

Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Об определении напряжений на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2019. – Т. 10, № 2. – С. 36–55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04

Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. On the determination of stresses on the contours of underground horizontal mines, subject to an overall uniform pressure. *Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture*. 2019. Vol. 10. No. 2. Pp. 36-55. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.1.04



**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА**
Т. 10, № 2, 2019
**PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2019.2.04

УДК 624.131

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТУРАХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВСЕСТОРОННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.Н. Ушаков

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 22 ноября 2018
Принята: 25 февраля 2019
Опубликована: 28 июня 2019

Ключевые слова:

отображающая функция, горизонтальная выработка, подземное хранилище углеводородов, напряженное состояние, равномерное давление, глубина заложения выработки.

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты исследования по определению напряженного состояния на контурах подземных выработок, поперечное сечение которых имеет вид трапеции, треугольника, прямоугольника, ромба, астроида и эллипса. Исследована прочность подземных выработок трапециевидной и эллиптической форм поперечного сечения при заданных значениях равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок. Проведен анализ напряженного состояния в точках контуров подземных горных выработок. В качестве отображающей функции используется функция комплексного переменного, представляющая собой полином третьей степени. Исследовано напряженное состояние на границе подземной горизонтальной выработки, имеющей наперед заданную форму, в зависимости от величины численного значения давления, действующего по этой границе с заранее заданной величиной коэффициента бокового распора. Приведены графические изображения эпюр напряжений, действующих на контурах выработок.

© ПНИПУ

© **Богомолов Александр Николаевич** – доктор технических наук, профессор, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.
Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.
Ушаков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, профессор, e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru.

Alexander N. Bogomolov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.
Oksana A. Bogomolova – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.
Andrei N. Ushakov – Ph.D. in Technical Sciences, Professor, e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru.

ON THE DETERMINATION OF STRESSES ON THE CONTOURS OF UNDERGROUND HORIZONTAL MINES, SUBJECT TO AN OVERALL UNIFORM PRESSURE

A.N. Bogomolov, O.A. Bogomolova, A.N. Ushakov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 22 November 2018

Accepted: 25 February 2019

Published: 28 June 2019

Keywords:

mapping function, horizontal production, underground storage of hydrocarbons, stress state, uniform pressure, depth of production.

ABSTRACT

The paper presents the results of a study to determine the stress state on the contours of underground workings, the cross section of which has the form of a trapezium, a triangle, a rectangle, a rhombus, astroids and an ellipse. The strength of underground workings of trapezoidal and elliptical cross-sectional shapes was studied for given values of uniform pressure applied at the points of the outlines of the workings. The analysis of the stress state at the points of the contours of underground mine workings has been carried out. As a mapping function, a complex variable function is used, which is a third degree polynomial. The stress state at the boundary of the underground horizontal excavation, which has a predetermined shape, is investigated depending on the value of the numerical pressure value acting along this boundary with a predetermined value of the lateral distribution coefficient. Graphic representations of stress diagrams acting on the contours of the workings are given.

© PNRPU

Хорошо известно, что одной из важнейших задач геомеханики является задача об определении напряженного состояния горных пород вокруг одиночных выработок [1–4] в упругом изотропном массиве, при этом изучение вопросов, связанных с распределением напряжений в точках контуров выработок, представляет особый интерес, поскольку решение этой проблемы тесно связано с проблемой их прочности.

Конфигурации поперечных сечений выработок при решении плоской задачи можно получить при помощи функций комплексного переменного, осуществляющих отображение одной из канонических областей (внутренность или внешность единичного круга либо верхняя или нижняя полуплоскость) на исследуемую область. Однако построение таких функций является довольно сложной задачей, поскольку, с одной стороны, отображения, осуществляемые ими, должны быть конформными, с другой – эти функции должны иметь достаточно простой, удобный для вычислений вид, т.е. состоять из хорошо изученных функций. Этому требованию, безусловно, соответствуют полиномы. Вопросам построения отображающих функций посвящена обширная литература [5–10].

Целью данной работы является анализ напряженного состояния в точках контуров подземных горных выработок заданных размеров и форм поперечного сечения при условии действия на них равномерного всестороннего давления.

В данной работе в качестве отображающей функции используется функция комплексного переменного, предложенная В.К. Цветковым [11], представляющая собой полином третьей степени, при помощи которой автором работы решен ряд актуальных задач горной механики [12].

В работах [13, 14] в связи с задачей об определении допустимой глубины заложения подземной горизонтальной выработки отображающая функция В.К. Цветкова была детально исследована авторами данной статьи. С использованием полученных соотношений и методики построения контуров, имеющих различные формы поперечного сечения и на-

перед заданные размеры, нами построены и приведены ниже поперечные сечения выработок, имеющих форму трапеции, треугольника, прямоугольника, ромба и эллипса с размерами, которые могут быть заранее заданы.

Предположим, что данные подземные выработки расположены на достаточно большой глубине H , причем по контуру выработок действует всестороннее равномерное давление интенсивности p . Это позволяет рассматривать горную выработку как подземное хранилище, например, углеводородов, а соответствующую задачу сформулировать как задачу о распределении напряжений на контуре подземных хранилищ произвольного сечения.

Рассмотрим бесконечную односвязную область, границей которой является семейство простых замкнутых кривых. Следуя [11, 12], функцию, отображающую эту область на внутренность единичного круга, примем в виде

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3), \quad (1)$$

где A, B, C, D – действительные числа.

Полагая в выражении (1) $\zeta = e^{i\theta}$ и отделяя вещественную часть от мнимой, получим уравнения контуров отверстий в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (A - B) \sin \theta - C \sin 2\theta - D \sin 3\theta, \\ y(\theta) &= (A + B) \cos \theta + C \cos 2\theta + D \cos 3\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $0 < \theta \leq 2\pi$.

Основываясь на методике построения контуров сечений различных конфигураций и приведенных в работах [13, 14] соотношениях, вычислим коэффициенты отображающей функции (1), совершающей конформные отображения внутренности единичного круга на бесконечные односвязные области, границами которых являются кривые заданных размеров и конфигураций. Примеры отверстий, для которых будут рассмотрены задачи, приведены на рис. 1. Заметим, что все отверстия, кроме астроида, имеют заданные размеры 5×4 .

Рассмотрим подземную выработку неограниченной длины и сечения, форма которого определяется при помощи отображающей функции (1) и задается параметрическими уравнениями (2). Пусть контур этой выработки подвержен равномерному давлению величины p . Тогда напряженное состояние в горном массиве, ослабленном выработкой, имеет вид

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = p,$$

где p – постоянная величина, причем будем полагать [1], что при $p > 0$ контур выработки испытывает сжатие постоянной величины p , а при $p < 0$ – растяжение той же интенсивности.

Формула, описывающая напряженное состояние на контуре выработки сечения, форма которого определяется при помощи отображающей функции (1), при условии равномерного давления заданной интенсивности p в точках контура имеет вид [15]

$$\sigma_\theta = - \frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V) \cos \theta + (M - 4W) \cos 2\theta - N \cos 3\theta - R \cos 4\theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}, \quad (3)$$

где

$$F = (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS; \quad Q = (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S; \quad (4)$$

$$G = 2C((1+\mu)(B+6D)+S);$$

$$S = \frac{(1+\mu)(A+D)B - 2(1-\mu)A^2}{A-D};$$

$$U = \frac{AB^2}{A-D} + 4C^2 + 9D^2; \quad V = \frac{2C}{A-D}[AB + (A-D)(B+6D)]; \quad (5)$$

$$W = \frac{B}{A-D}[6AD - A^2 - 3D^2],$$

$$K = A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2, \quad L = 4C(B+3D), \quad M = 2B(3D-A), \quad N = -4AC, \quad R = -6AD, \quad (6)$$

где γ – объемный вес пород; μ – коэффициент бокового распора; H – глубина заложения выработки; p – величина равномерного давления, приложенного к контуру отверстия.

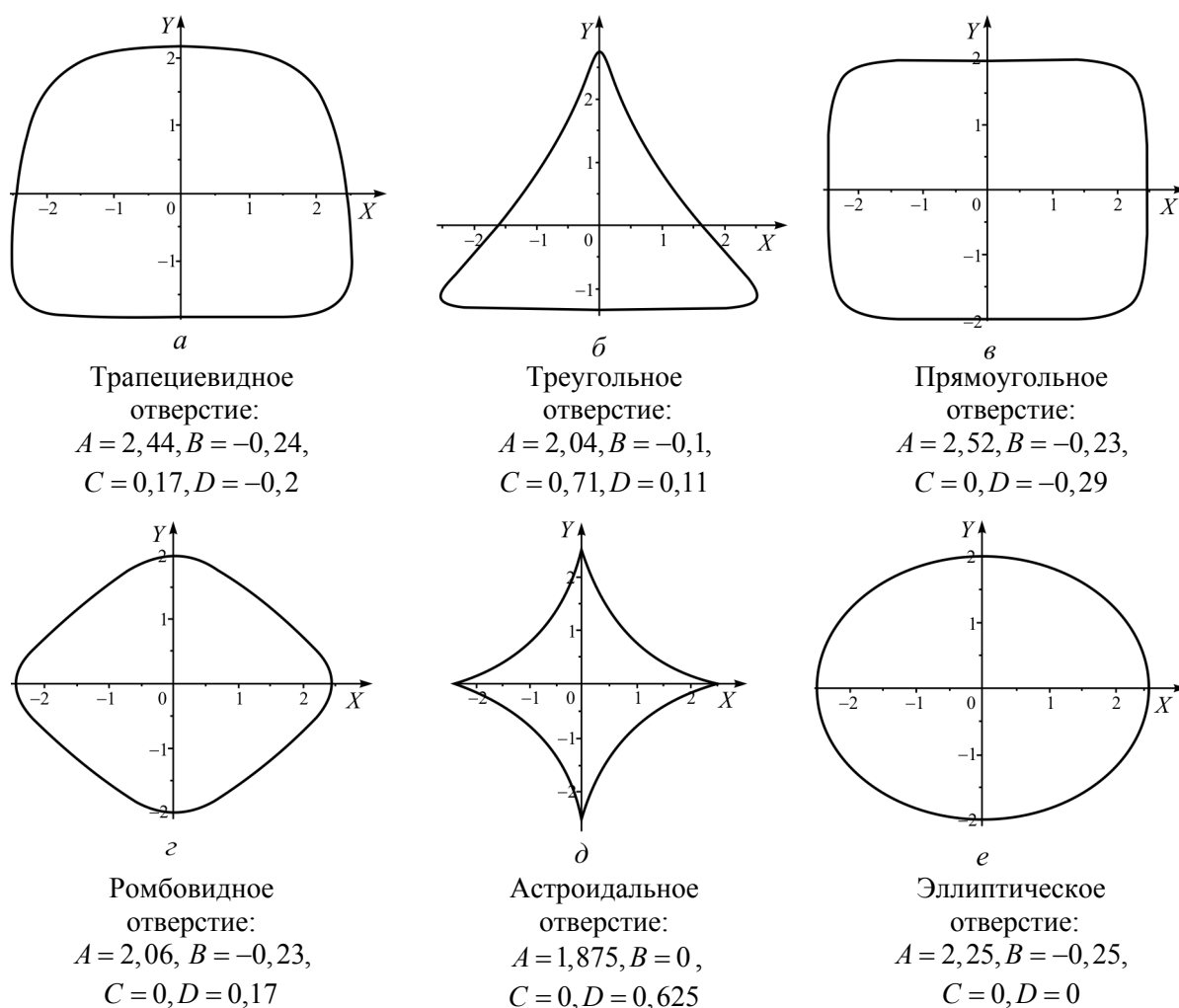


Рис. 1. Формы поперечного сечения выработок (отверстий)
Fig. 1. The cross-sectional shape of the production (holes)

Формула (3) получена в предположении, что глубина заложения выработки H – существенна [14]. Следуя [1], будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (7)$$

где R_{\max} – наибольший линейный размер сечения выработки.

В работе [11] была приведена формула тангенциального нормального напряжения (3), использованная автором для определения при заданных напряжениях на контурах выработок, возникающих от действия собственного веса пород, форм поперечных сечений подземных и открытых выработок в зависимости от коэффициента бокового распора ненарушенного однородного, линейно деформируемого горного массива. В статье [14] эта формула была использована для решения задачи о глубине заложения подземной горизонтальной выработки.

Нахождение нулей тангенциального нормального напряжения сводится к решению уравнения

$$8Rpt^4 + 4Npt^3 + 2(Q\gamma H + (4W - M - 4R)p)t^2 + (G\gamma H + (4V - L - 3N)p)t + (F - Q)\gamma H + (M - 4W + R - K + 4U)p = 0, \quad (8)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$.

С учетом результатов работы [15] заметим, что экстремальные значения функции $\sigma(\theta)$ (3) могут быть получены из уравнений:

$$\sin \theta = 0,$$

$$32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -RQ\gamma H + (2RM - 4RW)p, \\ a_2 &= -(3/2 GR + 1/2 NQ)\gamma H + (3RL - 6RV + MN - 2NW)p, \\ a_3 &= -(GN + 4FR)\gamma H + (8RK + 2NL - 4VN - 16RU)p, \\ a_4 &= (1/2 QL - 1/2 MG - 5/2 GR - 3FN)\gamma H + \\ &+ (5RL + 2WL + 6NK - 10RV - 2VM - 12NU)p, \\ a_5 &= (2QK - 2MF - 2GN - 3RQ)\gamma H + \\ &+ (6MR + 4LN + 8WK - 12RW - 8VN - 8MU)p, \\ a_6 &= (GK + 3/2 QL - 5/2 NQ - 3/2 MG - FL)\gamma H + \\ &+ (5MN + 6WL + 4VK - 10NW - 6VM - 4LU)p. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь, используя приведенные выше соотношения, рассмотрим задачу о распределении напряжений на контурах, изображенных на рис. 1 и имитирующих горизонтальные подземные горные выработки соответствующих форм сечений.

Задача. Исследовать напряженное состояние на границе подземной горизонтальной выработки, имеющей наперед заданную форму, в зависимости от величины численного значения давления, действующего по этой границе, при условии, что величина коэффициента бокового распора заранее задана.

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$ и пределами прочности при растяжении $R_{\text{рас}} = -17 \text{ МПа}$ и сжатии $R_{\text{сж}} = 200 \text{ МПа}$. Поскольку наибольший линейный размер трапецевидной выработки – ее ширина, равная 5 м, то, с учетом (7), положим $H = 250 \text{ м}$. Тогда $\gamma H = 625 \text{ 000 кг/м}^2$.

При решении задачи используем два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона,

которая в среднем для горных пород составляет $\nu = 0,20$ [1]. Второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в горном массиве, которое принимается при определении напряжений на достаточно больших глубинах [3].

1. Выработка трапециевидного сечения. Рассмотрим выработку трапециевидного сечения с коэффициентами отображающей функции (1), равными

$$A = 2,44, B = -0,24, C = 0,17, D = -0,2, \quad (11)$$

изображенную на рис. 1, а.

Заметим, что коэффициенты (5) не зависят от коэффициента бокового распора и для обоих случаев составляют:

$$\begin{aligned} U = 0,529, V = -0,565, W = 0,818; \\ K = 6,487, L = -0,571, M = 1,459; N = -1,659, R = 2,928. \end{aligned} \quad (12)$$

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (4) получаем

$$F_1 = -5,974; G_1 = -1,848; Q_1 = 10,505. \quad (13)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} 23,424p \cos^4 \theta - 6,636p \cos^3 \theta + (21,011\gamma H - 19,795p) \cos^2 \theta + \\ + (-1,848\gamma H + 3,288p) \cos \theta - 16,479\gamma H - 3,257p = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения нулей необходимо задать значения давления p . Из постановки задачи следует, что необходимо выбирать значения $p < 0$.

В качестве значений напряжений, приложенных к контуру выработки, положим:

$$p_1 = -0,1 \text{ МПа}, \quad p_2 = -1 \text{ МПа}, \quad p_3 = -2 \text{ МПа}. \quad (15)$$

Прямые вычисления по формуле (14) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 0,437$, $\theta_2 = 2,534$;

при $p_2 = -1 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 0,957$, $\theta_2 = 2,034$;

при $p_3 = -2 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 1,206$, $\theta_2 = 1,784$, $\theta_3 = 2,885$.

Перейдем к вычислению экстремальных значений тангенциальных нормальных напряжений.

По формулам (9) и (10) с учетом (12), (13), получим:

при $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$ имеем $\theta_1 = 1,096$, $\theta_2 = 1,375$, $\theta_3 = 2,211$.

Присоединяя к полученным значениям $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) = 1240246,913, \quad \sigma(\theta_4) = -228444,585, \\ \sigma(\theta_2) = 1207839,434, \quad \sigma(\theta_5) = -275875,686, \\ \sigma(\theta_3) = 1948114,185, \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{\min}(\theta_5) = -275875,686, \quad \sigma_{\max}(\theta_3) = 1948114,185. \quad (16)$$

При

$$p_2 = -1 \text{ МПа} \text{ имеем } \theta_1 = 0,587, \theta_2 = 1,552, \theta_3 = 2,320.$$

Пусть $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -963313,519, & \sigma(\theta_4) &= -538509,370, \\ \sigma(\theta_2) &= 885910,359, & \sigma(\theta_5) &= -20518,544. \\ \sigma(\theta_3) &= -1597296,656, \end{aligned}$$

Значит,

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -1597296,656, \sigma_{\max}(\theta_2) = 885910,359 \quad (17)$$

И наконец, при

$$p_3 = -2 \text{ МПа} \text{ имеем } \theta_1 = 0,684, \theta_2 = 1,506, \theta_3 = 2,265.$$

Дополняя значения аргумента значениями $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -2529250,257, & \sigma(\theta_4) &= -883025,798, \\ \sigma(\theta_2) &= 498426,47, & \sigma(\theta_5) &= 263211,615. \\ \sigma(\theta_3) &= -4745115,044, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -4745115,044, \sigma_{\max}(\theta_2) = 498426,47. \quad (18)$$

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления действуют растягивающие напряжения, т.е.:

при $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 0,437) \cup (2,534; 3,749) \cup (5,846; 2\pi)$;

при $p_2 = -1 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 0,957) \cup (2,034; 4,284) \cup (5,361; 2\pi)$;

при $p_3 = -2 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 1,206) \cup (1,784; 2,885) \cup (3,398; 4,499) \cup (5,077; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки трапециевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_1, p_2 и p_3 в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 2.

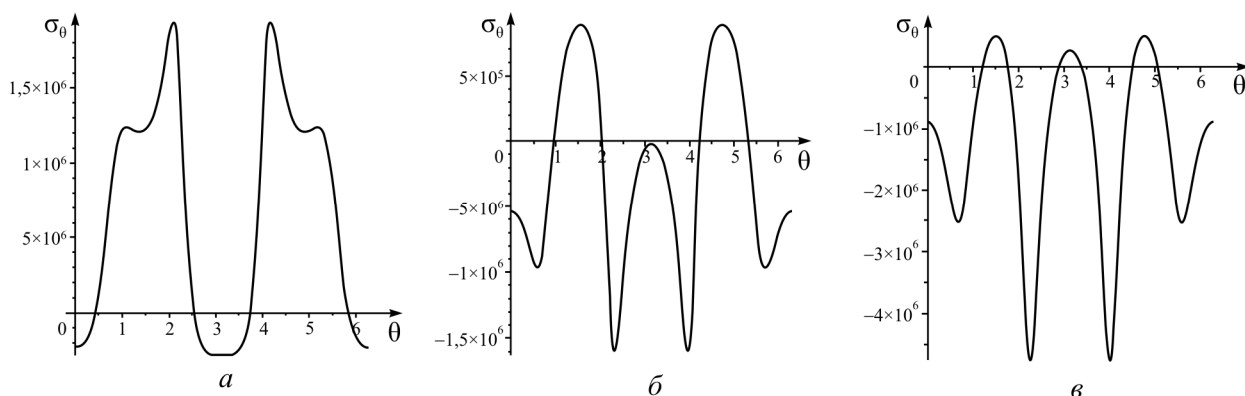


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции:

a – при $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$; b – $p_2 = -1 \text{ МПа}$; c – $p_3 = -2 \text{ МПа}$, $\mu_1 = 0,25$

Fig. 2. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a trapezoid with:

a – $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$; b – $p_2 = -1 \text{ МПа}$; c – $p_3 = -2 \text{ МПа}$, $\mu_1 = 0,25$

Опираясь на результаты работы [10] и значения (16)–(18), исследуем прочность рассматриваемой выработки при данных значениях (15) давления. Для этого необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|\sigma_{\min}(\theta)| < R_{\text{рас}}/g, \quad |\sigma_{\max}(\theta)| < R_{\text{сж}}/g. \quad (19)$$

Проверка показывает, что при $p_1 = -0,1$ МПа оба неравенства (19) выполняются; при $p_2 = -1$ МПа и $p_3 = -2$ МПа выполняется лишь второе из неравенств (19). Таким образом, при давлении $p_1 = -0,1$ МПа данная выработка трапециевидной формы сечения является прочной, а при остальных двух значениях величины давления выработка теряет прочность, поскольку растягивающее напряжение, прикладываемое к точкам контура выработки, превышает предельно допустимое значение.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (4) дают

$$F_2 = -10,858; \quad G_2 = -1,117; \quad Q_2 = 0,355. \quad (20)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$23,424p \cos^4 \theta - 6,636p \cos^3 \theta + (0,710\gamma H - 19,795p) \cos^2 \theta + \\ + (-1,117\gamma H + 3,288p) \cos \theta - 11,213\gamma H - 3,257p = 0. \quad (21)$$

Прямые вычисления по формуле (21) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_1 = -0,1$ МПа нулей нет;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta_1 = 0,703$, $\theta_2 = 0,812$, $\theta_3 = 1,977$, $\theta_4 = 2,454$;

при $p_3 = -2$ МПа $\theta_1 = 0,192$, $\theta_2 = 1,337$, $\theta_3 = 1,624$, $\theta_4 = 2,641$.

Аналогично предыдущему случаю, вычислим экстремальные значения тангенциальных нормальных напряжений.

При $p_1 = -0,1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,758$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Пусть $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$. Тогда

$$\sigma(\theta_1) = 1517521,968, \quad \sigma(\theta_4) = 805798,820, \\ \sigma(\theta_2) = 825391,516, \quad \sigma(\theta_5) = 476089,362. \\ \sigma(\theta_3) = 2358122,736,$$

Тогда

$$\sigma_{\min}(\theta_5) = 476089,362, \quad \sigma_{\max}(\theta_3) = 2358122,736. \quad (22)$$

При $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,757$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,223$.

Пусть $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$. Тогда

$$\sigma(\theta_1) = -12695,975, \quad \sigma(\theta_4) = 495734,349, \\ \sigma(\theta_2) = 481851,391, \quad \sigma(\theta_5) = 731446,505. \\ \sigma(\theta_3) = -612663,329, \\ \sigma_{\min}(\theta_3) = -612663,329, \quad \sigma_{\max}(\theta_5) = 731446,505. \quad (23)$$

И наконец, при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta_1 = 0,757$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Пусть $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -1712938,268, & \sigma(\theta_4) &= 151217,607, \\ \sigma(\theta_2) &= 100140,480, & \sigma(\theta_5) &= 1015176,664. \\ \sigma(\theta_3) &= -3913543,029, \end{aligned}$$

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -3913543,029, \quad \sigma_{\max}(\theta_5) = 1015176,664. \quad (24)$$

Как и для предыдущего случая, выделим участки, на которых при заданных значениях равномерного давления действуют растягивающие напряжения. Имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа на интервале $(0; 2\pi)$ действуют только сжимающие напряжения;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta \in (0,703; 0,812) \cup (1,976; 2,454) \cup (3,829; 4,307) \cup (5,471; 5,580)$;

при $p_3 = -2$ МПа $\theta \in (0,192; 1,337) \cup (1,624; 2,641) \cup (3,642; 4,650) \cup (4,946; 6,091)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки трапециевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_1, p_2 и p_3 в случае $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 3.

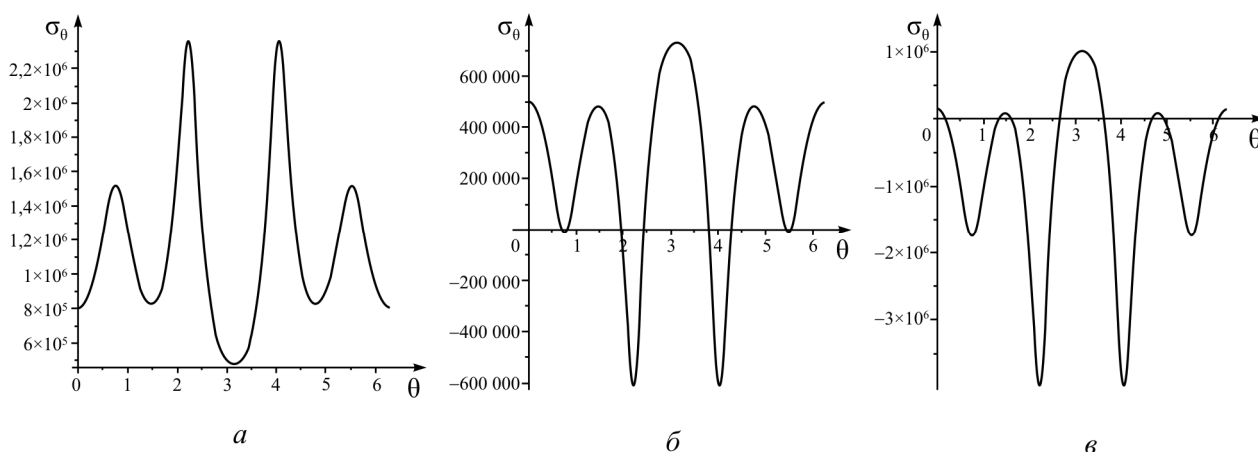


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции:

a – при $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; v – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Fig. 3. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a trapezoid with:

a – $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Для определения прочности выработки воспользуемся неравенствами (19). Проверка справедливости этих неравенств с учетом значений (22)–(24) показывает, что не выполняется первое из неравенств (19) при $p_3 = -2$ МПа, что означает потерю прочности трапециевидной выработки при данном значении интенсивности растяжения.

Приведем результаты решения задачи для выработок форм сечений, представленных на рис. 1, б–г.

2. Выработка треугольного сечения. Рассмотрим выработку треугольного сечения с коэффициентами отображающей функции (1) в виде

$$A = 2,04, B = -0,1, C = 0,71, D = 0,11, \quad (25)$$

изображенной на рис. 1, б.

Случай $\mu_1 = 0,25$.

Растягивающие напряжения действуют на следующих участках:

при $p_1 = -0,1$ МПа имеем $\theta \in (2,291; 3,992)$;

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,248) \cup (1,867; 2,838) \cup (3,445; 4,426) \cup (6,035; 2\pi)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,267) \cup (1,735; 2,597) \cup (3,686; 4,548) \cup (6,016; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработок с заданным отверстием треугольного сечения при $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 4.

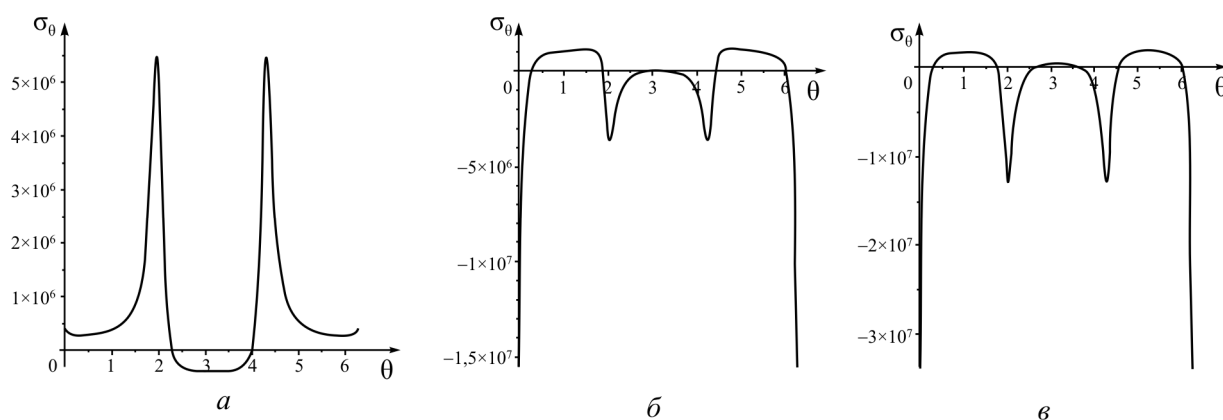


Рис. 4. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде треугольника:

a – при $p_1 = -0,1$ МПа; *б* – $p_2 = -1$ МПа; *в* – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_1 = 0,25$

Fig. 4. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a triangle with:

a – $p_1 = -0,1$ МПа; *b* – $p_2 = -1$ МПа; *c* – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_1 = 0,25$

Случай $\mu_2 = 1$.

Растягивающие напряжения действуют на следующих участках:

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,114) \cup (1,739; 2,254) \cup (4,029; 4,544) \cup (6,169; 2\pi)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,217) \cup (1,665; 2,382) \cup (3,901; 4,618) \cup (6,066; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$, а также на всем интервале при $p_1 = -0,1$ МПа действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработок с заданным отверстием треугольного сечения при $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 5.

3. Выработка прямоугольного сечения. Рассмотрим выработку прямоугольного сечения с коэффициентами отображающей функции (1) в виде

$$A = 2,52, B = -0,23, C = 0, D = -0,29, \quad (26)$$

изображенную на рис. 1, в.

Случай $\mu_1 = 0,25$.

Растягивающие напряжения действуют на следующих участках:

при $p_1 = -0,1$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,554) \cup (2,587; 3,696) \cup (5,729; 2\pi)$;

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (0; 1,031) \cup (2,110; 4,173) \cup (5,252; 2\pi)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0,153; 1,221) \cup (1,920; 2,989) \cup (3,294; 4,363) \cup (6,13; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

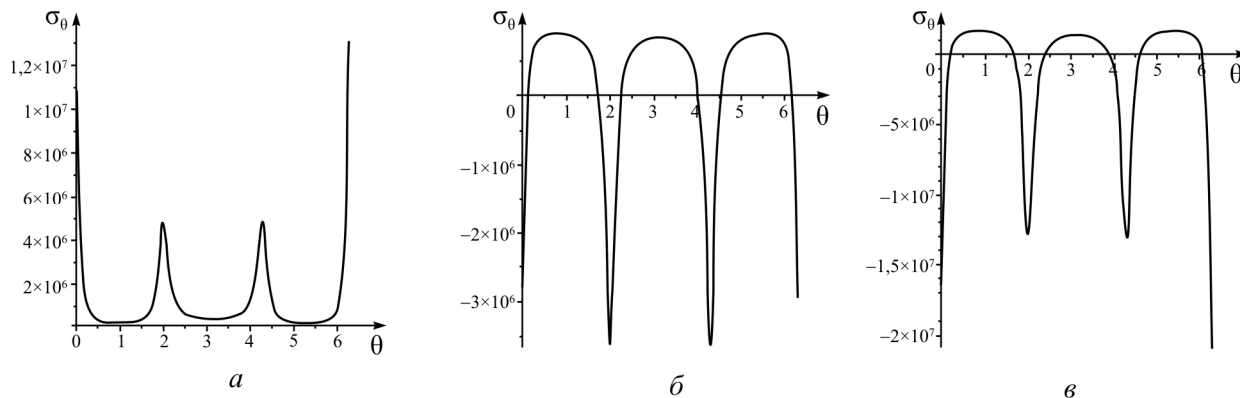


Рис. 5. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде треугольника:

a – при $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Fig. 5. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a triangle with:

a – $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработок с заданной выработкой прямоугольного сечения при $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 6.

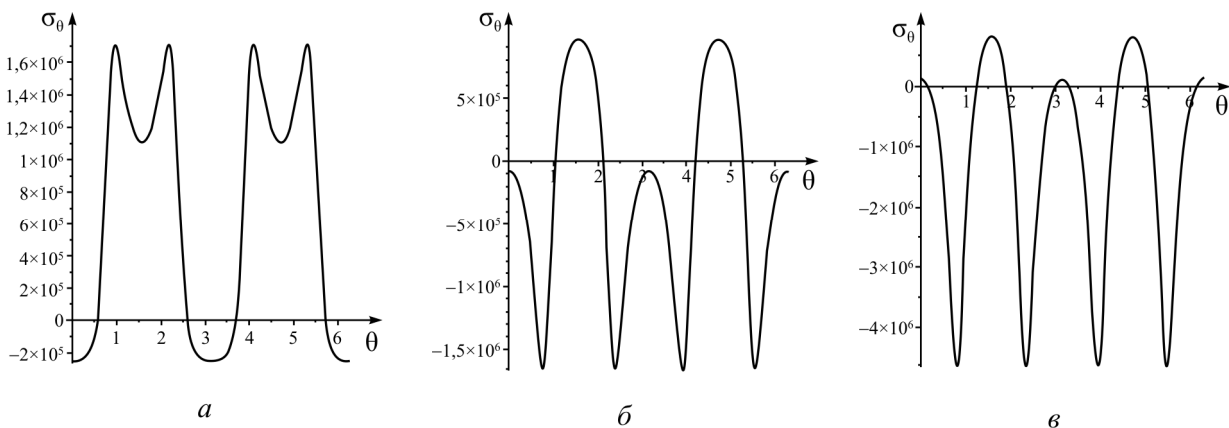


Рис. 6. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде прямоугольника:

a – при $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_1 = 0,25$

Fig. 6. Plots of tangential normal stresses on the contour in the form of a rectangle with:

a – $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_1 = 0,25$

Случай $\mu_2 = 1$.

Растягивающие напряжения действуют на следующих участках:

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (0,627; 1,053) \cup (2,089; 2,514) \cup (3,769; 4,194) \cup (5,23; 5,656)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0,435; 1,303) \cup (1,839; 2,706) \cup (3,577; 4,444) \cup (4,98; 5,848)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$, а также на всем интервале при $p_1 = -0,1$ МПа действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработок с заданным прямоугольным отверстием при $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 7.

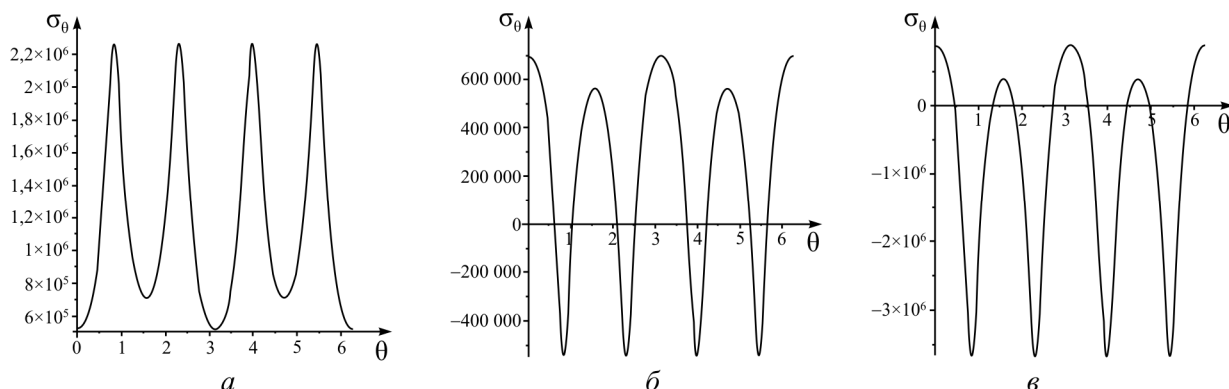


Рис. 7. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде прямоугольника:
а – при $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Fig. 7. Plots of tangential normal stresses on the contour in the form of a rectangle with:
а – $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

4. Выработка ромбовидного сечения. Рассмотрим выработку ромбовидного сечения с коэффициентами отображающей функции (1)

$$A = 2,06, B = -0,23, C = 0, D = 0,17, \quad (27)$$

изображенную на рис. 1, з.

Случай $\mu_1 = 0,25$.

Тогда имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,380) \cup (2,761; 3,522) \cup (5,903; 2\pi)$;

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,614) \cup (1,503; 1,638) \cup (2,527; 3,756) \cup (4,645; 4,780) \cup (5,669; 2\pi)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,750) \cup (0,967; 2,175) \cup (2,391; 3,892) \cup (4,108; 5,316) \cup (6,13; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработок с заданным ромбовидным отверстием при $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 8.

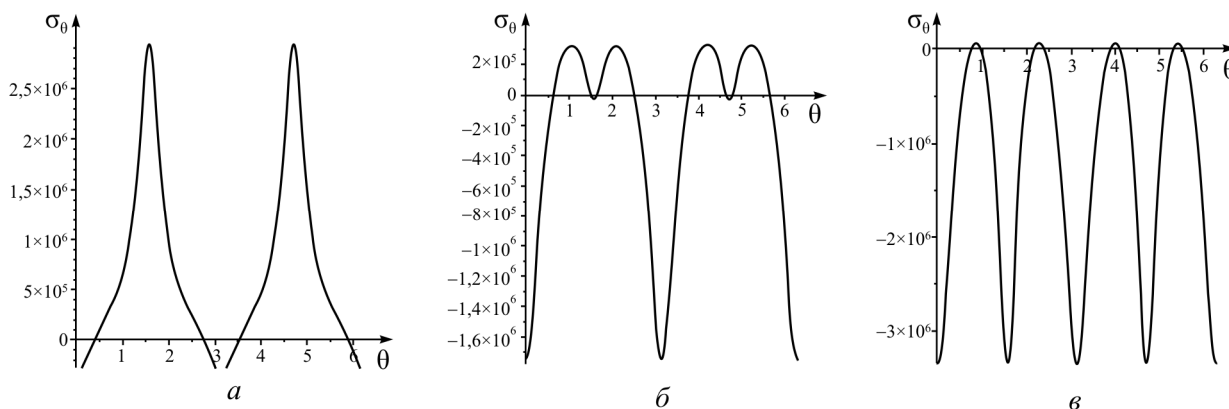


Рис. 8. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде ромба:
а – при $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$

Fig. 8. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a rhombus with:
а – $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$

Случай $\mu_2 = 1$.

Тогда:

при $p_2 = -1$ МПа имеем $\theta \in (1,316; 1,825) \cup (4,458; 4,967)$;

при $p_3 = -2$ МПа имеем $\theta \in (0; 0,458) \cup (1,044; 2,097) \cup (2,683; 3,6) \cup (4,186; 5,239) \cup (5,825; 2\pi)$. На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$, а также на всем интервале при $p_1 = -0,1$ МПа действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки с ромбовидным отверстием при $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 9.

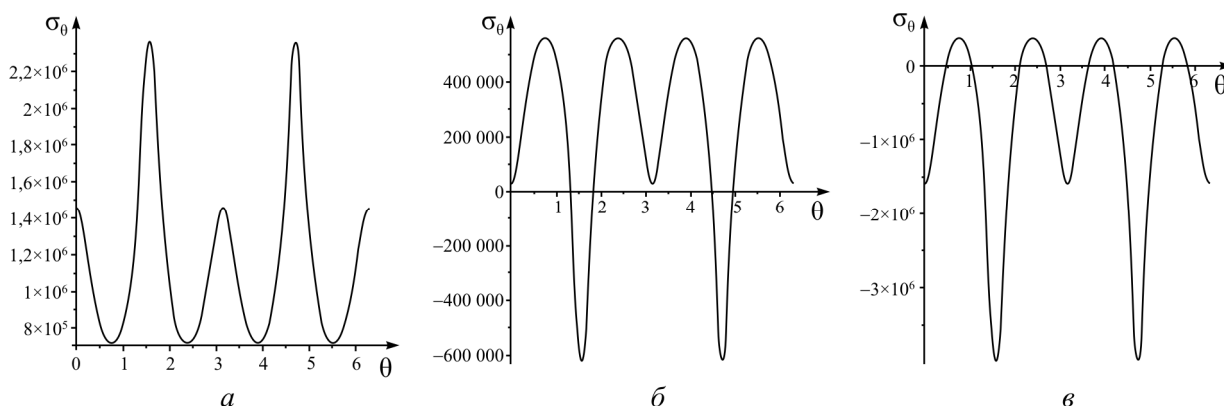


Рис. 9. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде ромба:

a – при $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; v – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Fig. 9. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of a rhombus with:

a – $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

5. Выработка астроидального сечения. Рассмотрим выработку астроидального сечения с коэффициентами отображающей функции (1) вида

$$A = 1,875, B = C = 0, D = 0,625, \quad (28)$$

изображенную на рис. 1, д.

Подставляя коэффициенты (28) в соотношения (4) и (5), получим формулу тангенциальных нормальных напряжений (3) в виде

$$\sigma_\theta = -p \quad (29)$$

при любых значениях коэффициента Пуассона.

Следовательно, значения тангенциального нормального напряжения во всех точках контура постоянны и равны с точностью до знака интенсивности величины равномерного давления, приложенного в точках контура выработки, а эпюры тангенциальных нормальных напряжений при любых, в том числе и выбранных нами значениях давления $p_1 = -0,1$ МПа, $p_2 = -1$ МПа и $p_3 = -2$ МПа, представляют собой прямые, параллельные оси абсцисс и, например, при $p < 0$ дают значения сжимающих напряжений на контуре выработки.

Заметим, что на контурах выработок астроидальных сечений, гомотетичных данному, величина тангенциальных нормальных напряжений будет также выражаться формулой (29).

Завершим рассмотрение примеров случаем выработки эллиптического сечения, вычислив не только нули тангенциального нормального напряжения, но и, как в случае выработки трапецевидного сечения, экстремальные значения в точках выработки.

6. Выработка эллиптического сечения. Рассмотрим выработку эллиптического сечения с коэффициентами отображающей функции (1)

$$A = 2,25, \quad B = -0,25, \quad C = D = 0, \quad (30)$$

изображенную на рис. 1, е.

Тогда, согласно (5), имеем

$$U = 0,0625; \quad V = 0, \quad W = 0,5625, \quad K = 5,125; \quad L = 0; \quad M = 1,125; \quad N = R = 0. \quad (31)$$

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (4) получаем

$$F_1 = -5,406; \quad G_1 = 0; \quad Q_1 = 7,594. \quad (32)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$(15,188\gamma H + 2,25p) \cos^2 \theta - 13\gamma H - 6p = 0. \quad (33)$$

Прямые вычисления по формуле (33) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\theta_1 = 0,449, \theta_2 = 2,693$;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta_1 = 0,998, \theta_2 = 2,143$;

при $p_3 = -2$ МПа нулей нет.

Вычислим экстремальные значения тангенциального нормального напряжения.

Уравнения (9), с учетом (31), (32), дают значения $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$, причем заметим, что $\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_3)$. Тогда имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -278\,800, \sigma(\theta_2) = 1\,881\,250$;

при $p_2 = -1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -818\,800, \sigma(\theta_2) = 531\,250$;

при $p_3 = -2$ МПа $\sigma(\theta_1) = -1\,418\,800, \sigma(\theta_2) = -968\,750$.

Приведенные вычисления показывают, что при $\theta_1 = 0$ тангенциальные нормальные напряжения достигают минимального значения, а при $\theta_2 = \pi/2$ – максимального.

Тогда, как нетрудно видеть, имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\theta \in (0; 0,449) \cup (2,693; 3,590) \cup (5,834; 2\pi)$;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta \in (0; 0,998) \cup (2,143; 4,140) \cup (5,285; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения. При $p_3 = -2$ МПа на всем интервале действуют растягивающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для данной выработки с эллиптическим отверстием приведены на рис. 10.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (4) дают

$$F_2 = -10; \quad G_2 = 0; \quad Q_2 = 0. \quad (34)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$2,25p \cos^2 \theta - 10\gamma H - 6p = 0. \quad (35)$$

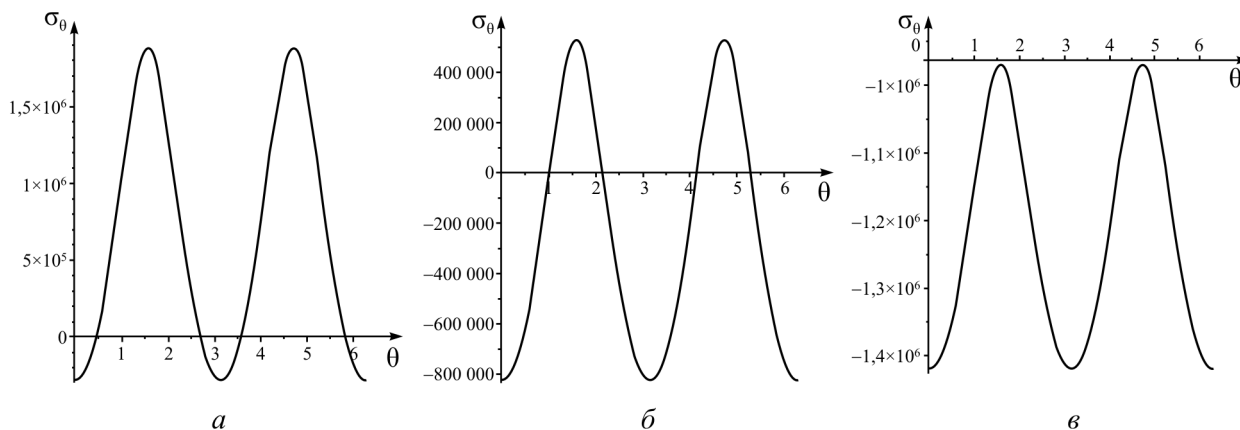


Рис. 10. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде астроида:
 а – при $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$
 Fig. 10. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of an astroid with:
 а – $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$

Прямые вычисления по формуле (35) с учетом (15) показывают, что ни при одном из значений p_1, p_2, p_3 уравнение (8) корней не имеет.

Уравнения (9) дают те же значения аргументов – $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$, причем, как и в предыдущем случае, $\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_3)$. Тогда имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta_1) = 940\,000, \sigma(\theta_2) = 1\,412\,500$;
 при $p_2 = -1$ МПа $\sigma(\theta_1) = 400\,000, \sigma(\theta_2) = 62\,500$;
 при $p_3 = -2$ МПа $\sigma(\theta_1) = -200\,000, \sigma(\theta_2) = -1\,437\,500$.

Заметим, что тангенциальные нормальные напряжения достигают минимального и максимального значений при тех же значениях аргументов.

Таким образом, при $p_1 = -0,1$ МПа и при $p_2 = -1$ МПа на всем интервале $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения, а при $p_3 = -2$ МПа на всем интервале действуют растягивающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки с эллиптическим отверстием приведены на рис. 11.

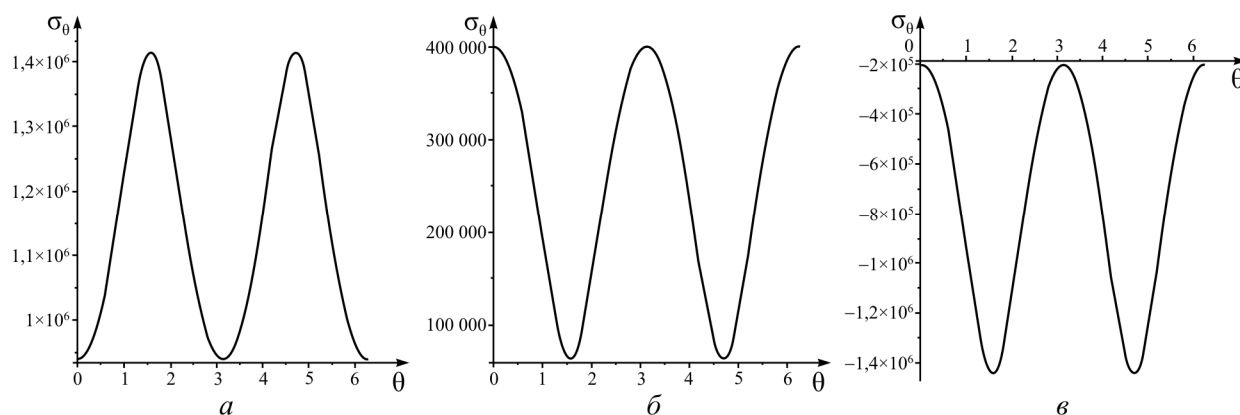


Рис. 11. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде астроида:
 а – при $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$
 Fig. 11. Diagrams of tangential normal stresses on the circuit in the form of an astroid with:
 а – $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Проверка показывает, что при всех трех значениях напряжений на контурах и $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$ оба неравенства (19) выполняются. Таким образом, рассматриваемая выработка эллиптического сечения является прочной при данных коэффициентах бокового распора.

И в заключение рассмотрим случай выработки круглого сечения, выделив его, как часто встречающийся на практике, в отдельный случай.

7. Выработка круглого сечения. Рассмотрим выработку круглого сечения с коэффициентами отображающей функции (1)

$$A = 2,5, \quad B = C = D = 0. \quad (36)$$

Тогда сечением выработки является окружность диаметра 5. Как и выше, примем $H = 250$ м и $\gamma H = 625\,000$ кг/м².

Согласно (5) имеем

$$U = V = W = 0, \quad K = 6,25, \quad L = M = N = R = 0. \quad (37)$$

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (4) получаем

$$F_1 = -7,8125; \quad G_1 = 0; \quad Q_1 = 9,375. \quad (38)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$18,75\gamma H \cos^2 \theta - 17,1875\gamma H - 6,25p = 0. \quad (39)$$

Прямые вычисления по формуле (39) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\theta_1 = 0,379, \theta_2 = 2,763$;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta_1 = 0,903; \theta_2 = 2,238$;

при $p_3 = -2$ МПа нулей нет.

Уравнения (9) дают значения $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi, \sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_3)$.

Тогда имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -256\,250, \sigma(\theta_2) = 1\,618\,750$;

при $p_2 = -1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -1\,156\,250, \sigma(\theta_2) = 718\,750$;

при $p_3 = -2$ МПа $\sigma(\theta_1) = -2\,156\,250, \sigma(\theta_2) = -281\,250$.

Тогда имеем:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\theta \in (0; 0,379) \cup (2,763; 3,520) \cup (5,904; 2\pi)$;

при $p_2 = -1$ МПа $\theta \in (0; 0,903) \cup (2,238; 4,045) \cup (5,380; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0; 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения. При $p_3 = -2$ МПа на всем интервале действуют растягивающие напряжения.

Заметим, что ни в формулу для отыскания нулевых значений тангенциального нормального напряжения (8), ни в формулу для определения величины тангенциальных нормальных напряжений (9) для сечения в виде окружности не входит величина ее радиуса. Следовательно, для круглой выработки произвольного радиуса R формулы (8) и (9) будут давать одинаковые значения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки круглого сечения при $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 12.

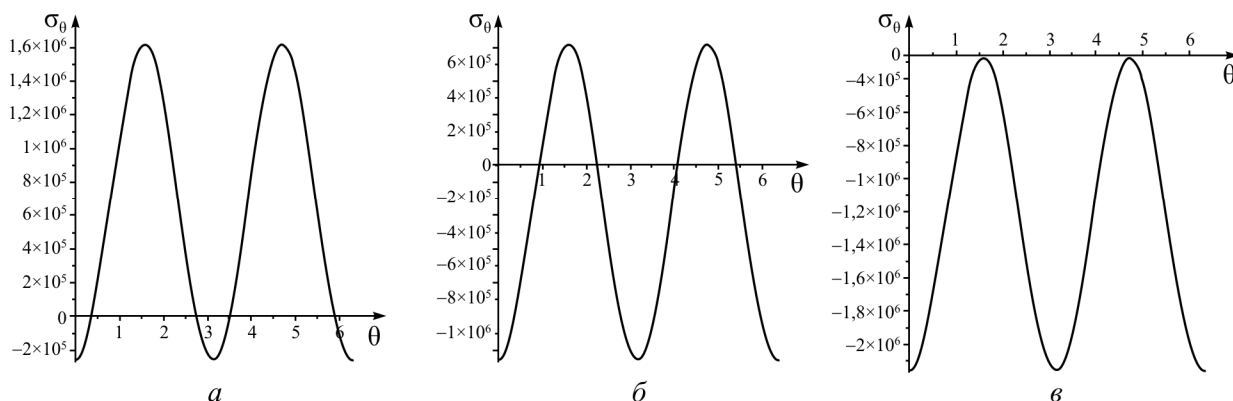


Рис. 12. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде окружности:
 а – при $p_1 = -0,1$ МПа; б – $p_2 = -1$ МПа; в – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$

Fig. 12. Plots of tangential normal stresses on the circuit in the form of a circle with:
 a – $p_1 = -0,1$ МПа; b – $p_2 = -1$ МПа; c – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 0,25$

Выполненные вычисления показывают, что при $p_3 = -2$ МПа напряжения превышают величину предела прочности породы при растяжении, что означает потерю прочности рассматриваемой выработки.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (4) дают

$$F_2 = -12,5; G_2 = 0; Q_2 = 0. \quad (40)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$-12,5\gamma H - 6,25p = 0. \quad (41)$$

Из формулы (41) следует, что ни при каком значении напряжения тангенциальное нормальное напряжение нулей не имеет.

Согласно (9) тангенциальное нормальное напряжение точек экстремума не имеет.

С учетом (37) нетрудно получить выражение

$$\sigma_\theta = 2\gamma H + p. \quad (42)$$

Подставляя в (42) данные (15), получим:

при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta) = 1150\,000$,

при $p_2 = -1$ МПа $\sigma(\theta) = 250\,000$,

при $p_3 = -2$ МПа $\sigma(\theta) = -750\,000$.

Таким образом, при данном коэффициенте бокового давления значения тангенциального нормального напряжения во всех точках контура выработки одинаковы, причем в первых двух случаях в каждой точке контура действуют только сжимающие напряжения, а в третьем случае – только растягивающие напряжения.

Из формулы (42) следует, что при $p = -2\gamma H$ контур выработки будет свободен от напряжений. В рассматриваемом примере это равенство достигается при $p = -1,25$ МПа.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки с круговым отверстием при $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 13.

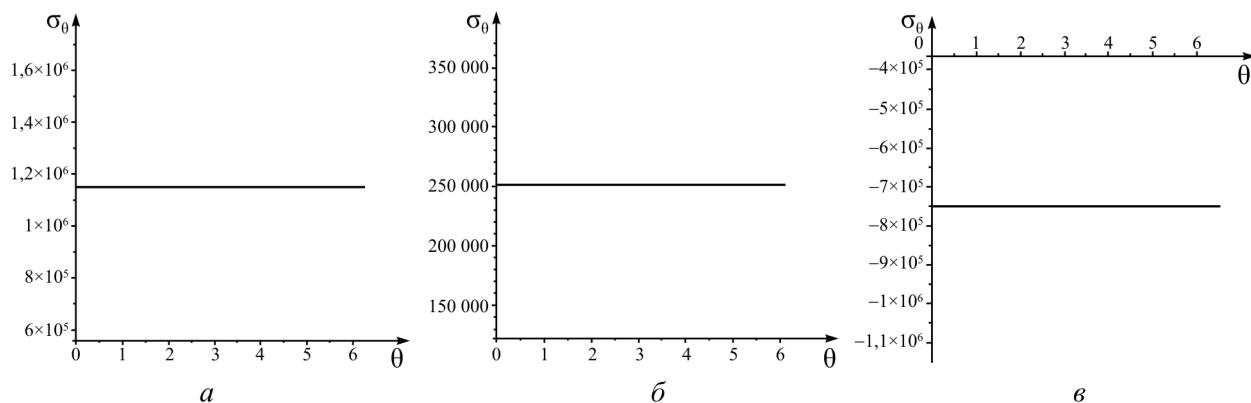


Рис. 13. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде астроида:
a – при $p_1 = -0,1$ МПа; *б* – $p_2 = -1$ МПа; *в* – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Fig. 13. Plots of tangential normal stresses on the circuit in the form of a circle with:
a – $p_1 = -0,1$ МПа; *b* – $p_2 = -1$ МПа; *c* – $p_3 = -2$ МПа, $\mu_2 = 1$

Выводы

1. Приведенные в работе формулы для вычисления величины тангенциальных нормальных напряжений, нахождения их нулей и экстремальных значений на контурах выработок различной формы позволяют проводить исследование напряженного состояния выработок, находящихся на заданной глубине заложения, испытывающих равномерное внутреннее всестороннее давление при заданных физико-механических свойствах горной породы.

2. На примере выработок трапециевидной и эллиптической форм сечений при заданном типе горной породы и глубине заложения выработки вычислены значения величины равномерного растягивающего давления, распределенного по контуру выработок, при котором горные породы на поверхности выработок теряют прочность при растяжении.

3. Если выработки имеют поперечное сечение в виде астроида и эллипса (в частности, круга) и величина коэффициента бокового распора равна 1, то при величинах интенсивности равномерного давления, превышающего некоторое значение, зависящее от объемного веса породы и глубины заложения выработки, на их контурах могут возникать тривиальные распределения напряжений.

Библиографический список

1. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра, 1989. – 488 с.
2. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
3. Глушко В.Т., Гавеля С.П. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород. – М.: Недра, 1986. – 221 с.
4. Цимбаревич П.М. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
5. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: справ. рук. – Киев: Наукова думка, 1964. – 536 с.
6. Колосов Г.В. Применение комплексных переменных диаграмм и теории функций комплексного переменного к теории упругости. – М.: ОНТИ, 1935. – 224 с.

7. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. 1966. – 708 с.
8. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
10. Фильчакова В.П. Конформные отображения областей специального типа: справ. рук. – Киев: Наукова думка, 1972. – 252 с.
11. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах // ФТПРПИ. – 1986. – № 2. – С. 24–29.
12. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
13. Богомоллов А.Н., Ушаков А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики. – Волгоград: ВолгГАСУ: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2014. – 227 с.
14. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2017. – № 5. – С. 2–9.
15. Богомоллов А.Н., Богомоллова О.А., Ушаков А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9, № 3. – С. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

References

1. Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kaspar'yan E.V. Osnovy mekhaniki gornyx porod [Fundamentals of rock mechanics]. Leningrad, Nedra, 1989, 488 p.
2. Bulychev N.S. Mekhanika podzemnykh sooruzhenij [Mechanics of underground structures]. Moscow, Nedra, 1989, 270 p.
3. Glushko V.T., Gavelya S.P. Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massivov gornyx porod [Assessment of stress-strain state of rock massifs]. Moscow, Nedra, 1986, 221 p.
4. Tsimbarevich P.M. Mekhanika gornyx porod [Rock mechanics]. Moscow, Ugletekhizdat, 1948, 184 p.
5. Fil'chakov P.F. Priblizhennyye metody konformnykh otobrazhenij [Approximate methods of conformal maps]. Kiev, Naukova Dumka, 1964, 536 p.
6. Kolosov G.V. Primenenie kompleksnykh peremennykh diagramm i teorii funktsii kompleksnogo peremennogo k teorii uprugosti [Application of complex variable diagrams and the theory of functions of complex variable to the theory of elasticity]. Moscow, ONTI, 1935, 224 p.
7. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 708 p.
8. Kalandiya A.I. Matematicheskie metody dvumernoj uprugosti [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow, Nauka, 1973, 304 p.
9. Savin G.N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij [Stress distribution near holes]. Kiev, Naukova dumka, 1968, 888 p.

10. Fil'chakova V.P. Konformnye otobrazheniya oblastej spetsial'nogo tipa [Conformal mappings of areas of a special type]. Kiev, Naukova Dumka, 1972, 252 p.

11. Tsvetkov V.K. Opredelenie form sechenij gornyx vyrabotok s zadannymi napryazheniyami na konturakh [Determining the forms of cross sections of mine workings with the specified voltages in the circuits]. FTPRPI. – 1986. – № 2. – S. 24–29.

12. Tsvetkov V.K. Raschet ratsional'nykh parametrov gornyx vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow: Nedra, 1993. 291 p.

13. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki [Methods of the theory of functions of a complex variable in problems of geomechanics]. Volgograd, VolgGASU, Peremena, 2014, 227 p.

14. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Opredelenie glubiny zalozheniya gorizontal'noj vyrabotki na osnove analiza napryazhennogo sostoyaniya vmeshhayushhego massiva [Determination of the depth of the horizontal output on the basis of the analysis of the stress state of the host array]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov*, 2017, no. 5, pp. 2 – 9.

15. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. O napryazheniyakh v konturnykh tochkakh odinochnykh podzemnykh vyrabotok razlichnogo poperechnogo secheniia, podverzhennykh vsestoronnemu ravnomernomu davleniiu [About stresses in a contour points in a single underground mines of different cross sections, subject to an overall uniform pressure]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 2018, vol. 9, no. 3, pp. 54-70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06.