

Хасанов А.З., Хасанов З.А., Набиева Н.А., Хасанов Ж.А. Теоретическое решение задачи распространения напряжений в грунтах при воздействии на скважину осесимметричных радиальных эффективных напряжений // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2019. – Т. 10, № 4. – С. 51–58. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.4.05

Khasanov A.Z., Khasanov Z.A., Nabieva N.A., Khasanov J.A. Theoretical solution to the problem of the propagation of stresses in soils when exposed to axisymmetric radial effective stresses. *Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture*. 2019. Vol. 10. No. 4. Pp. 51-58. DOI: 10.15593/2224-9826/2019.4.05



**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА**
Т. 10, № 4, 2019
**PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2019.4.05

УДК 624.131.53

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ГРУНТАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА СКВАЖИНУ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ РАДИАЛЬНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А.З. Хасанов¹, З.А. Хасанов¹, Н.А. Набиева¹, Ж.А. Хасанов²

¹Самаркандский государственный архитектурно-строительный институт, Самарканд, Узбекистан

²Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

О СТАТЬЕ

Получена: 01 августа 2019
Принята: 19 октября 2019
Опубликована: 10 января 2020

Ключевые слова: радиальные и тангенциальные напряжения, гравитационное давление, массив грунта, решение Ламе.

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются вопросы, связанные с определением радиальных и тангенциальных напряжений в скважине при наличии гравитационного давления массива грунта. За основу взяты известные теоретические решения осесимметричной задачи о толстостенной трубе, а именно – решение Ламе. Рассмотрено действие двух давлений: внутреннего давления p_1 и внешнего p_2 , равномерно распределенных по внутренней и наружной поверхностям полого цилиндра. В результате проведенных теоретических исследований было установлено, что использование уравнения теории упругости для определения радиальных и тангенциальных напряжений в скважине с внутренним эффективным давлением $\sigma_r = p_1$ приводит к его медленному убыванию по горизонтали, что не наблюдается на практике. Авторами предложены решения, которые позволяют получить для грунтов более близкие значения σ_r . Также экспериментально доказано, что величина активной области сжатия для грунтовых скважин с внутренним эффективным давлением p_1 практически в два раза превышает показатель, полученный для штамповых испытаний в условиях полупространства. Авторами получены математические выражения прочности и устойчивости скважин от гравитационных нагрузок грунта.

© ПНИПУ

© **Хасанов Аскар Забиевич** – доктор технических наук, профессор, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Хасанов Зохир Аскарлович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Набиева Нигора Акбаровна – докторант, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Хасанов Жяхонгир Алижон угли – магистрант, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Askar Z. Khasanov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Zokhir A. Khasanov – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Nigora A. Nabieva – Doctoral Student, e-mail: uzssmge@gmail.com.

Jakhongir Khasanov – Master Student, e-mail: uzssmge@gmail.com.

THEORETICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE PROPAGATION OF STRESSES IN SOILS WHEN EXPOSED TO AXISYMMETRIC RADIAL EFFECTIVE STRESSES

A.Z. Khasanov¹, Z.A. Khasanov¹, N.A. Nabieva¹, J.A. Khasanov²

¹Samarkand State Architectural and Civil Engineering Institute, Samarkand, Uzbekistan

²Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

ARTICLE INFO

Received: 01 August 2019
Accepted: 19 October 2019
Published: 10 January 2020

Keywords: radial and tangential stresses, gravitational pressure, soil mass, Lamé solution.

ABSTRACT

The article discusses issues related to the determination of radial and tangential stresses in the well in the presence of gravitational pressure of the soil mass. The basis is the well-known theoretical solutions of the axisymmetric problem of a thick-walled pipe, namely, the Lamé solution. The action of two pressures is considered: the internal pressure p_1 and the external p_2 , uniformly distributed over the inner and outer surfaces of the hollow cylinder. As a result of theoretical studies, it was found that the use of the elasticity theory equation to determine radial and tangential stresses in a well with an internal effective pressure $\sigma_r = p_1$, leads to its slow horizontal decrease, which is not observed in practice. The authors proposed solutions that make it possible to obtain closer values of σ_r for soils. It was also experimentally proved that the value of the active compression region for soil wells with internal effective pressure p_1 is almost two times higher than the value obtained for stamp tests in half-space conditions. The authors obtained mathematical expressions of the strength and stability of wells from gravitational loads of soil.

© PNRPU

Известны теоретические решения осесимметричной задачи о толстостенной трубе [1]. Эту задачу, в качестве основы, можем применить для решения осесимметричной задачи в геотехнике. На практике эта задача может быть использована при определении критической нагрузки на стенки скважины или определении напряженно-деформированного состояния (НДС) вокруг нее, при наличии гравитационного давления массива грунта. При этом возникает справедливый вопрос о растягивающих напряжениях и деформациях в массиве грунта в тангенциальном направлении. Дело в том, что, в отличие от упругой задачи о толстостенной трубе, напряжения и деформации в тангенциальном направлении из-за ограниченности прочности грунта на растяжения отсутствуют или чрезмерно малы [2, 3]. Несмотря на эти ограничения, для решения геотехнической задачи о скважине с внутренним давлением за основу примем решение Ламе [1].

Кратко ознакомимся с упругим решением Ламе. Обозначим через ε_r – радиальную деформацию (в направлении радиуса цилиндра), через ε_t – окружную или тангенциальную деформацию. Линейные деформации и нормальные напряжения возникают в трех взаимно перпендикулярных направлениях: $\sigma_r = E\varepsilon_r$ и $\sigma_t = E\varepsilon_t$. Если в осевом направлении вдоль отверстия деформация свободна, т.е. отсутствуют внешние ограничения, препятствующие упругому изменению длины трубы, можно принять условие, когда нормальное напряжение $\sigma_x = 0$.

Рассмотрим действие двух давлений: внутреннего давления p_1 и внешнего p_2 , равномерно распределенных по внутренней и наружной поверхностям полого цилиндра. Внешний и внутренний ее радиусы обозначим соответственно через r_0 и r_1 . Определим усилия, передающиеся при указанной нагрузке на произвольно выбранный элементарный объем dV (рис. 1).

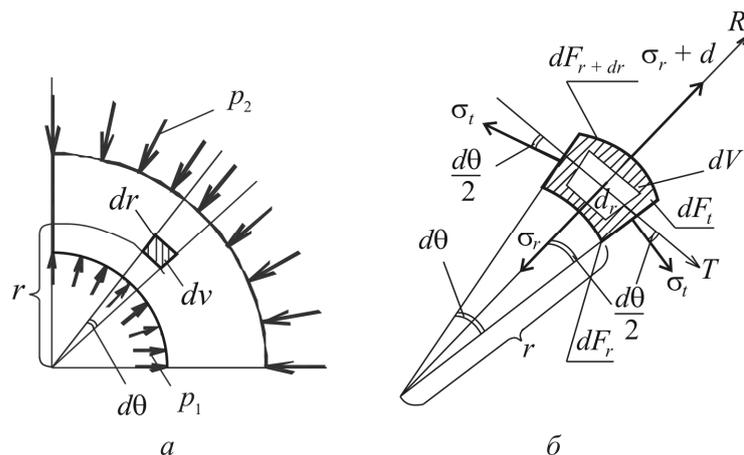


Рис. 1. Напряжения в полем цилиндре от действия внутреннего и внешнего давлений
Fig. 1. Stresses in the hollow cylinder from the action of internal and external pressures

Составим уравнение равновесия сил в радиальном направлении вдоль оси R :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta \cdot 1 - \sigma_r r d\theta \cdot 1 - 2\sigma_t \cdot 1 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка малости и принимая $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение (1) является единственным, получаемым из условия равновесия, но с двумя неизвестными σ_r и σ_t . Поэтому задача будет статически неопределимой.

Применительно к грунтам, с учетом теории прочности, можно утверждать, что тангенциальные напряжения должны удовлетворять условию $0 \leq \sigma_t \leq c \operatorname{ctg} \varphi$, где c, φ – соответственно величины удельного сцепления и угла внутреннего трения. С учетом этого, т.е. $\sigma_t = 0$, дифференциальное уравнение (1) переходит в однородное и имеет вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = 0. \quad (2)$$

В базовом варианте дифференциальное уравнение имеет две неизвестные σ_r и σ_t . Для того чтобы задачу (1) свести к однородной, используют закон Гука. Составляется второе уравнение – уравнение в перемещениях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) = \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) = \frac{du}{dr}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая эти два уравнения относительно σ_r и σ_t , можно получить выражение в перемещениях:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right);$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right).$$
(4)

В уравнениях (3) оба напряжения σ_r и σ_t выражены через переменную u , т.е. через величину радиального перемещения, соответствующую радиусу r .

Подставляя значения напряжений (4) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение, выраженное в перемещениях:

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0.$$
(5)

Решение дифференциального уравнения относительно радиального перемещения имеет вид

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r},$$
(6)

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Подставляя выражение (6) в (5), окончательно получим величины напряжений:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) + C_2(1-\mu) \frac{1}{r^2} \right];$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu) \frac{1}{r^2} \right].$$

Для упрощения полученных формул введем другие постоянные (C и D), придав последним двум выражениям следующий вид:

$$\sigma_r = C + \frac{D}{r^2};$$

$$\sigma_t = C - \frac{D}{r^2}.$$
(7)

Несложно заметить, что выражение (6) имеет аналогичный вид, полученный для плоской задачи [4]. Это выражение позволяет найти как радиальное, так и окружные тангенциальные напряжения при произвольном значении независимого переменного r , т.е. для всякого концентрического слоя грунта в скважине. Значения постоянных C и D определяем из граничных условий.

Решая систему этих уравнений относительно C и D и принимая условие $r_1 \cong 6r_0$, несложно получить, что

$$C = \frac{p_1 r_0^2 - p_2 (6r_0)^2}{(6r_0)^2 - r_0^2} = \frac{p_1 - 36p_2}{35};$$

$$D = (p_2 - p_1) \frac{(6r_0)^2 r_0^2}{r_0^2 - r_0^2} = (p_2 - p_1) \frac{36r_0^2}{35} \cong (p_2 - p_1) r_0^2.$$

Рассмотрим случай, когда $p_1 > p_2$. В этом случае радиальные напряжения положительные, т.е. грунт в этом направлении работает на сжатие, $\sigma_r > 0$. Тангенциальные на-

пряжения отрицательные, $\sigma_t < 0$. Напомним, что величина p_1 применительно к грунтам определяется из условия отсутствия перемещения на расстояние H_s , равное активной области сжатия концентрического слоя, определяемое на основании экспериментов $\varepsilon_r = 0$. На рис. 2 представлен экспериментальный график зависимости изменения радиальных перемещений $(r_0 + r)/d$ от перемещений (u/p_2) .

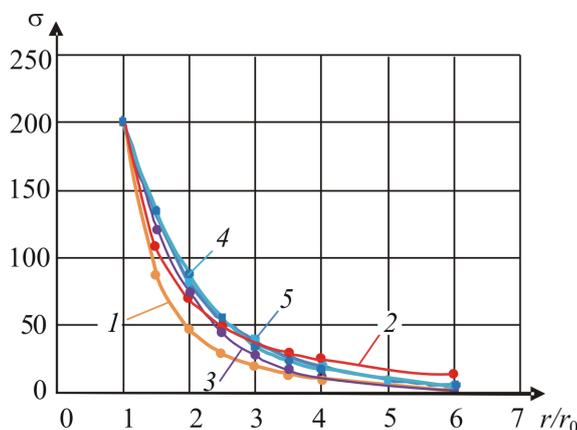


Рис. 2. Зависимости изменения радиальных напряжений от приведенного расстояния (r/r_0):
1, 2, 3, 4 – соответственно вычисленные по выражениям (7), (12), (14), (13)
и 5 – результаты экспериментов

Fig. 2. Dependences of the change in radial stresses on the reduced distance (r/r_0):
1, 2, 3, 4 – respectively calculated from the expressions (7), (12), (14), (13)
and 5 – experimental results

Как видно из результатов экспериментов, для песков средней крупности активная область сжатия $-H_s = 3d = 6r_0$.

Горизонтальные внешние гравитационные напряжения p_2 могут определяться из условия равенства

$$p_2 = \sigma_{zgx} = \xi \gamma_{zg} z, \quad (8)$$

где γ_{zg}, z и ξ – соответственно средневзвешенная величина удельного веса грунта, глубина слоя и коэффициент бокового давления грунта.

С учетом условия $\sigma_t \cong 0$ рассмотрим решение однородного дифференциального уравнения (2). Преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_r} + \frac{dr}{r} = 0. \quad (9)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (9) записывается в следующем виде:

$$\ln \sigma_r = \ln \left(\frac{C}{r} \right) \text{ или } \sigma_r = \frac{C}{r}, \quad (10)$$

где C – постоянная интегрирования, определяется из граничных условий при $r = r_0$ и $\sigma_r = p_2$, откуда $p_2 = \frac{C}{r_0}$ или $C = p_2 r_0$. Итак, окончательно выражение (10) запишем в виде

$$\sigma_r = p_2 \frac{r_0}{r}. \quad (11)$$

Как показали результаты лотковых экспериментов (см. рис. 2), в грунтовой среде радиальные напряжения σ_r уменьшаются более интенсивно и при $\left(\frac{r_0}{r}\right) = \left(\frac{r_0}{6r_0}\right) \cong 0$ удовлетворяется условие $\sigma_r \cong 0$. Поэтому выражение (11) для практических целей с точностью применительно к грунтам можно написать в виде степенной функции вида

$$\sigma_r = p_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^k, \quad (12)$$

где k – коэффициент, определяемый экспериментальным путем, в зависимости от вида грунта изменяется в пределах $k = 1,5 \dots 2,5$.

Таким требованиям также удовлетворительно отвечает координатная функция вида

$$\sigma_r = p_1 \left[-0,0184 \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 + 0,22 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1,1946 \left(\frac{r}{r_0}\right) + 1,9477 \right]. \quad (13)$$

Или в более компактном виде

$$\sigma_r = p_2 \exp[-k(r - r_0)], \quad (14)$$

где $k = (1 - 1,5)$ – коэффициент, определяемый экспериментом.

Например, для выражений (12) при $r = 6r_0$ $(\sigma_r - \sigma_{zg}) = p_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0,028 p_2$; для выражения (13) $(\sigma_r - \sigma_{zg}) = 0,0253 p_2$ и для выражения (14) при $k = 1$ $(\sigma_r - \sigma_{zg}) = 0,007 p_2$.

Вычисленные результаты сравнивались с экспериментальной кривой перемещений с максимумом $\sigma_{r_{\max}} = f(u) = 1$.

Как видно из представленного графика, результатам эксперимента отвечают координатные функции (12)–(14).

Рассмотрим случай, когда $p_2 > p_1$. В этом случае как радиальные, так и тангенциальные напряжения положительные, т.е. грунт в этом направлении работает на сжатие. Если эти напряжения принять как главные, то в соответствии с теорией прочности Кулона – Мора они должны удовлетворять условию

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{\sigma_t + \sigma_r + 2c \cot \varphi}. \quad (15)$$

Подставляя в выражение (15) величины (7), получим:

$$\begin{aligned} & (p_2 - p_1)r_0^2, \\ & \frac{p_1 - 36p_2}{35}, \\ \sin \varphi &= \frac{C + \frac{D}{r^2} - C + \frac{D}{r^2}}{C - \frac{D}{r^2} + C + \frac{D}{r^2} + 2c \cot \varphi} = \frac{\frac{D}{r^2}}{C + c \cot \varphi}, \end{aligned}$$

$$\sin \varphi = \frac{(p_2 - p_1) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2}{\frac{p_1 - 36p_2}{35} + c \cot \varphi}.$$

Предположим, что внутри скважины $p_1 = 0$, в этом случае, решив задачу по отношению к предельной нагрузке p_2 , получим:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{p_2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2}{-p_2 + c \cot \varphi}, \\ (c \cos \varphi) &= p_2 \left[\sin \varphi + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \\ p_2 &= \frac{c \cos \varphi}{\left[\sin \varphi + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (16)$$

При $r = r_0$ и $r = 6r_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \cong 0$, $p_{2u} = \frac{c \cos \varphi}{[\sin \varphi + 1]}$ и $p_{2u} = c \cot \varphi$.

С учетом (8)

$$z = \frac{c}{\xi \gamma} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + 1} \right), \quad z = \frac{c}{\xi \gamma} \cot \varphi.$$

Пример. Требуется определить максимальную глубину скважины, где выполняются условия прочности и устойчивости грунтов: $p_2 > p_1$, $c = 20$ кПа, $\varphi = 30^\circ$, $\gamma = 16$ кН/м³, $\xi = 0,2$.

$$z = \frac{c}{\xi \gamma} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + 1} \right) = \frac{20}{0,2 \cdot 16} \left(\frac{0,87}{0,5 + 1} \right) = 4 \text{ м},$$

$$z = \frac{c \cot \varphi}{\xi \gamma} = \frac{20 \cdot \cot 30^\circ}{0,2 \cdot 16} = \frac{35}{3,2} = 11 \text{ м}.$$

Иными словами, на глубине 4 м на поверхности стенки скважины возрождаются начальные условия прочности и полное ее формирование завершается на глубине 11 м.

Напомним, что для грунтов, расположенных глубже грунтовых вод, необходимо принимать $\gamma = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e}$.

Выводы

1. Для определения радиальных и тангенциальных напряжений в скважине с внутренним эффективным давлением $\sigma_r = p_1$ использование уравнения теории упругости приводит к медленному его убыванию по горизонтали, что не наблюдается на практике.

2. Наиболее близкие величины σ_r для грунтов, полученные авторами, описаны в выражениях (12)–(14).

3. Экспериментально доказано, что величина активной области сжатия для грунтовых скважин с внутренним эффективным давлением p_1 приблизительно равна $H_s \cong 6r_0$, что практически в два раза превышает показатель, полученный для штамповых испытаний в условиях полупространства.

4. Получены математические выражения прочности и устойчивости скважин от гравитационных нагрузок грунта.

Библиографический список

1. Глушков Г.С., Синдеев В.А. Курс сопротивления материалов. – М.: Высшая школа, 1965. – 767 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т. – М.: Дрофа, 2004. – Т. 2. – 720 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 735 с.
5. Хасанов А.З., Хасанов З.А. Основания и фундаменты на лессовых просадочных грунтах. – Ташкент: Изд-во ИПТД «Узбекистон», 2006.
6. Хасанов А.З., Хасанов З.А. Экспериментально-теоретические исследования прочности и устойчивости грунтов. – Самарканд: Zarafshon, 2015.
7. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Высшая школа, 1983. – 288 с.
8. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты: учебник для вузов. – 2-е изд. – Л.: Стройиздат, 1988. – 415 с.
9. Терцаги К. Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
10. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 551 с.

References

1. Glushkov G.S., Sindeev V.A. Kurs soprotivleniya materialov [Material resistance course]. Moscow, Higher School Publishing House, 1965, 767 p.
2. Kudryavtsev L.D. Kurs matematicheskogo analiza [The course of mathematical analysis]. Vol. 2. Moscow, Drofa, 2004, 720 p.
3. Lurie A.I. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 940 p.
4. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Publishing House Mosk. University, 1977, 735 p.
5. Khasanov A.Z., Khasanov Z.A. Osnovaniya i fundamenti na lessovykh prosadochnykh gruntakh [Foundations and foundations on loess subsidence soils]. Tashkent, Uzbekistan, 2006.
6. Khasanov A.Z., Khasanov Z.A. Eksperimental'no-teoreticheskiye issledovaniya prochnosti i ustoychivosti gruntov [Experimental and theoretical studies of the strength and stability of soils]. Samarkand, Zarafshon, 2015.
7. Tsytovich N.A. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moscow, Higher School, 1983, 288 p.
8. Dalmatov B.I. Mekhanika gruntov, osnovaniia i fundamenti [Soil mechanics, bases and foundations]. 2nd ed. Leningrad, Stroiizdat, 1988, 415 p.
9. Tertsagi K. Teoriia mekhaniki gruntov [The theory of soil mechanics]. Moscow, Gosstroizdat, 1961, 507 p.
10. Ter-Martirosian Z.G. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moscow, ASV, 2009, 551 p.