



CONSTRUCTION AND GEOTECHNICS

Т. 11, № 1, 2020

<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2020.1.02

УДК 624.131

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА НАКЛОНА НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЙ ПЛОЩАДКИ РАЗРУШЕНИЯ В ТОЧКЕ ГРУНТОВОГО МАССИВА

О.А. Богомолова¹, А.В. Жиделев²

¹Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

²Филиал Московского авиационного института «Взлет», Ахтубинск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 20 ноября 2019
Принята: 20 января 2020
Опубликована: 27 марта 2020

Ключевые слова:

грунтовой массив, наиболее вероятная площадка разрушения (сдвига), угол ориентации площадки сдвига, наиболее вероятная линия скольжения или выпора грунта (след наиболее вероятной поверхности выпора или скольжения грунта, экстремаль), физико-механические свойства грунта, напряженное состояние, коэффициент запаса устойчивости в точке грунтового массива и самого массива, равноустойчивые зоны.

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены три подхода к определению угла наклона наиболее вероятной площадки разрушения в точке грунтового массива. Показано, что величина коэффициента запаса устойчивости в точке, расположенной в толще грунта, существенно зависит от угла ориентации площадки разрушения, который, в свою очередь, является функцией геометрических параметров (формы поперечного сечения) исследуемого грунтового массива, его напряженного состояния и физико-механических свойств слагающего массива грунта: удельного сцепления, угла внутреннего трения, плотности и коэффициента бокового давления. Сопоставление результатов многочисленных вычислений позволяет сделать вывод о том, что в грунтовом массиве имеются так называемые равноустойчивые зоны, которые характеризуются тем, что величины коэффициентов запаса устойчивости, вычисленные для поверхностей скольжения или выпора, расположенных внутри этих зон, для каждого конкретного объекта либо совпадают, либо отличаются друг от друга весьма незначительно. Это обстоятельство обуславливает то, что процесс скольжения (сползания) грунтовой массы, если рассматривается оползневой процесс, или выпора грунта из-под фундамента, когда рассматривается вопрос об определении несущей способности основания сооружения, происходит не по так называемой поверхности разрушения – в предельное состояние переходит некая прослойка грунта, внутри которой располагается наиболее вероятная поверхность скольжения или выпора. На основании сопоставления результатов выполненных расчетов сделан вывод о необходимости проведения операции по отысканию углов ориентации площадок разрушения на основе анализа напряженно-деформированного состояния грунтового массива с учетом физико-механических свойств слагающего грунта.

© ПНИПУ

© Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, OrcidID: 0000-0003-1163-6285, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Жиделев Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, директор, e-mail: redskorhion@mail.ru.

DETERMINATION OF AN INCLINATION ANGLE OF THE MOST PROBABLE DESTRUCTION SITE AT THE GROUND POINT

O.A. Bogomolova¹, A.V. Zhidelev²

¹Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

²A Branch of the Moscow Aviation Institute "Vzlet", Akhtubinsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 20 November 2019
Accepted: 1 October 2019
Published: 27 March 2020

Keywords:

soil massif, the most probable area of destruction (shear), the angle of orientation of the shear area, the most probable line of sliding or uplift of the soil (trace of the most probable surface of the uplift or gliding of the soil, extreme), physical and mechanical properties of the soil, stress state, safety factor stability at the point of the soil massif and the massif itself, equally stable zones.

ABSTRACT

The paper considers three approaches to determining the angle of inclination of the most likely fracture site at a point in the soil mass. It is shown that the value of the safety factor at a point located in the thickness of the soil substantially depends on the orientation angle of the fracture site, which, in turn, is a function of the geometric parameters (cross-sectional shape) of the studied soil mass, its stress state, and the physico-mechanical properties of the component soil mass: specific adhesion, angle of internal friction, density and lateral pressure coefficient. Comparison of the results of numerous calculations allows us to conclude that in the soil mass there are so-called equidistant zones, which are characterized by the fact that the values of the safety margins calculated for the sliding or abutment surfaces located inside these zones for each specific object either coincide, or differ from each other very slightly. This circumstance leads to the fact that the process of sliding (sliding) of the ground mass, if a landslide process is considered, or the soil is burst out from under the foundation when the question of determining the bearing capacity of the foundation of the structure is considered, does not take place on the so-called fracture surface, but passes to the limiting state a certain layer of soil, inside of which there is the most likely surface of sliding or abutment. Based on a comparison of the results of the calculations, it is concluded that it is necessary to conduct an operation to find the orientation angles of the fracture sites based on the analysis of the stress-strain state of the soil mass taking into account the physico-mechanical properties of the composing soil.

© PNRPU

При решении задач об устойчивости грунтовых массивов (естественных склонов, откосов выемок и насыпей, оснований сооружений и т.д.) возникает необходимость построения наиболее вероятной или, как ее еще называют, наиболее опасной (экстремальной) поверхности скольжения (НВПС) или выпора (НВПВ) грунта. Если задача решается в плоской постановке, то речь идет о следах этих поверхностей, которые, как это принято в инженерной практике, называют наиболее вероятными линиями скольжения или выпора грунта. Местоположение и форма этих линий зависят от геометрии грунтового массива, его напряженного состояния и физико-механических свойств грунта, его слагающего. Перечисленные выше факторы функционально определяют численное значение угла ориентации площадок наиболее вероятного сдвига в точках исследуемой области. Под наиболее вероятной площадкой сдвига будем понимать одну из множества возможных площадок сдвига в каждой точке рассматриваемого грунтового массива, величина расчетного коэффициента запаса устойчивости для которой $K_t = K_{t \min}$. Если $K_{t \min} > 1$, то точка находится в допредельном состоянии, если $K_{t \min} = 1$ – в предельном.

Если при расчете используются методы, предполагающие какую-то определенную форму НВЛВ (например, методы, основанные на гипотезе о круглоцилиндрической форме поверхности скольжения [1–8]), то нет необходимости определять ориентацию площадки наиболее вероятного сдвига (угол $\alpha_{\text{экт}}$). В этом случае наиболее вероятная линия разрушения определяется подбором, как линия, для которой расчетная величина коэффициента запаса устойчивости грунтового массива $K = K_{\min}$.

Если в качестве расчетных выбираются вариационные методы [9–12], то в процедуре отыскания значения угла $\alpha_{\text{экт}}$ также нет необходимости, так как соответствующая экстремаль отыскивается с помощью варьирования формы и положения линий скольжения. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не отыскивается линия, для которой $K = K_{\text{min}}$.

Как видно, оба этих подхода не позволяют с первого раза однозначно построить экстремаль и определить искомое значение коэффициента запаса устойчивости. Этот недостаток может быть устранен, если для решения задачи об устойчивости грунтового массива использовать методы, основанные на численном [13–18] или аналитическом [19–23] анализе напряженного состояния исследуемых областей. Использование этих методов позволяет сразу и однозначно определить величину угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига.

Рассмотрим три подхода к решению задачи о нахождении угла ориентации наиболее вероятной площадки сдвига в точке грунтового массива, которые основаны на анализе напряженного состояния исследуемой области:

1. Способ отыскания угла $\alpha_{\text{эктр}}$, предложенный В.К. Цветковым [19]

Известно [1], что величина коэффициента запаса устойчивости в точке грунтового массива K_t определяется выражением, полученным на основании условия прочности Кулона [24]:

$$K_t = \frac{\sigma_n \operatorname{tg}\varphi + C}{\tau_n}. \quad (1)$$

Если заменить напряжения σ_n и τ_n в формуле (1) напряжениями σ_y , σ_x , τ_{xy} , получим выражение

$$K_t = \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) + \tau_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_{\text{св}} \right] \operatorname{tg}\varphi}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha}. \quad (2)$$

Очевидно, что условиями минимизации величины K_t по параметру α будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K_t}{\partial \alpha} &= 0; \\ \frac{\partial^2 K_t}{\partial \alpha^2} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Выполнение первого из условий (3) сводится к решению квадратного уравнения, корни которого определяются по формуле

$$\sin 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{xz}}{B} \pm (\sigma_z - \sigma_x) \sqrt{\frac{D - B^2}{B^2 D}}, \quad (4)$$

где

$$B = (\sigma_z + \sigma_x + \sigma_{\text{св}}); \quad (5)$$

$$D = 4\tau_{xz}^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2. \quad (6)$$

Выбирать из двух полученных углов следует тот, при подстановке значения которого во второе условие (3.21) будет выполняться неравенство

$$D - \frac{2\tau_{xz}(\sigma_z - \sigma_x) + [(\sigma_z - \sigma_x) \sin 2\alpha - 2\tau_{xz} \cos 2\alpha]^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha + B^{-1}[(\sigma_z - \sigma_x) \sin 2\alpha + 2\tau_{xz} \cos 2\alpha]} > 0. \quad (7)$$

Оказалось, что величина угла α , при котором значение коэффициента устойчивости в рассматриваемой точке $K_t = K_{t\min}$, соответствует знаку «+» перед радикалом в формуле (4).

Из формул (4)–(7) следует, что угол $\alpha_{\text{экстр}}$ является функцией напряженного состояния, физико-механических свойств и характерного размера грунтового массива (в случае откоса это h – его высота).

На рис. 1 приведены графические зависимости величины коэффициента устойчивости K_t в точке грунтового массива по наклонной площадке, угол наклона которой изменяется от 0 до 90°. Величины безразмерных (в долях γh) напряжений в точке приоткосной области определены методом конечных элементов [25, 26]: $\sigma_x = 1,3$; $\sigma_y = 5,6$; $\tau_{xy} = 2$, а физико-механические свойства грунта таковы, что давление связности $\sigma_{\text{св}} = 1,4$, а угол внутреннего трения $\varphi = 28,6^\circ$.

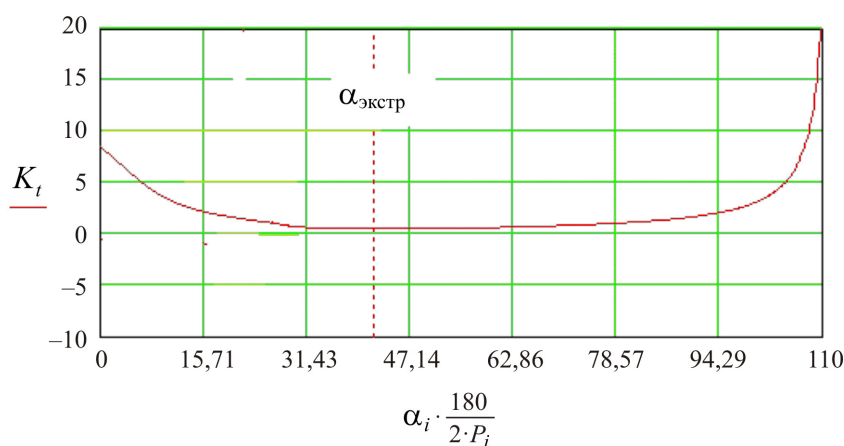


Рис. 1. Графическая зависимость вида $K_t = f(\alpha)$

Fig. 1. Graphic of the form $K_t = f(\alpha)$

Из рис. 1 видно, что экстремальное значение K_t соответствует величине $\alpha_{\text{экстр}} = 42^\circ$, определенной на основе исследования выражения (2) на экстремум. Величина коэффициента запаса устойчивости в рассматриваемой точке $K_t = 1,08$.

2. Способ отыскания угла $\alpha_{\text{экстр}}$, предложенный А.Н. Богомоловым и основанный на использовании понятия остаточного сопротивления сдвигу [20, 21]

Рассмотрим еще один способ определения угла наиболее вероятного сдвига, для чего составим выражение

$$f_{\text{ост}} = C + \sigma_n \cdot \text{tg}\varphi - \tau_n, \quad (8)$$

где $f_{\text{ост}}$ – остаточное сопротивление сдвигу [20, 21].

Выразив нормальное и касательное напряжения, действующие по наклонной площадке, через компоненты напряжения σ_y , σ_x , τ_{xy} и угол ее наклона α , подставив их в выражение (8), а затем применив к полученному выражению условия (3), найдем величину угла наклона площадки, которому соответствует минимальное значение величины остаточного сопротивления сдвигу $f_{\text{ост}\min}$. При вычислениях используем те же значения напряжений и физико-механических свойств грунта, что указаны в предыдущем примере.

На рис. 2 приведены кривые зависимостей величины коэффициента запаса устойчивости K_t , остаточного сопротивления сдвигу $f_{ост}$, удерживающих $f_{уд}$ и сдвигающих $f_{сд}$ сил, вычисленных в исследуемой точке приоткосной области. При этом величина угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига изменяется в интервале $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$.

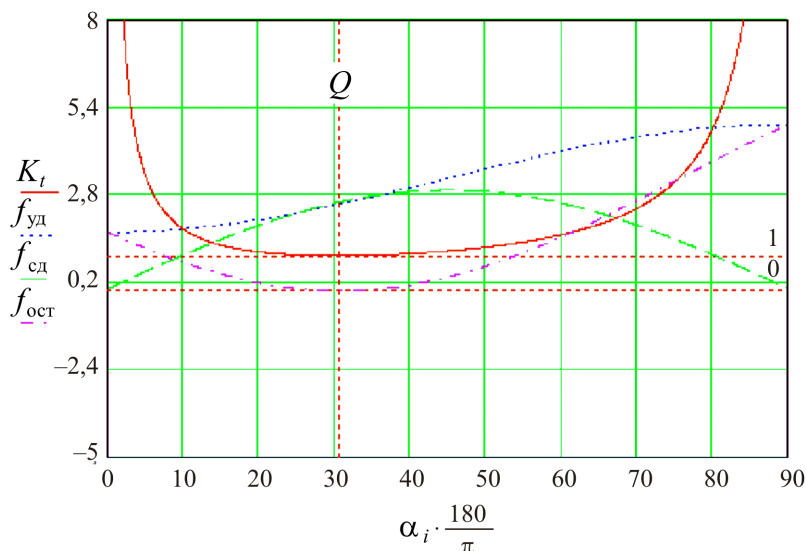


Рис. 2. Графические зависимости вида $K_t = f(\alpha_{эктр})$; $f_{ост} = f(\alpha_{эктр})$; $f_{уд} = f(\alpha_{эктр})$ и $f_{сд} = f(\alpha_{эктр})$ для рассматриваемой точки приоткосной области
 Fig. 2. Graphic dependencies of the form $K_t = f(\alpha_{эктр})$; $f_{ост} = f(\alpha_{эктр})$; $f_{уд} = f(\alpha_{эктр})$ and $f_{сд} = f(\alpha_{эктр})$ for the considered point of the abutment region

Из рис. 2, иллюстрирующего результаты проведенных вычислений, видно, что минимум значения остаточного сопротивления сдвигу $f_{ост}$ соответствует площадке, ориентированной к оси абсцисс под углом $\alpha_{эктр} = 31^\circ$. Отметим, что данное значение на 11° меньше значения угла $\alpha_{эктр}$, определенного первым способом, разница составляет 24 %. Однако значения соответствующих коэффициентов запаса устойчивости K_t для первого ($K_t = 1,08$) и второго ($K_t = 1,044$) способов, вычисленных по формуле (2), отличаются менее чем на 4 %.

Последнее обстоятельство подтверждает обоснованное в работах [19–21] положение о том, что в приоткосных грунтовых массивах, активных зонах фундаментов и т.д. имеются так называемые равноустойчивые области, которые характеризуются тем, что величины коэффициентов запаса устойчивости, вычисленные для поверхностей скольжения или выпора, расположенных внутри этих зон, для каждого конкретного объекта, либо совпадают, либо отличаются друг от друга весьма незначительно. Это обуславливает то, что процесс скольжения (сползания) грунтовой массы, если рассматривается оползневой процесс, или выпора грунта из-под фундамента, когда рассматривается вопрос об определении несущей способности основания сооружения, происходит не по так называемой поверхности разрушения – в предельное состояние переходит некая прослойка грунта, внутри которой располагается наиболее вероятная поверхность скольжения или выпора.

3. Способ, основанный на использовании диаграмм сдвига (кругов Мора) [22, 23]

Известно, что нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения, действующие в направлениях главных осей, могут быть выражены через соответствующие главные напряжения следующим образом:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (9)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin 2\alpha. \quad (10)$$

На рис. 3 в качестве примера представлены геометрическая интерпретация соотношения (9) в системе координат $(\sigma; \tau)$ и соответствующие круги Мора.

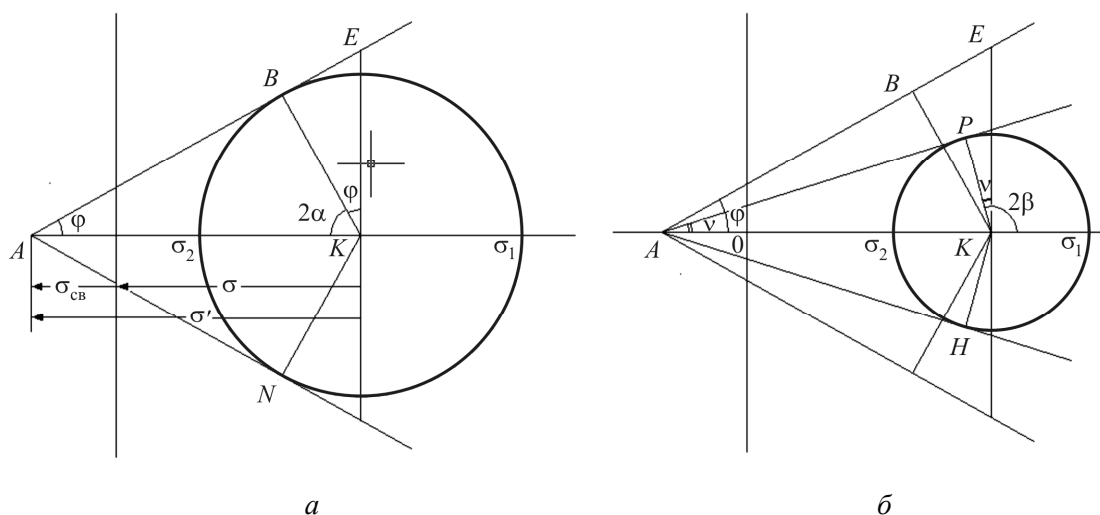


Рис. 3. Круги Мора для предельного (а) и допредельного (б) состояния в точке грунтового массива
 Fig. 3. Mora circles for the limiting (a) and prelimiting (b) state at the point of the soil massif

Величина коэффициента запаса устойчивости в точке грунтового массива определяется отношением

$$K_t = \frac{\sin \varphi}{\sin \nu} = \frac{\varphi}{\nu}. \quad (11)$$

В предельном состоянии эта величина равна единице и растет по мере снижения нагрузки. При $K_t \geq 1$ нагрузка меньше критической для всех углов α . Поэтому величину K_t можно называть коэффициентом запаса устойчивости грунта в точке. Линия, в каждой точке которой выполняется равенство $K_t = 1$, также является границей области предельного состояния грунта.

Числитель выражения (11) $\sin \varphi = \frac{BK}{AK}$ определен прочностными свойствами грунта, а знаменатель $\sin \nu = \frac{PK}{AK} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + 2C \operatorname{ctg} \varphi}$ – фактическими напряжениями, действующими в рассматриваемой точке, и физико-механическими свойствами грунтового массива. В допредельном состоянии $\nu < \varphi$, так как $PK < BK$. По мере роста напряжений (нагрузки) угол ν увеличивается. При достижении предельного напряженного состояния (рис. 3, а) выполняются условия $PK = BK$ и $\sin \varphi = \sin \nu$, вытекающие из выражения (10). Отрезок KB указывает направление максимального касательного напряжения в момент достижения предельного напряженного состояния.

Из рис. 3, б видно, что в предельном состоянии $\angle AKB = \angle AKN = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ соответственно. Обозначив через α угол, составляемый направлением $\overline{\sigma_1}$ и направлением максимального касательного напряжения $\overline{\tau_{\max}}$, получим

$$2\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ или } \alpha = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (12)$$

Угол α не зависит от того, при каких значениях главных напряжений σ_1 и σ_2 наступает предельное состояние.

Авторы работ [19, 20] считают, что выражение для определения величины угла α справедливо не только для критической, но и для любых, меньших по величине нагрузок. Это означает, что для площадки, ориентированной под углом α , разность между удерживающей и сдвигающей силами будет заведомо меньше, чем для любой другой площадки, угол ориентации которой $\beta \neq \alpha$.

Угол отклонения направления действия напряжения σ_1 от оси x расчетной схемы равен углу θ , определяемому по формуле

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right). \quad (13)$$

Таким образом, угол наклона вектора максимального касательного напряжения τ_{\max} , а значит, и площадки наиболее вероятного сдвига относительно оси X расчетной схемы

$$Q = \alpha + \theta = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right). \quad (14)$$

Вычисленное по формуле (14) значение угла Q используется, например, в работах [20, 21] для построения наиболее вероятной линии скольжения. Анализ этого выражения показывает, что величина угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига является функцией напряженного состояния и угла внутреннего трения.

В результате выполненных вычислений по формуле (14), при численных значениях напряжений в исследуемой точке, которые использованы в двух предыдущих примерах, определены два значения угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига: $\alpha_{\text{экрт}1} = 11^\circ$ и $\alpha_{\text{экрт}2} = 74^\circ$. При сравнении полученных значений углов ориентации наиболее вероятной площадки сдвига с численными значениями соответствующих углов, полученных в первых двух случаях, видно, что разница составляет 2–3 раза. Кроме того, из графиков, приведенных на рис. 1, 2, видно, что при углах $\alpha_{\text{экрт}1} = 11^\circ$ и $\alpha_{\text{экрт}2} = 74^\circ$ численные значения коэффициентов запаса устойчивости K , в рассматриваемой точке грунтового массива существенно больше, чем при $\alpha_{\text{экрт}} = 42^\circ$ (первый случай) и $\alpha_{\text{экрт}} = 31^\circ$ (второй случай).

На основании результатов проведенных исследований можно утверждать следующее:

1. В приоткосных грунтовых массивах, активных зонах фундаментов и т.д. имеются так называемые равноустойчивые области, которые характеризуются тем, что величины коэффициентов запаса устойчивости, вычисленные для поверхностей скольжения или выпора, расположенных внутри этих зон, для каждого конкретного объекта либо совпадают, либо отличаются друг от друга весьма незначительно.

2. Отыскание угла ориентации площадки наиболее вероятного сдвига следует проводить на основе анализа напряженного состояния грунтового массива с учетом физико-механических свойств грунта, например, методами, изложенными в [19–21].

Библиографический список

1. Феллениус В. Статика грунтов. – М.: Стройиздат, 1933. – 50 с.
2. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams // Transactions of II Congress on Large Dams. – 1933. – Vol. 4. – P. 445–462.
3. Cagout G. Eguilibre des massifs a frottement interne. – Paris, 1934.
4. Bogomolov A., Ponomaryov A., Bogomolova O. Assessment of slope stability on the basis of soil mass stress state analysis // ICSMGE 2017. 19th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. (2017-September). – 2017. – P. 2095–2098.
5. Tscytbatarioff G. Foundations, retaining and earth structures. – New York: McCraw-Hill Book Company, 1973.
6. Fredlund D.G., Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis // Can. Geotechn. J. – 1977. – № 3.
7. Hovland H.J. Three-dimensional slope stability analysis method // J. Geotechn. Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. – 1977. – № 9.
8. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.; Л.: АН СССР, 1942.
9. Azzous A.S., Baligh M.M. Loaded areas on cohesive slopes // J. of Geotechn. Engineering. – 1983. – No. 5, vol. 109.
10. Магдеев У.Х., Ниязов Р.А. Применение вариационного метода при расчете устойчивости оползневых склонов в лессовых породах (на примере Саукбулакская) // Геодинамические процессы и явления Средней Азии. – Ташкент, 1973.
11. Гольдштейн М.Н. Вариационный метод решения задач об устойчивости грунтов // Вопросы геотехники: тр. ДИИТ. – Киев, 1969. – № 16.
12. Дорфман А.Г. Вариационный метод исследования устойчивости откосов // Вопросы геотехники: сб. науч. тр. – М.: Транспорт, 1965. – № 9.
13. Nakoto S., Kiyoshi J. Probabilistic finite element method for Slopes stfbility analysis // Proc. Jap., Soc. Civil Engintring. – 1985. – № 364.
14. Wang F.D., Sun M.C., Ropchan D.M. Compyter program for pit slope stability analysis bee the finite element stress analysis and limiting equilibrium Method // RJ 7685. Burin of Mints, 1972.
15. Desai C.S., Lightner J.G. Mixed fenite element procedure for Soil-Structure iteration and construction sequences// Inter. J. for Numerical Mhetods in Engineering. – 1985. – No. 5, vol. 21.
16. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987.
17. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979.
18. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Применение метода конечных элементов при решении задач горной механики. – М.: Недра, 1975.
19. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
20. Богомолов А.Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1996.

21. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики. – Волгоград: ВолгГАСУ: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2014. – 227 с.
22. Соловьев Ю.И. Устойчивость откосов из гипотетического грунта // Труды НИИЖТ, 1962, вып. 28.
23. Никитин С.Н. Построение ожидаемой поверхности скольжения по напряжения в бортах карьеров // Уголь. – 1962. – № 1.
24. Coulomb C. Application des riles de maxim us et minims a quelques problems de statique relatives an L`architecture. – Memories de savants strangers de L`Academlie des sciences de Paris, 1773.
25. FEA: св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2015617889 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 23 июля 2015 г.
26. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2009613499 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 30 июня 2009 г.

References

1. Fellionius V. Statika gruntov [Statics of soils]. Moscow, Stroyizdat, 1933, 50 p.
2. Fellenius W. Calculation of the stability of earth dams. *Transactions of II Congress on Large Dams*, 1933, vol. 4, pp. 445-462.
3. Cagout G. Eguilibre des massifs a frottemenet interne. Paris, 1934.
4. Bogomolov A., Ponomaryov A., Bogomolova O. Assessment of slope stability on the basis of soil mass stress state analysis. *ICSMGE 2017 - 19th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2017, pp. 2095–2098.
5. Tscytbatarioff G. Foundations, retaining and earth structures. New-York, McCraw-Hill Book Company, 1973.
6. Fredlund D.G., Krahn J. Comparison of slope stability methods of analysis. *Can. Geotechn. J.*, 1977, no. 3.
7. Hovland H.J. Three-dimensional slope stability analysis method. *J. Geotechn. Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng*, 1977, no. 9.
8. Sokolovsky V.V. Statika sypuchey sredy [Statics of a loose medium]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR, 1942.
9. Azzous A.S., Baligh M.M. Loaded areas on cohesive slopes. *J. of Geotechn. Engineering*, 1983, vol. 109, no. 5.
10. Magdeev U.Kh., Niyazov R.A. Primeneniye variatsionnogo metoda pri raschete ustoychivosti opolznevykh sklonov v lessovykh porodakh (na primere Saukbulaksaya) [The use of the variational method in calculating the stability of landslide slopes in loess rocks (on the example of Saukbulaksay)]. *Geodynamic processes and phenomena of Central Asia*. Tashkent, 1973.
11. Goldshtein M. N. [The variational method for solving problems of soil stability]. *Voprosy geotekhniki. Trudy DIIT*. Kiev, 1969, no. 16.
12. Dorfman A.G. [A variational method for studying the stability of slopes]. *Voprosy geotekhniki. Sbornik nauchnykh trudov*. Moscow, Transport, 1965, no. 9.
13. Nakoto S., Kiyoshi J. Probabilistic finite element method for Slopes stfbility analysis. *Proceedings Jap., Soc. Civil Engintring*, 1985, no. 364.
14. Wang F.D., Sun M.C., Ropchan D.M. Compyter program for pit slope stability analysis bee the finite element stress analysis and limiting equilibrium Method. *RJ 7685. Burin of Mints*, 1972.

15. Desai C.S., Lightner J.G. Mixed finite element procedure for Soil-Structure interaction and construction sequences. *Inter. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1985, vol. 21, no. 5.

16. Fadeev A.B. Metod konechnykh elementov v geomekhanike [The finite element method in geomechanics]. Moscow, Nedra, 1987.

17. Segerlind L. Primeneniye metoda konechnykh elementov [Application of the finite element method]. Moscow, Mir, 1979.

18. Amusin B.Z., Fadeev A.B. Primeneniye metoda konechnykh elementov pri reshenii zadach gornoy mekhaniki [Application of the finite element method in solving problems of mining mechanics]. Moscow, Nedra, 1975.

19. Tsvetkov V.K. Raschet ratsional'nykh parametrov gornykh vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow, Nedra, 1993, 251 p.

20. Bogomolov A.N. Raschet nesushchey sposobnosti osnovaniy sooruzheniy i ustoychivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoy postanovke [Calculation of the bearing capacity of the foundations of structures and the stability of soil masses in an elastoplastic setting]. Perm, PSTU, 1996.

21. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki [Methods of the theory of functions of a complex variable in problems of geomechanics]. Volgograd, VolgGASU, VGSPU "Change", 2014, 227 p.

22. Soloviev Yu.I. Ustoychivost' otkosov iz gipoteticheskogo grunta [The stability of slopes from a hypothetical soil]. *Proceedings of NIIZhT*, 1962, no. 28.

23. Nikitin S.N. Postroyeniye ozhidayemoy poverkhnosti skol'zheniya po na-pryazheniya v bortakh kar'yerov [Construction of the expected sliding surface along the stress in the sides of the quarries]. *Ugol'*, 1962, no. 1.

24. Coulomb C. Application des riles de maxim us et minims a quelques problems de statique relatives an L'architecture. *Memories de savants strangers de L'Academiie des sciences de Paris*, 1773.

25. Bogomolov A.N. FEA. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2015617889* (2015).

26. Bogomolov A.N. Ustoichivost' (Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie) [Stability (Stress-strain state)]. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2009613499* (2009).