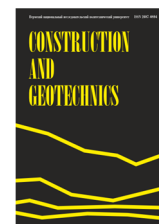




CONSTRUCTION AND GEOTECHNICS

Т. 16, № 3, 2025

<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2025.3.05

УДК 624.154.074.435:519.873

СВАИ С ВЕРХНИМ ОБРАТНЫМ КОНУСОМ, ОПТИМИЗИРОВАННЫЕ ПО ОБЪЕМУ

О.В. Третьякова^{1,2}

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Российская Федерация

²Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова, Пермь, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 27 января 2025
Одобрена: 29 августа 2025
Принята к публикации:
10 сентября 2025

Ключевые слова:

свайный фундамент, опасный
природный процесс, морозное
пучение, структурная
оптимизация,
множители Лагранжа.

АННОТАЦИЯ

Свайные фундаменты часто подвергаются воздействию опасных природных процессов, таких как морозное пучение грунта. Это приводит к увеличению материалоемкости фундаментов. Данное исследование направлено на структурную оптимизацию свай на основе рационального использования материала. Объектом исследования является свая с обратным конусом, которая эффективна в условиях морозного пучения грунта. Цель исследования – минимизировать объем свай путем оптимизации ее геометрических параметров. Объем свай является целевой функцией. Оптимизируемые параметры – радиус верхнего основания и высота конуса свай. В задаче оптимизации учитывались два ограничения: по несущей способности свай на вертикальную нагрузку в талом грунте и по устойчивости свай в мерзлом грунте. Для решения задачи использовался метод множителей Лагранжа. Результатом исследования является оптимальная конфигурация свай с минимально возможным объемом при заданных ограничениях.

© Третьякова Ольга Викторовна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: olga_wsw@mail.ru

Tretiakova Olga Viktorovna – Ph. D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: olga_wsw@mail.ru



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

VOLUME-OPTIMISED REVERSE TAPER PILES

O.V. Tretiakova^{1,2}

¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

²Perm State Agro-Technological University named after Academician D.N. Pryanishnikov,
Perm, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 January 2025
Approved: 29 August 2025
Accepted for publication:
10 September 2025

Keywords:

frost heave, Lagrange multipliers,
natural hazards, pile foundation,
structural optimization.

ABSTRACT

Pile foundations are often subject to natural hazards such as frost heave, which increases the material consumption while pile production. Therefore, research will focus on structural optimization of piles based on reasonable material use. The object of the research is a pile with a reverse-taper. This pile is highly effective in frost heave conditions. The purpose of this study is to minimize the pile volume by optimizing its geometrical parameters; the pile volume is the objective function. The optimized parameters are the radius of the upper base and the height of the taper. We consider two constraints: the vertical bearing capacity of the pile in thawed soil and stability in frozen soil. We use the method of Lagrange multipliers to solve the problem. The result of the research is the optimal pile configuration with the minimum possible volume under the given constraints.

Введение

Оптимизация в строительстве становится все более актуальной. А.Г. Тамразян и А.В. Алексейцев показали обзор современных методов оптимизации строительных конструкций [1]. Целевая функция оптимизации направлена на напряженно-деформированное состояние, распределение материала, объем и вес конструкций, надежность и стоимость. Оптимальное распределение материала, отвечающее действующим усилиям, характеризуется формой и размерами конструкций, *позволяет снизить их объем и вес*. А. Myśliński [2] представил такое решение для тела в контакте с жестким основанием. D. Villalba et al. [3] использовали оптимизацию для получения конструкций малого веса. Z.A. Arama [4], Л.Н. Хрусталева [5] и другие рассмотрели стоимость как целевую функцию оптимизации фундаментов.

Поиск оптимальных конструкций свайных фундаментов имеет большое практическое значение, так как они важны для уникальных и технически сложных зданий, а также для применения в сложных геологических условиях. К. Abushama et al. [6] провели оптимизацию железобетонных свай по критерию воздействия на окружающую среду. L. Jie et al. [7] оптимизировали сваи с помощью нейронной сети. В.О. Ефимов и соавт. [8] добились оптимального распределения нагрузки между ростверком и сваями. Y. Xie и S. Chi [9] предложили метод оптимизации длины свай. В. Asefa et al. [10] оптимизировали свайно-плитный фундамент. I. Cavalcante et al. [11] провели оптимизацию топологии свайного фундамента. Все эти исследования имеют большую ценность. Однако в них не рассматривается оптимизация конфигурации свай в условиях опасных природных процессов, таких как морозное пучение грунта.

Автором статьи разработаны цилиндрическая [12] и призматическая [13] сваи с уклоном поверхности. Такая конфигурация сваи позволила создать дополнительные положительные силы в мерзлом слое, которые нейтрализуют негативное воздействие морозного пучения грунта. Вместе с тем эффективная работа обеспечивается при разной геометрии свай, что требует оптимизации. Целью данного исследования является минимизация объе-

ма сваи с обратным конусом путем оптимизации ее геометрических параметров. Для этого были назначены ограничения и формализована задача структурной оптимизации сваи.

1. Сваи с обратным конусом

На сваю в промерзающем грунте действует вертикальная сжимающая нагрузка и силы морозного пучения. Выше границы промерзания находится мерзлая зона, где возникают негативные силы морозного пучения, вызывающие подъем сваи. Ниже границы промерзания расположена талая зона, где действуют позитивные силы, препятствующие подъему сваи. Мы обеспечили условия для формирования удерживающих позитивных сил в верхней части сваи, где традиционно действуют негативные силы морозного пучения путем создания уклона поверхности. Уклон достигается путем проектирования верхней части сваи в виде усеченного конуса [12] или усеченной пирамиды [13]. В результате такая конфигурация сваи позволила снизить касательные силы пучения без увеличения длины. Данный подход позволяет не только прогнозировать, но и улучшать работу сваи в пучинистом грунте путем изменения ее геометрии.

2. Методы

Целью данного исследования является получение минимального объема сваи с обратным конусом за счет рационального использования материала, которое основано на распределении действующих сил и характеризуется конфигурацией сваи. Для достижения цели необходимо обеспечить уравнивание сил морозного пучения минимально возможным сечением с оптимальными геометрическими параметрами. Целевой функцией является объем сваи, а оптимизируемыми параметрами – высота и радиус верхнего основания усеченного конуса. Ограничения задачи служат устойчивость сваи в мерзлом грунте и несущая способность в талом грунте. Мы сформулировали функцию Лагранжа, а также записали условия стационарности, дополняющей нежесткости и неотрицательности. Далее исходили из того, что критические точки отыскиваются из области допустимых решений и удовлетворяют необходимым условиям стационарности с множителями Лагранжа, а решение задачи находится среди критических точек и соответствует минимальному значению целевой функции объема сваи в допустимой области, образованной заданными ограничениями.

2.1. Целевая функция

Целевой функцией оптимизации является уравнение объема сваи с верхним обратным конусом, которое записано в следующем виде:

$$V_{\text{св}} = V_{\text{к}} + V_{\text{ц}} = (1/3)\pi h_{\text{к}}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \pi r_1^2 h_{\text{ц}}, \quad (1)$$

где $V_{\text{к}}$, $V_{\text{ц}}$ – объем конусной и цилиндрической части сваи соответственно; r_1 и r_2 – радиус нижнего и верхнего основания конуса сваи соответственно; $h_{\text{к}}$ – высота конуса, подверженного действию морозного пучения; $h_{\text{ц}}$ – высота цилиндрической части сваи.

Геометрические параметры сваи, координаты характерных сечений и силовые факторы показаны на рис. 1.

Высоту цилиндрической части сваи запишем как

$$h_{\text{ц}} = h_{\text{св}} - h_{\text{к}}. \quad (2)$$

После подстановки (2) и преобразования уравнение (1) примет вид

$$V_{cb} = -(2/3)\pi r_1^2 h_k + (1/3)\pi r_1 h_k r_2 + (1/3)\pi h_k r_2^2 + \pi r_1^2 h_{cb}. \quad (3)$$

Если ввести переменные

$$r_2 = x_1, h_k = x_2, \quad (4)$$

уравнение (3) становится следующим

$$V_{cb} = -(2/3)\pi r_1^2 x_2 + (1/3)\pi r_1 x_2 x_1 + (1/3)\pi x_2 x_1^2 + \pi r_1^2 h_{cb}. \quad (5)$$

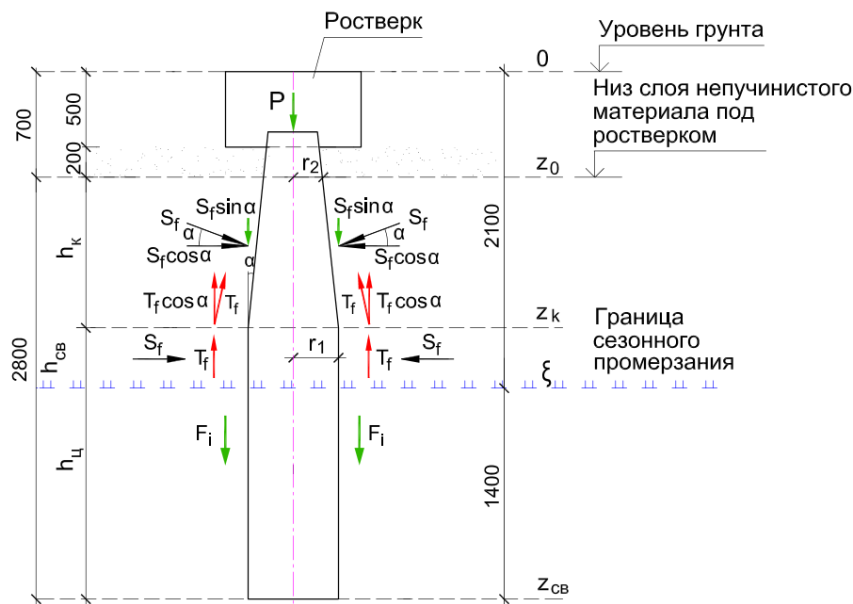


Рис. 1. Расчетно-конструктивная схема сваи с верхним обратным конусом: T_f – касательные силы морозного пучения грунта; S_f – силы морозного пучения, нормальные к боковой поверхности сваи; $S_f \sin \alpha$ – составляющая нормальных сил морозного пучения в пределах конусного участка сваи, противодействующая касательным силам морозного пучения грунта; F_i – силы трения грунта на боковой поверхности сваи в талой зоне; P – сумма внешней постоянной нагрузки и собственного веса сваи; радиус нижнего основания r_1 конуса 0,3 м

Fig. 1. Design and construction scheme of a pile with an upper reverse cone: T_f – tangential forces of frost heaving of the soil; S_f – frost heaving forces normal to the side surface of the pile; $S_f \sin \alpha$ – component of the normal frost heaving forces within the cone section of the pile, counteracting the tangential forces of frost heaving of the soil; F_i – friction forces of the soil on the side surface of the pile in the melt zone; P is the sum of the external constant load and the pile's own weight; the radius of the lower base r_1 of the cone is 0.3 m

Слагаемые, не содержащие переменных, а также коэффициенты при переменных в уравнении (5) обозначим как $k_1 - k_3$.

$$k_1 = (2/3)\pi r_1^2 = 2,0933r_1^2 = 0,188 \text{ м}^2, \quad (6)$$

$$k_2 = (1/3)\pi r_1 = 1,0466r_1 = 0,314 \text{ м}, \quad (7)$$

$$k_3 = \pi r_1^2 h_{cb} = 0,791 \text{ м}^3. \quad (8)$$

Уравнение (5) с учетом (6)–(8) станет более кратким в буквенных (9) и числовых значениях (10).

$$V_{cb} = -k_1 x_2 + k_2 x_1 x_2 + 1,0466 x_1^2 x_2 + k_3, \quad (9)$$

$$V_{cb} = -0,188 x_2 + 0,314 x_1 x_2 + 1,0466 x_1^2 x_2 + 0,791. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) отражают целевую функцию оптимизации, т.е. объем сваи. Переменные, учитываемые в задаче оптимизации, не являются случайными. Они зависят от устойчивости сваи в мерзлом грунте и несущей способности в оттаявшем грунте. Эти два ограничения учитываются при решении задачи.

2.2. Ограничение по устойчивости сваи в мерзлом грунте

Устойчивость сваи в мерзлом грунте связана с явлением морозного пучения и обеспечивается равновесием действующих сил. Уравнение равновесия сил, действующих на сваю, с учетом обозначений на рис. 1 имеет вид:

$$-P - S_f \sin \alpha + T_f \cos \alpha + T_f - F_i = 0. \quad (11)$$

Уравнение равновесия также может быть записано в форме квадратного уравнения относительно угла конуса сваи. Автор данной статьи получил такое уравнение (12) в работе [12]. Параметры уравнения (12) приведены на рис. 1.

$$0,5\sigma_f(z_k - z_0)^2(\sin \alpha)^2 + [-r_1\sigma_f(z_k - z_0) - 0,5\tau_f(z_k - z_0)^2](\sin \alpha) + \\ + r_1[\tau_f(z_k - z_0) + \tau_f(\xi - z_k) - f(z_{cs} - \xi)] - 0,5\pi^{-1}P = 0, \quad (12)$$

где τ_f – касательные напряжения морозного пучения (100 мПа); σ_f – нормальные напряжения морозного пучения (200 мПа); P – постоянная нагрузка на сваю (сумма внешней нагрузки и собственного веса сваи 90 кН); f – силы трения на боковой поверхности сваи в талой зоне для однородного грунта (26 кПа).

Если мы выразим
$$z_k = h_k + z_0 \quad (13)$$

и учтем, что при малых углах $\sin \alpha \approx \tan \alpha$

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = (r_1 - r_2)/h_k, \quad (14)$$

то уравнение равновесия сваи (12) станет следующим:

$$0,5\sigma_f(h_k + z_0 - z_0)^2\left(\frac{r_1 - r_2}{h_k}\right)^2 + [-r_1\sigma_f(h_k + z_0 - z_0) - 0,5\tau_f(h_k + z_0 - z_0)^2]\left(\frac{r_1 - r_2}{h_k}\right) + \\ + r_1[\tau_f(h_k + z_0 - z_0) + \tau_f(\xi - h_k - z_0) - f(z_{cs} - \xi)] - 0,5\pi^{-1}P = 0. \quad (15)$$

После преобразования уравнение (15) запишется:

$$\sigma_f r_2^2 - \tau_f h_k r_1 + \tau_f h_k r_2 + [2r_1(\tau_f \xi - \tau_f z_0 - f z_{cs} + f \xi) - \sigma_f r_1^2 - \pi^{-1}P] = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) с учетом переменных (4) примет вид:

$$\sigma_f x_1^2 + \tau_f x_1 x_2 - \tau_f r_1 x_2 + [2r_1(\tau_f \xi - \tau_f z_0 - f z_{cs} + f \xi) - \sigma_f r_1^2 - \pi^{-1}P] = 0. \quad (17)$$

Если обозначить слагаемые, не содержащие переменных, и коэффициенты при переменных, как $k_4 - k_7$

$$k_4 = \sigma_f = 200 \text{ кПа}, \quad (18)$$

$$k_5 = \tau_f = 100 \text{ кПа}, \quad (19)$$

$$k_6 = \tau_f r_1 = 30 \text{ кН/м}, \quad (20)$$

$$k_7 = 2r_1(\tau_f \xi - \tau_f z_0 - f z_{\text{св}} + f \xi) - \sigma_f r_1^2 - \pi^{-1} P = 15,498 \text{ кН}, \quad (21)$$

то уравнение (17) примет краткую форму в буквенных (22) и числовых значениях (23).

$$k_4 x_1^2 + k_5 x_1 x_2 - k_6 x_2 + k_7 = 0, \quad (22)$$

$$200x_1^2 + 100x_2 x_1 - 30x_2 + 15,498 = 0. \quad (23)$$

Уравнения (22) и (23) являются функцией ограничения по устойчивости сваи в мерзлом грунте.

2.3. Ограничение по несущей способности сваи в талом грунте

Если несущая способность сваи в талом грунте определена расчетом и составляет

$$F_d = \gamma_c (\gamma_{R,R} RA + \gamma_{R,f} u \sum f_i h_{u,i}), \quad (24)$$

то допускаемая нагрузка на сваю с коэффициентом надежности 1,4 запишется:

$$F = \frac{F_d}{1,4} = \frac{\gamma_c (\gamma_{R,R} RA + \gamma_{R,f} u \sum f_i h_{u,i})}{1,4}, \quad (25)$$

где A – площадь поперечного сечения цилиндрической части сваи; u – периметр цилиндрической части сваи; f_i – силы трения на боковой поверхности цилиндрической части сваи в талом грунте; $h_{u,i}$ – толщина слоя грунта в пределах цилиндрической части сваи; γ_c – коэффициент условий работы сваи (1); $\gamma_{R,R}$ – коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи (1); $\gamma_{R,f}$ – коэффициент условий работы грунта на боковой поверхности сваи (0,7); R – сопротивление грунта под нижним концом в талой зоне (450 кПа).

С учетом (2), а также выражений для площади поперечного сечения и периметра сваи уравнение (25) переписывается:

$$F = (\gamma_c \gamma_{R,R} R \pi r_1^2 + \gamma_c \gamma_{R,f} 2\pi r_1 (h_{\text{св}} - h_{\kappa}) f) / 1,4. \quad (26)$$

После преобразования уравнение (26) примет вид:

$$F = 2,243 \gamma_c \gamma_{R,R} R r_1^2 + 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f h_{\text{св}} - 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f h_{\kappa}. \quad (27)$$

Уравнение (27) с учетом переменных (4) запишется:

$$F = 2,243 \gamma_c \gamma_{R,R} R r_1^2 + 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f h_{\text{св}} - 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f x_2. \quad (28)$$

Если обозначить слагаемые уравнения (28), не содержащие переменных, и коэффициенты при переменных как k_8 и k_9 :

$$k_8 = 2,243 \gamma_c \gamma_{R,R} R r_1^2 + 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f h_{\text{св}} = 159,424 \text{ кН}, \quad (29)$$

$$k_9 = 4,486 \gamma_c \gamma_{R,f} r_1 f = 24,494 \text{ кН/м}, \quad (30)$$

то уравнение (28) примет вид:
$$F = k_8 - k_9 x_2. \quad (31)$$

Вертикальная сжимающая нагрузка N не должна превышать допускаемую нагрузку на сваю F :

$$F \geq N. \quad (32)$$

Следовательно, можно записать неравенство:

$$k_8 - k_9 x_2 \geq N. \quad (33)$$

Перепишем уравнение (33) в буквенных (34) и числовых (35) значениях.

$$k_8 - k_9 x_2 - N \geq 0. \quad (34)$$

$$159,424 - 24,494 x_2 - 130 \geq 0. \quad (35)$$

Уравнения (34) и (35) являются функцией ограничения по несущей способности сваи на вертикальную сжимающую нагрузку в талом грунте.

2.4. Формализация и решение задачи структурной оптимизации

Формализация задачи включает целевую функцию и ограничения. Объем сваи является целевой функцией и записан выше в виде уравнения (9).

$$V_{\text{св}} = f_0(\bar{x}), \text{ где } \bar{x} = (x_1, x_2).$$

Переменными оптимизируемыми параметрами являются радиус верхнего основания конуса сваи $r_2 = x_1$ и высота конуса сваи, работающего в мерзлом грунте $h_k = x_2$. Считаем, что часть конуса высотой h_k , расположенная ниже слоя непучинистого грунта под рост-верком, подвержена влиянию мерзлого грунта, как показано на рис. 1. Ограничениями в задаче являются устойчивость сваи в мерзлом грунте $f_1(x)$ в виде уравнения (22) и несущая способность в талом грунте $f_2(x)$ в виде (34):

$$f_1(\bar{x}) = 0, \quad f_2(\bar{x}) \geq 0.$$

Математически такая задача может быть записана следующим образом. Найти

$$\min f_0(\bar{x}) = -k_1 x_2 + k_2 x_1 x_2 + 1,0466 x_1^2 x_2 + k_3$$

при условиях:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= k_4 x_1^2 + k_5 x_1 x_2 - k_6 x_2 + k_7 = 0, \\ f_2(\bar{x}) &= k_8 - k_9 x_2 - N \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Функция Лагранжа для данной задачи с ограничениями-неравенствами будут иметь вид

$$\Phi(\bar{x}, \lambda) = f_0(\bar{x}) + \lambda_1 f_1(\bar{x}) + \lambda_2 f_2(\bar{x}). \quad (35)$$

С учетом (9), (22) и (34) функция Лагранжа (35) запишется:

$$\Phi(\bar{x}, \lambda) = (-k_1 x_2 + k_2 x_1 x_2 + 1,0466 x_1^2 x_2 + k_3) + \lambda_1 (k_4 x_1^2 + k_5 x_1 x_2 - k_6 x_2 + k_7) + \lambda_2 (k_8 - k_9 x_2 - N). \quad (36)$$

Необходимые условия стационарности для нахождения критических точек, в которых целевая функция может принимать минимальное значение, имеют вид частных производ-

ных функции Лагранжа (36), приравненных к нулю. Таким образом, условия стационарности будут иметь следующий вид:

$$d\Phi/dx_1 = \Phi_{x_1(x_2, \lambda_1, \lambda_2 = \text{const})} = k_2x_2 + 2,0932x_2x_1 + 2\lambda_1k_4x_1 + \lambda_1k_5x_2 = 0, \quad (37)$$

$$d\Phi/dx_2 = \Phi_{x_2(x_1, \lambda_1, \lambda_2 = \text{const})} = 1,0466x_1^2 + k_2x_1 + \lambda_1k_5x_1 - \lambda_1k_6 - \lambda_2k_9 - k_1 = 0, \quad (38)$$

$$d\Phi/d\lambda_1 = \Phi_{\lambda_1(x_1, x_2, \lambda_2 = \text{const})} = k_4x_1^2 + k_5x_1x_2 - k_6x_2 + k_7 = 0. \quad (39)$$

Условие дополняющей нежесткости, где функция $f_2(\bar{x})$ должна быть равна нулю

$$\lambda_2(k_8 - k_9x_2 - N) = 0, \quad (40)$$

и условие неотрицательности: $\lambda_2 \geq 0$ (41)

введены в задачу.

Решение задачи находится среди критических точек и соответствует минимальному значению целевой функции в допустимой области, образованной заданными ограничениями.

Пусть $\lambda_2=0$, $\lambda_1 \neq 0$. Уравнения (37) и (38) примут вид (42) и (43) соответственно.

$$k_2x_2 + 2,0932x_2x_1 = \lambda_1(-2k_4x_1 - k_5x_2), \quad (42)$$

$$1,0466x_1^2 + k_2x_1 - k_1 = \lambda_1(-k_5x_1 + k_6). \quad (43)$$

После деления (42) на (43) имеем:

$$\frac{k_2x_2 + 2,0932x_2x_1}{1,0466x_1^2 + k_2x_1 - k_1} = \frac{-2k_4x_1 - k_5x_2}{-k_5x_1 + k_6}. \quad (44)$$

Если в уравнении (44) заменить множители k_i их числовыми значениями с учетом выражений (6), (7), (18)–(20), то получим выражение для переменной x_2 :

$$x_2 = (-418,64x_1^3 - 125,6x_1^2 + 75,36x_1)/(-104,66x_1^2 + 62,796x_1 - 9,42). \quad (45)$$

Третье условие стационарности (39) после подстановки (45) станет уравнением четвертой степени относительно x_1

$$62796x_1^4 - 12559,2x_1^3 - 7797,979x_1^2 + 1287,588x_1 + 145,991 = 0. \quad (46)$$

и в более краткой форме запишется как (47):

$$x_1^4 - 0,2x_1^3 - 0,124x_1^2 + 0,0205x_1 + 0,0023248 = 0. \quad (47)$$

Уравнение (47) имеет два действительных отрицательных корня и два комплексных корня: $x_{1,1}=-0,08$, $x_{1,2}=-0,32$, и $x_{1,3}=0,3+0,01i$, $x_{1,4}=0,3-0,01i$. Переменная x_2 из уравнения (45) при переменной x_1 , равной действительной части комплексных корней, принимает нулевое значение. Переменная x_1 , равная модулю комплексных корней 0,31 м, не имеет физического смысла, так как превышает максимально возможное значение $x_1=0,3$ м. Поэтому полученные корни не являются решением задачи.

Теперь подключим к решению задачи ограничение по несущей способности сваи в талом грунте, превращенное в равенство. При $\lambda_2 \neq 0$ из условия дополняющей нежесткости (40) переменная x_2 составит:

$$x_2 = (k_8 - N)/k_9. \quad (48)$$

С учетом значений выражений (29), (30) и величины нагрузки $N=130\text{кН}$ получим значение переменной $x_2=1,2$ м. То есть из условия несущей способности в талом грунте (34) переменная x_2 (высота конуса сваи) должна быть не более 1,2 м.

Третье уравнение из условий стационарности после подстановки значения $x_2=1,2$ м и значений выражений (18)–(21) примет вид квадратного уравнения относительно x_1 .

$$200x_1^2 + 120x_1 - 20,502 = 0. \quad (49)$$

Уравнение (49) имеет два вещественных корня: $x_1=0,139$ и $x_1=-0,739$ м. По физическому смыслу корень уравнения является $x_1=0,139$ м. Целевая функция (9) после подстановки переменных $x_1=0,139$ м и $x_2=1,2$ м, а также значений выражений (6)–(8), составит $0,642 \text{ м}^3$, что и будет решением.

Таким образом, условие $\lambda_2=0$ не принесло решений задачи. Решение получено при условии $\lambda_2 \neq 0$ с учетом ограничения по несущей способности сваи в талом грунте и третьего уравнения стационарности.

3. Результаты

3.1. Аналитическое решение задачи структурной оптимизации

Аналитическое решение задачи оптимизации конструкции сваи с верхним обратным конусом получено из условия ограничения по несущей способности в талом грунте (34) и третьего уравнения стационарности (39). Оптимизируемые параметры сваи – радиус верхнего основания усеченного конуса (x_1) и высота конуса сваи (x_2). Значения параметров $x_1=0,139$ м и $x_2=1,2$ м получены в результате решения (34) и (39) и удовлетворяют ограничению по устойчивости сваи в мерзлом грунте (23):

$$200x_1^2 + 100x_2x_1 - 30x_2 + 15,498 = 0.$$

Полученное решение также удовлетворяет ограничению по несущей способности сваи на вертикальную нагрузку в талом грунте (35):

$$159.424 - 24.494 \cdot x_2 - 130 \geq 0.$$

Третье условие стационарности (39) также выполняется при $x_1=0,139$ м и $x_2=1,2$ м. Поэтому полученные значения переменных и соответствующее им значение целевой функции являются решением задачи.

3.2. Графическое решение задачи структурной оптимизации

Графическое решение задачи представлено на рис. 2.

Область допустимых значений переменной x_1 и переменной x_2 обозначена в пределах следующих границ: максимального значения переменной $x_2=1,2$ м из условия ограничения по несущей способности сваи в талом грунте и максимального значения переменной $x_1=0,3$ м, которое не может превышать радиус цилиндрической части сваи.

Графики функций ограничения по устойчивости сваи в мерзлом грунте и несущей способности сваи в талом грунте показаны на рис. 2. Для построения первого графика значения переменной x_1 заданы из допустимой области, ограниченной радиусом цилиндри-

ческой части сваи, а значения переменной x_2 получены из уравнения ограничения по устойчивости сваи в мерзлом грунте (23):

$$x_2 = (-200x_1^2 - 15,498)/(100x_1 - 30). \quad (50)$$

На графике видно, что высота конуса сваи x_2 увеличивается вместе с радиусом верхнего основания конуса x_1 . Это объясняется снижением разгружающего влияния конуса при увеличении радиуса верхнего основания (уменьшении угла конуса). Для компенсации этого увеличивается высота конуса. Под разгружающим влиянием конуса понимается частичная нейтрализация негативных касательных сил морозного пучения, вызывающих подъем сваи, за счет удерживающей составляющей нормальных сил пучения на наклонной поверхности сваи. Чем больше угол наклона поверхности конуса, тем больше величина этой удерживающей составляющей.

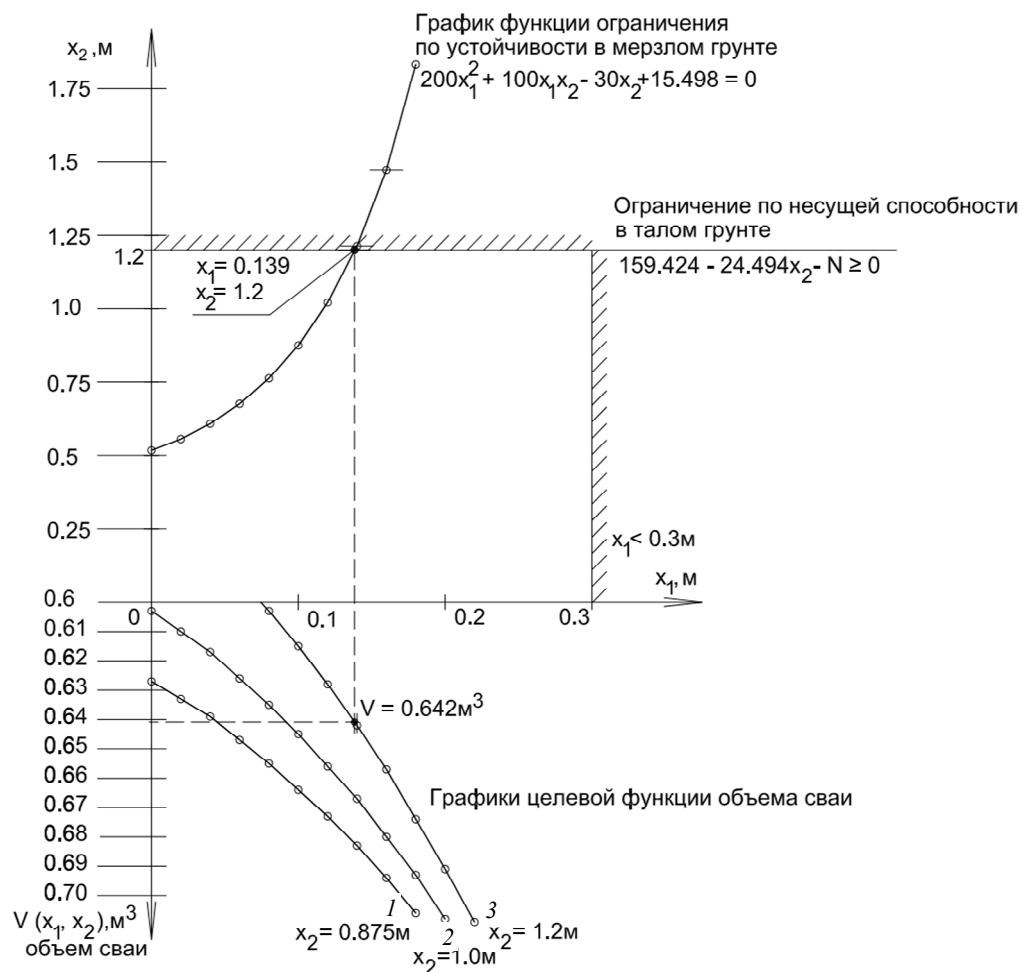


Рис. 2. Графическое решение задачи оптимизации

Fig. 2. Graphical solution of the optimization problem

Графики целевой функции объема сваи построены в нижней части рис. 2 в виде семейства кривых 1–3. Уравнения этих кривых (51)–(53) записаны на основе уравнений (9)–(10) относительно переменной x_1 . Переменная x_2 в каждом уравнении (51)–(53) имеет постоянное значение 0,875; 1,0 и 1,2 м соответственно.

$$V_{св1} = -0,165 + 0,275x_1 + 0,916x_1^2 + 0,791, \quad (51)$$

$$V_{св2} = -0,188 + 0,314x_1 + 1,0466x_1^2 + 0,791, \quad (52)$$

$$V_{св3} = -0,226 + 0,377x_1 + 1,256x_1^2 + 0,791. \quad (53)$$

Значение целевой функции, соответствующее точке с координатами $x_1=0,139$ м и $x_2=0,12$ м, на пересечении графиков ограничений является минимальным при заданных условиях. Координаты этой точки и соответствующее им значение целевой функции $0,642 \text{ м}^3$ приняты за решение задачи. Здесь радиус верхнего основания конуса (x_1) принимает максимальное значение в допустимой области, что дает возможность разместить арматурные элементы свай.

4. Обсуждение

Актуальность работы – это первый вопрос обсуждения. Опасный природный процесс морозного пучения грунта является причиной аварий зданий и сооружений. Предупредить повреждение дешевле, чем восстанавливать разрушенные здания. Ранее мы предложили сваи с уклоном поверхности в качестве превентивного мероприятия для снижения влияния морозного пучения. Важно, что срок службы свай соответствует сроку службы сооружения, что нельзя сказать о засыпках, обмазках и других мерах. Эффективность свай с уклоном поверхности при морозном пучении обсуждали В.Ф. Жуков [14], А.Д. Набережный [15], Юшков [16], Л. Домащук [17], Х. Huang, Y. Sheng [18]. Однако автор данной статьи пришел к выводу, что эффективная работа таких свай обеспечивается разными геометрическими параметрами, что привело к структурной оптимизации свай. Автор исходил из того, что целевой функцией является объем свай, а напряжения морозного пучения, связанные с грунтовыми и климатическими условиями, накладывают ограничения на конфигурацию свай в задаче оптимизации.

Теоретическая значимость исследования заключается в решении задачи оптимизации с использованием авторского квадратичного уравнения равновесия сил, действующих на сваю, в составе математической модели работы свай в пучинистом грунте. Автор использовал указанное уравнение равновесия сил относительно угла конуса свай в качестве функции ограничения в задаче оптимизации. Уравнение обеспечивает системный подход к решению задачи и отражает работу свай в пучинистом грунте с учетом комплекса факторов.

Что касается практической значимости результатов исследования, то проведенная в данной работе оптимизация свай позволила найти оптимальный вариант ее геометрии с минимальным объемом. Это приводит к снижению затрат на материалы и работы уже на стадии проектирования.

Заключение

Эффективность свай с уклоном поверхности в условиях морозного пучения обоснована во многих исследованиях. Однако автор пришел к выводу, что эффективная работа таких свай обеспечивается несколькими вариантами геометрических параметров, что требует структурной оптимизации свай. По результатам исследования сделаны следующие выводы.

1. Математическая формализация задачи оптимизации основывается на системном подходе к работе свай в условиях многофакторного процесса морозного пучения грунта. Системный подход обеспечивается авторским уравнением равновесия сил относительно

угла конуса сваи, которое является ограничением в задаче и учитывает все необходимые факторы. Это геометрические параметры сваи, переменность сечения конуса, положение границы промерзания, величины и соотношение сил морозного пучения грунта.

2. Аналитическое решение задачи оптимизации с использованием функции Лагранжа позволило получить оптимальные радиус и высоту конуса сваи, обеспечивающие ее минимальный объем при заданных ограничениях. Пример решения задачи рассмотрен в данной статье.

3. Графическое решение показало, что оптимальные значения радиуса и высоты конуса сваи находятся на границе области допустимых значений и соответствуют минимальному значению целевой функции.

Проведенные исследования наглядно показывают приемлемый метод структурной оптимизации сваи с верхним обратным конусом, обеспечивающей ее минимальный объем в условиях морозного пучения грунта. Направлением дальнейших исследований является решение задачи оптимизации сваи по критерию стоимости с учетом риск-ориентированного подхода.

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации.

Библиографический список

1. Тамразян, А.Г. Обзор современных методов оптимизации несущих систем зданий и сооружений / А.Г. Тамразян // Вестник МГСУ [Ежемесячный журнал по строительству и архитектуре]. – 2020. – №15(1). – С. 12–30. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.1.12-30
2. Myśliński, A. Topology optimization of quasistatic contact problems / A. Myśliński // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. – 2012. – № 22(2). – P. 269–280. DOI: 10.2478/v10006-012-0020-y
3. Topology optimization of structures considering minimum weight and stress constraints by using the Overweight Approach / D. Villalba [et. al] // Engineering Structures. – 2022. – №273. – P. 115071. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115071
4. The usage of the harmony search algorithm for the optimal design problem of reinforced concrete retaining walls / Z.A. Arama [et. al] // Applied Sciences (Switzerland). – 2021. – № 11(3). – P. 1–28. DOI: 10.3390/app11031343
5. Khroustalev, L.N. Long-term air temperature change and stability of the designed structures in the permafrost zone / L.N. Khroustalev, A.V. Medvedev, G.P. Pustovoit // Earth's Cryosphere. – 2000. – Т. IV(3). – P. 35–41.
6. Embodied carbon optimisation of concrete pile foundations and comparison of the performance of different pile geometries / K. Abushama [et. al] // Engineering Structures. – 2024. – Vol. 310(May). – P. 118109. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.118109.
7. Predicting friction capacity of driven piles using new combinations of neural networks and metaheuristic optimization algorithms / L. Jie [et. al] // Case Studies in Construction Materials. – 2023. – Vol. 19(July). – P. e02464. DOI: 10.1016/j.cscm.2023.e02464
8. Statistical modelling of impacts on a pile-raft foundation / V.O. Efimov [et. al] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 481(1). – P. 012012. DOI: 10.1088/1757-899X/481/1/012012

9. Xie, Y. Optimization method of reducing the differential settlements of piled raft foundations based on pile-to-pile interaction theory / Y. Xie, S. Chi // *Advances in Civil Engineering*. – 2020. – P. 1521876. DOI:10.1155/2020/1521876
10. Pile configuration optimization on the design of combined piled raft foundations / B. Asefa [et. al] // *Modeling Earth Systems and Environment*. – 2022. – Vol. 8(3). – P. 3461–3472. DOI: 10.1007/s40808-021-01318-x
11. Influence of foundation flexibility on the topology optimization of piled structures / I. Cavalcante [et. al] // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2022. – Vol. 46(4). – P. 659–673. DOI: 10.1002/nag.3315
12. Tretyakova, O.V. Modeling a reverse taper pile for frost heave conditions / O.V. Tretyakova // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1928(1). – P. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/1928/1/012045
13. Tretyakova, O.V. Prismatic face slope piles operating under frost heaving / O.V. Tretyakova // *Magazine of Civil Engineering*. – 2023. – Vol. 120(4). DOI: 10.34910/MCE.120.6
14. Zhukov, V.F. Conference on design and construction of pile foundations in permafrost soils / V.F. Zhukov // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. – 1970. – Vol. 7(3). – P. 213–215. DOI: 10.1007/BF01704636
15. Набережный, А.Д. Экспериментальные исследования моделей свай трения в мерзлых грунтах и методы повышения их несущей способности / А.Д. Набережный // *Промышленное и гражданское строительство*. – 2016. – № 8. – С. 70–74.
16. Юшков, Б.С. Экспериментальные и теоретические основы расчета конического свайного фундамента, устанавливаемого в грунтах с морозным пучением / Б.С. Юшков. – Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2015. – 311 с.
17. Domaschuk, L. Frost heave resistance of pipe piles with expanded bases / L. Domaschuk // *Proceedings of the International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium*. – 1984. – Vol. 3. – P. 58–63.
18. Experimental study on the anti-frost jacking ability of belled pile under unidirectional freezing condition / X. Huang [и др.] // *Advanced Engineering Science*. – 2021. – Vol. 53(1). – P. 122–131. DOI: 10.15961/j.jsuese.201901193

References

1. Tamrazyan A.G. Review of modern optimization methods for bearing systems of buildings and structures. *Vestnik MGSU*, 2020, no. 15(1), pp. 12–30. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.1.12-30.
2. Myśliński A. Topology optimization of quasistatic contact problems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2012, vol. 22(2), pp. 269–280. DOI: 10.2478/v10006-012-0020-y.
3. Villalba D., París J., Couceiro I., Colominas I., Navarrina F. Topology optimization of structures considering minimum weight and stress constraints by using the Overweight Approach. *Engineering Structures*, 2022, vol. 273, pp. 115071. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115071.
4. Arama Z.A., Kayabekir A.E., Bekdaş G., Kim S., Geem Z.W. The usage of the harmony search algorithm for the optimal design problem of reinforced concrete retaining walls. *Applied Sciences (Switzerland)*, 2021, vol. 11(3), pp. 1–28. DOI:10.3390/app11031343.

5. Khroustalev L.N., Medvedev A.V., Pustovoit G.P. Long-term air temperature change and stability of the designed structures in the permafrost zone. *Earth's Cryosphere*, 2000, vol. IV(3), pp. 35–41.
6. Abushama K., Hawkins W., Pelecanos L., Ibell T. Embodied carbon optimisation of concrete pile foundations and comparison of the performance of different pile geometries. *Engineering Structures*, 2024, vol. 310(May), pp. 118109. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.118109.
7. Jie, L., Sahraeian, P., Zykova, K.I., Mirahmadi, M., Nehdi, M.L. Predicting friction capacity of driven piles using new combinations of neural networks and metaheuristic optimization algorithms. *Case Studies in Construction Materials*, 2023, vol. 19(July), pp. e02464. DOI: 10.1016/j.cscm.2023.e02464.
8. Efimov V.O., Osokin A.I., Kondrat'eva L.N., Stepanova, N.R. Statistical modelling of impacts on a pile-raft foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 481(1), pp. 012012. DOI:10.1088/1757-899X/481/1/012012.
9. Xie Y., Chi S. Optimization method of reducing the differential settlements of piled raft foundations based on pile-to-pile interaction theory. *Advances in Civil Engineering*, 2020, pp. 1521876. DOI:10.1155/2020/1521876.
10. Asefa B., Assefa E., Pantelidis L., Sachpazis C. Pile configuration optimization on the design of combined piled raft foundations. *Modeling Earth Systems and Environment*, 2022, vol. 8(3), pp. 3461–3472. DOI:10.1007/s40808-021-01318-x.
11. Cavalcante I., Tavares E., Picelli R., Labaki J. Influence of foundation flexibility on the topology optimization of piled structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2022, vol. 46(4), pp. 659–673. DOI:10.1002/nag.3315.
12. Tretiakova O.V. Modeling a reverse taper pile for frost heave conditions. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1928(1), p. 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/1928/1/012045.
13. Tretiakova O.V. Prismatic face slope piles operating under frost heaving. *Magazine of Civil Engineering*, 2023, vol. 120(4). DOI:10.34910/MCE.120.6.
14. Zhukov V.F. Conference on design and construction of pile foundations in permafrost soils. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1970, vol. 7(3), pp. 213–215. DOI: 10.1007/BF01704636.
15. Naberezhnyi A.D. Èksperimental'nye issledovaniia modelei visiachikh svaï v merzlykh gruntakh i metody povysheniia ikh nesushchei sposobnosti [Experimental studies of friction pile models in frozen soils and methods for increasing their bearing capacity]. *Industrial and Civil Engineering*, 2016, vol. (8), pp. 70–74.
16. Yushkov B.S. Experimental and theoretical basics for the calculation of biconical pile foundation that install in frost heave soils. Perm, Permskiy natsionalnyy issledovatel'skiy politekhnicheskii universitet, 2015, 311 p.
17. Domaschuk L. Frost heave resistance of pipe piles with expanded bases. Proceedings of the *International Offshore Mechanics and Arctic Engineering Symposium*, 1984, vol. 3, pp. 58–63.
18. Huang X., Sheng Y., Huang L., Peng E., Cao W., Zhang X., He B. Experimental study on the anti-frost jacking ability of belled pile under unidirectional freezing condition. *Gongcheng Kexue Yu Jishu. Advanced Engineering Science*, 2021, vol. 53(1), pp. 122–131. DOI: 10.15961/j.jsuese.201901193.