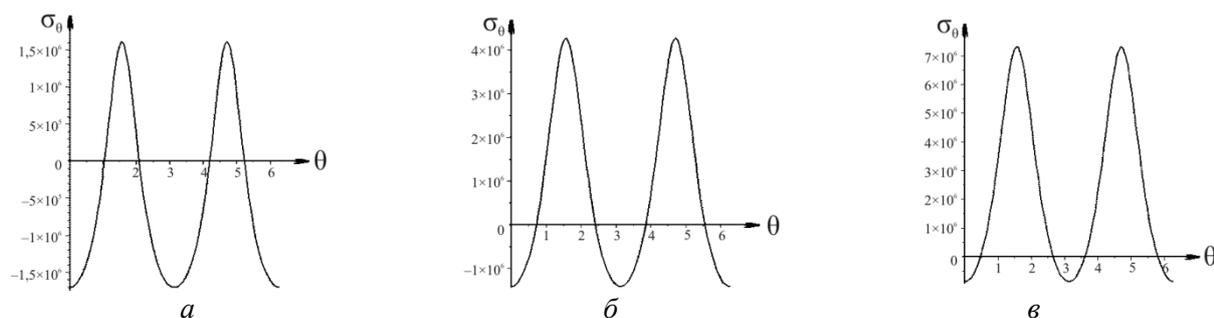


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений
 при $H_2 = 800$ м и $a - m_1 = -0,8$; $b - m_2 = -0,5$; $v - m_3 = -0,2$

Fig. 3. Plots of tangential normal stresses at $H_2 = 800$ м
 and $a - m_1 = -0,8$; $b - m_2 = -0,5$; $v - m_3 = -0,2$

Случай $\mu_2 = 1$.

Подстановкой данного значения коэффициента бокового распора в формулы (14), (15), (17)–(19), находим

$$\sigma_\theta = -\frac{2\gamma H(m^2 - 1) + p(3m^2 - 2m \cos 2\theta - 1)}{m^2 + 1 - 2m \cos 2\theta}, \quad (32)$$

$$4mpt^2 - 2(m^2 - 1)\gamma H - (3m^2 + 2m - 1)p = 0, \quad (33)$$

$$\sigma_\theta(\theta_2) = -\frac{2\gamma H(m - 1) + p(3m - 1)}{m + 1}, \quad (34)$$

$$\sigma_\theta(\theta_2) = -\frac{2\gamma H(m - 1) + p(3m - 1)}{m + 1}, \quad (35)$$

$$\sigma_{\theta}(\theta_1) - \sigma_{\theta}(\theta_2) = -\frac{8m(\gamma H + p)}{m^2 - 1}. \quad (36)$$

Приведем результаты исследования, проведенного при помощи формул (32)–(36), для двух рассмотренных выше случаев глубин заложения выработок. С учетом значений глубин заложения (24) имеем:

– при $m_1 = -0,8$ и интенсивности растягивающего давления $p < 952,941 \text{ т/м}^2$ на контуре действуют лишь сжимающие напряжения; при остальных значениях давления на нем действуют сжимающие и растягивающие напряжения;

– при $m_2 = -0,5$ и $p < 900,000 \text{ т/м}^2$ в точках контура действуют лишь сжимающие напряжения; при остальных значениях давления в них действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_3 = -0,2$ и $p < 900,000 \text{ т/м}^2$ на контуре действуют сжимающие напряжения; при остальных значениях давления на нем действуют напряжения обоих знаков;

– при $m = 0$ и значении интенсивности растягивающего давления $p < 1000,000 \text{ т/м}^2$ на контуре действуют лишь сжимающие напряжения; при других значениях давления на нем возникают растягивающие напряжения.

Теперь приведем результаты исследования, принимая глубину заложения равной $H = 400 \text{ м}$. Итак,

– при $m_1 = -0,8$ и $p < 1058,823 \text{ т/м}^2$ в точках контура действуют лишь сжимающие напряжения; при остальных значениях давления в них действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_2 = -0,5$ и $p < 1200,000 \text{ т/м}^2$ на контуре действуют лишь сжимающие напряжения; при остальных значениях давления на нем действуют как сжимающие, так и растягивающие напряжения;

– при $m_3 = -0,2$ и $p < 1500,000 \text{ т/м}^2$ на контуре действуют сжимающие напряжения; при остальных значениях давления на нем действуют напряжения обоих знаков;

– при $m = 0$ и значении интенсивности растягивающего давления $p < 2000,000 \text{ т/м}^2$ в точках контура действуют лишь сжимающие напряжения; при других значениях давления в них возникают растягивающие напряжения.

Теперь допустим, что выработки, форма которых определяется значениями (22), находятся на заданных глубинах (21), при интенсивности растягивающего давления в точках контуров выработок, равного $p = 102 \text{ т/м}^2$. Тогда нетрудно убедиться в том, что ни при одном из значений параметра (22) уравнение (15) корней не имеет. При этом во всех точках контуров при принятых глубинах заложения и величине интенсивности давления будут сжимающие напряжения.

Выводы

1. В работе приведены формулы, на основании которых рассмотрена задача о распределении напряжений в точках контуров, поперечное сечение которых имеет форму эллипса заданного размера и формы.

2. При изменении величины растягивающего равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок эллиптической формы поперечного сечения, выделены участки контуров, на которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения при заданных значениях параметров эллипса, величины интенсивности растягивающего равномерного давления и коэффициента бокового распора горной породы.

3. Проведен анализ напряженного состояния, позволивший определить диапазоны интенсивности всестороннего растягивающего равномерного давления, при которых в зависимости от глубин заложения выработок, параметров эллипса и значений коэффициента бокового распора в точках их контуров действуют сжимающие и (или) растягивающие напряжения.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации.

Библиографический список

1. Цимбаревич П.М. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
2. Глушко В.Т., Гавеля С.П. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород. – М.: Недра, 1986. – 221 с.
3. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра. 1989. – 488 с.
4. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
5. Aysen A. Soil mechanics. – Balkana Publ., Rotterdam, Netherlands, 2002. – 459 p.
6. Smith G.N., Smith I.G.N. Elements of soil mechanics. – Blackwell Science, 1998. – 494 p.
7. Канторович Л. В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1962. – 709 с.
8. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: справ. рук. – Киев: Наукова думка, 1964. – 536 с.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
10. Фильчакова В.П. Конформные отображения областей специального типа: справ. рук. – Киев: Наукова Думка, 1972. – 252 с.
11. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
12. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1968. – 457 p.
13. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 228 с.
14. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
17. Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: Высшая школа, 1981. – 317 с.

18. Brown J.W., Churchill R.V. Complex variables and applications. – New York: McGraw – Hill, 2009. – 482 p.
19. Jian-ke Lu. Complex variable methods in plane elasticity. – World Scientific, 1995. – 237 p.
20. Schinzinger R., Laura P. Conformal mappings. Methods and applications. – Elsevier, 1991. – 581 p.
21. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах // Физико-технические разработки полезных ископаемых. – 1986. – № 2. – С. 24–29.
22. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
23. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Об определении напряжений на контурах подземных горизонтальных, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2019. – Т.10, № 2. – С. 36–55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04
24. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Анализ напряженного состояния на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных равномерному давлению, и определение допустимой глубины их заложения // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2021. – № 6. – С. 15–18.
25. Нагорный В.П., Глоба В.М. Подземные хранилища углеводородов. – Киев, 2014. – 287 с.
26. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9, № 3. – С. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06
27. Ушаков А.Н. О распределении напряжений на контурах подземных горизонтальных выработок различных форм поперечного сечения // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2021. – Вып. 1 (82). – С. 101–117.
28. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н., Богомолова О.А. О прочности подземных горизонтальных выработок эллиптической формы поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // *Construction and Geotechnics*. – 2022. – Т. 13, № 1. – С. 16–33. DOI: 10.15593/2224-9826/2022.1.02

References

1. Tsimbarevich P.M. Mekhanika gornyx porod [Mechanics of rock]. Moscow, Ugletekhizdat, 1948, 184 p.
2. Glushko V.T., Gaveliia S.P. Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massivov gornyx porod [Assessment of the stress-strain state of rock massifs]. Moscow, Nedra, 1986, 221 p.
3. Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kaspar'jan E.V. Osnovy mekhaniki gornyx porod [Fundamentals of Rock Mechanics]. Leningrad, Nedra, 1989, 488 p.
4. Bulychev N.S. Mekhanika podzemnykh sooruzheii [Mechanics of underground structures]. Moscow, Nedra, 1989, 270 p.

5. Aysen A. Soil mechanics. Balkana Publ., Rotterdam, Netherlands, 2002, 459 p.
6. Smith G.N., Smith I.G.N. Elements of soil mechanics. Blackwell Science, 1998, 494 p.
7. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximated methods of higher analysis]. Moscow, GITTL, 1962, 709 p.
8. Fil'chakov P. F. Priblizhennyye metody konformnykh otobrazhenii [Approximate methods of conformal maps]. Kiev, Naukova Dumka, 1964, 536 p.
9. Savin G.N. Raspredelenie napryazhenii vdol' otverstii [Distribution of stresses near holes]. Kiev, Naukova Dumka, 1968, 888 p.
10. Fil'chakova V.P. Konformnyye otobrazheniya oblastey spetsialnogo tipa [Conformal mappings of special type areas]. Kiev, Naukova Dumka, 1972, 252 p.
11. Parton V.Z., Perlin P.I. Metody matematicheskoi teorii uprugosti [Methods of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1981, 688 p.
12. Green A. E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1968, 457 p.
13. Kosmodamianskii A.S. Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami i vystupami [Flat problem of elasticity theory for plates with holes, notches and protrusions]. Kiev, Vishcha shkola, 1975, 228 p.
14. Kalandiia A.I. Matematicheskie metody dvumernoi uprugosti [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow, Nauka, 1973, 304 p.
15. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 708 p.
16. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funcii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1987, 688 p.
17. Tsitovich N.A., Ter-Martirosyan Z.G. Osnovy prikladnoy geomekhaniki v stroitel'stve [Fundamentals of applied geomechanics in construction]. Moscow, Vysshaya shkola, 1981, 317 p.
18. Brown J.W., Churchill R.V. Complex variables and applications. New York, McGraw – Hill, 2009, 482 p.
19. Jian-ke Lu Complex variable methods in plane elasticity. World Scientific, 1995, 237 p.
20. Schinzinger R., Laura P. Conformal mappings. Methods and applications. Elsevier, 1991, 581 p.
21. Tsvetkov V.K. Opredelenie form sechenii gornykh vyrabotok s zadannymi napryazheniyami na konturakh [Determination of sections formes of mine workings with specified stresses on contours]. *Fiziko-tekhicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh*, 1986, no.2, pp. 24–29.
22. Tsvetkov V. K. Raschet ratsional'nykh parametrov gornykh vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow, Nedra, 1993, 251 p.
23. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Ob opredelenii napryazhenij na konturakh podzemnykh gorizontallykh vyrabotok, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [On the determination of stresses on the contours of underground horizontal mines, subjected to an overall uniform pressure]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2019, vol.10, iss. 2, pp. 36–55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04
24. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Analiz napryazhennogo sostoyaniia na konturakh podzemnykh gorizontallykh vyrabotok, podverzhennykh ravnomernomu davleniyu, i opredelenie dopustimoy glubiny ih zalozheniia [Analysis on the stress state at the

contours of underground horizontal mine workings exposed to uniform pressure and determination of the safe laying depth]. *Bases, foundations and soil mechanics*, 2021, no 6, pp. 15 – 18.

25. Nagorny V.P., Globa V.M. Podzemnye khranilishcha uglevodorodov [Underground hydrocarbon storages]. Kiev, 2014, 287 p.

26. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. O napryazheniiakh v konturnykh tochkakh odinochnykh podzemnykh vyrabotok razlichnogo poperechnogo secheniia, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [About stresses in a contour points in a single underground mines of different cross-sections, subject to an overall uniform pressure]. *Vestnik Permskogo natsyonalnogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2018, vol. 9, no. 3, pp. 54 – 70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

27. Ushakov A.N. O raspredelenii napryazhenii na konturakh podzemnykh gorizonta'nykh vyrabotok razlichnykh form poperechnogo secheniia [On the distribution of stresses on the contours of underground horizontal excavations of different cross-sectional forms]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhirekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2021, iss. 1 (82), pp. 101 – 117.

28. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. O prochnosti podzemnykh gorizonta'nykh vyrabotok ellipticheskoi formy poperechnogo secheniia, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniyu [The strength of underground horizontal workings of elliptical cross-section shape subjected to all-round uniform pressure]. *Construction and Geotechnics*, 2022, vol. 13, iss. 1, pp. 16 – 33. DOI:10.15593/2224 -9826/2022.1.02