

DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.01

УДК 519.67

В.В. Слепцов^{1,2}, А.Д. Лагунова², А.Е. Аблаева²

¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук, Москва, Россия

² МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ, АНАЛИЗ И СИНТЕЗ КОРНЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассматривается метод приближенного определения, анализа и синтеза корней действительных алгебраических уравнений высокого порядка. Решение таких задач актуально в случае проектирования информационно-измерительных и управляющих систем, исследования динамики движения различных механизмов (промышленных роботов, квадрокоптеров и пр.), определения траекторий перемещения летательных аппаратов и т.п.

Аналитическое решение таких задач ограничивается уравнениями третьей (иногда четвертой) степени, в других случаях необходимо использование либо специальных последовательных алгоритмов, либо пакетов прикладных компьютерных программ типа Wolfram.Matematica, которые позволяют лишь найти корни уравнений, но не синтезировать их.

Предлагаемый метод основан на применении для разложения исследуемого многочлена (соответствующего уравнению) на простейшие множители, соответствующие апериодическим или (и) колебательным звеньям, асимптотических логарифмических амплитудно- и фазочастотных характеристик. О виде и значениях корней уравнения предложено судить по наклонам в точках излома логарифмических амплитудно- и фазочастотной характеристик исследуемого многочлена. Построение логарифмических амплитудно- и фазочастотной характеристик осуществляется путем отбрасывания «малых» членов многочлена на отдельных частотных интервалах.

Особенностью метода является возможность его использования как совместно с компьютером, так и без него. «Ручное» использование метода предполагает наличие у пользователя калькулятора и линейки. Метод позволяет определять не только корни действительных алгебраических уравнений (как действительные, так и комплексные), но и устанавливать наглядную взаимосвязь между коэффициентами при членах уравнений с видом и значениями корней и целенаправленно изменять нужные коэффициенты для изменения параметров и вида корней.

Возможности метода не ограничиваются решением действительных алгебраических уравнений с положительными коэффициентами и целыми степенями, он показывает вполне удовлетворительные результаты для уравнений со смешанными коэффициентами и дробными степенями.

Метод достаточно прост, нагляден, обладает малой погрешностью в случае далеко разнесенных корней, однако в случае близко расположенных корней его погрешность возрастает, хотя и остается вполне допустимой.

В статье приведено обоснование метода, показаны на многочисленных примерах его возможности, проведено сравнение получаемых результатов с результатами, полученными с помощью пакета прикладных компьютерных программ Wolfram.Matematica.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики, корни уравнения, вектор, сложение векторов, фазовый сдвиг, круговая частота, модуль, комплексное число, мнимая и действительная часть, погрешность, многочлен, степень многочлена, неминимально и минимально-фазовые звенья, погрешность, преобразование Фурье.

V.V. Sleptsov^{1,2}, A.D. Lagunova², A.E. Ablaeva²

¹ Mechanical Engineering Research Institute

of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

² MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation

DETERMINATION, ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THE ROOTS OF VALID ALGEBRAIC EQUATIONS USING LOGARITHMIC AMPLITUDE-PHASE FREQUENCY CHARACTERISTICS

The article considers the method of approximate determination, analysis and synthesis of the roots of real algebraic equations of high order. The solution of such problems is relevant in the case of designing information-measuring and control systems, studying the dynamics of movement of various mechanisms (industrial robots, quadcopters, etc.), determining the trajectories of aircraft, etc.

The analytical solution of such problems is limited to equations of the third (sometimes fourth) degree, in other cases it is necessary to use either special sequential algorithms or packages of applied computer programs such as "Wolfram.Matematica", which allow only to find the roots of the equations, but not to synthesize them.

The proposed method is based on the application for the decomposition of the studied polynomial (corresponding to the equation) into the simplest multipliers corresponding to aperiodic and/or oscillatory links, asymptotic logarithmic amplitude and phase-frequency characteristics. The form and values of the roots of the equation are proposed to be judged by the slopes at the fracture points of the logarithmic amplitude and phase-frequency characteristics of the polyparticle under study. The construction of logarithmic amplitude and phase-frequency characteristics is carried out by discarding the "small" terms of the polygamy at separate frequency intervals.

A feature of the method is the possibility of its use both in conjunction with the computer and without it. Manual use of the method assumes that the user has a calculator and a ruler. The method allows to determine not only the roots of real algebraic equations (both real and complex), but also to establish a visual relationship between the coefficients for the terms of the equations with the type and values of the roots and purposefully change the necessary coefficients to change the parameters and type of roots.

The possibilities of the method are not limited to solving real algebraic equations with positive coefficients and integer powers, it shows quite satisfactory results for equations with mixed coefficients and fractional powers.

The method is quite simple, clear, has a small error in the case of far spaced roots, but in the case of closely spaced roots, its error increases, although it remains quite acceptable.

The article presents the substantiation of the method, shows numerous examples of its capabilities, compares the results obtained with the results obtained with the help of the package of applied computer programs "Wolfram.Matematica".

Keywords: algebraic equations, logarithmic amplitude- and phase-frequency characteristics, roots of the equation, vector, addition of vectors, phase shift, circular frequency, module, complex number, imaginary and real part, error, polynomial, polyparticle degree, non-minimal and minimal-phase links, error, Fourier transform.

Введение

Вопрос определения, анализа и синтеза корней действительных алгебраических уравнений высокой степени (более трех) является чрезвычайно важным в ряде областей науки и техники – таких как электротехника, теория автоматического управления, теоретическая механика и др. Вместе с тем решение такой задачи представляет собой достаточно сложный процесс, особенно в случаях, требующих исследования взаимосвязи корней (действительных или комплексных) с коэффициентами уравнений [1].

В настоящее время существуют формулы, связывающие корни таких уравнений с их коэффициентами лишь для уравнений до 4-й степени (решения Кардано, Декарта – Эйлера, Феррари), поэтому разработка метода, позволяющего решать и анализировать корни уравнений более высокого порядка, является полезной.

Математическая постановка задачи

Задачу сформулируем следующим образом. Дано уравнение вида:

$$D(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_i s^{k_i} + \dots + a_n s^n = 0,$$

$$D(s) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{k_i} = 0, \quad (1)$$

где a_i – коэффициент при «-м» члене уравнения (любое действительное число); n – максимальное число членов уравнения; k_i – степень i -го члена уравнения (любое действительное число).

Требуется определить корни уравнения (действительные и комплексные), обращающие уравнение (1) в ноль.

Метод приближенного определения корней алгебраических уравнений с использованием логарифмических амплитудно- и фазочастотных характеристик

В работе изложен метод приближенного определения корней алгебраических уравнений, позволяющий быстро и качественно решать поставленную задачу. Особенностью метода является возможность не только нахождения корней уравнения, но и их анализа и целенаправленного синтеза. Метод базируется на применении

логарифмических амплитудно- и фазочастотных характеристик [2], поэтому сначала в работе изложен материал, необходимый для дальнейшего объяснения. Для лучшего понимания сути метода изложим его в виде пяти основных задач по мере усложнения, требующих решения при исследовании уравнений.

Задача 1. Рассмотрим частный случай уравнения (1), в котором a_i только положительные действительные числа, а k_i – только целые положительные числа. Так как корни уравнения могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными, то можно написать:

$$D(s) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i s^{k_i} = \prod_{m=1}^M (1 + T_m s) \times \prod_{l=1}^L (1 + 2g_l \tau_l s + \tau_l^2 s^2), \quad (2)$$

где $M + 2L = n$, g – показатель колебательности, T_m и τ_l – постоянные времени, s – переменная.

Двучлен $(1 + T_m s)$ определяет действительный корень, а трехчлен $(1 + 2g_l \tau_l s + \tau_l^2 s^2)$ определяет либо комплексно-сопряженную пару корней (при $g < 1$), либо два действительных корня (при $g \geq 1$). Действительно, при $1 + T_m s = 0$ имеем:

$$s_m = \frac{1}{T_m}. \quad (3)$$

При $1 + 2g_l \tau_l s + \tau_l^2 s^2 = 0$ имеем:

$$s_{l_1} = \frac{-2g_l \tau_l + \sqrt{4g_l^2 \tau_l^2 - 4\tau_l^2}}{2\tau_l^2}, \quad s_{l_2} = \frac{-2g_l \tau_l - \sqrt{4g_l^2 \tau_l^2 - 4\tau_l^2}}{2\tau_l^2}. \quad (4)$$

Из этого следует, что если удастся разложить многочлен $D(s)$ на множители (2), то фактически будут определены корни уравнения (1), поэтому задача нахождения корней уравнения (1) сводится к разложению многочлена $D(s)$ на множители (2).

Преобразованный по Фурье многочлен $D(s)$ (путем замены s на $(j \cdot \omega)$, где j – мнимая единица, а ω – круговая частота) имеет вид:

$$D(j\omega) = 1 + \sum_{i=1}^R [a_i (j\omega)^{k_i}]. \quad (5)$$

В этом случае можно написать:

$$D(j\omega) = U(\omega) + j \cdot V(\omega) \quad (6)$$

или:

$$D(j\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} \cdot e^{j \times \arctg \left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right]}, \quad (7)$$

где $\sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = K(\omega)$ – коэффициент передачи многочлена

$D(j\omega)$, а $\arctg \left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right] = \varphi(\omega)$ – его сдвиг по фазе.

Многочлен $D(j\omega)$ удобно отображать в виде вектора на плоскости U, V . Если ω менять непрерывно от 0 до ∞ , то этот вектор будет своим концом описывать некоторую кривую (годограф).

Информативными являются характеристики $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, однако сложность их построения заключается в трудности масштабирования из-за широкого диапазона изменения ω , поэтому в инженерной практике используют логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики (ЛАЧХ и ЛАФЧХ¹ соответственно). ЛАФЧХ удобно строить на миллиметровой бумаге или на листах в клетку. В этом случае удобно выбрать следующий масштаб:

– по оси абсцисс 5 см должны соответствовать изменению частоты ω в 10 раз;

– по оси ординат 2,5 см должны соответствовать изменению коэффициента передачи в 10 раз;

– по оси ординат 1,5 см должны соответствовать изменению угла на 90 градусов.

Следует отметить, что по оси ординат иногда удобно откладывать не только собственные значения K в натуральном исчислении, но и его значение $K1$ в децибелах, рассчитываемое по формуле:

$$K1 = 20 \lg K. \quad (8)$$

Поле для построения ЛАФЧХ представлено на рис. 1.

¹ ЛАФЧХ (логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики) подразумевают как логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ), так и логарифмическую фазочастотную характеристику (ЛФЧХ).

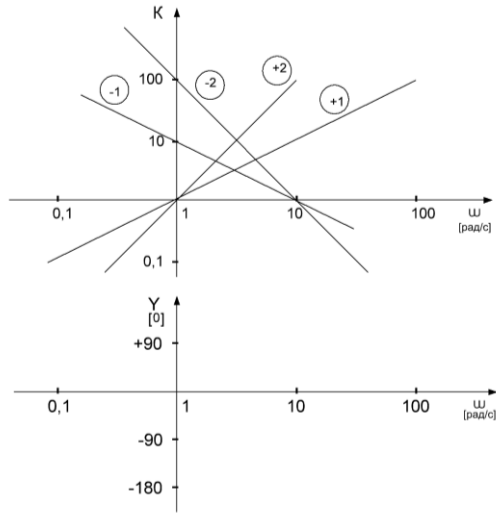


Рис. 1. Поле для построения ЛАФЧХ

Цифры 1, 2, -1 и т.д. обозначают степень наклона прямой (20 дБ/декаду, 40 дБ/декаду, минус 20 дБ/декаду), Y – фазовый сдвиг (град).

Построим ЛАФЧХ для некоторых типовых многочленов $D(s)$ при $s = j \cdot \omega$.

1. $D(s) = K = 10$. ЛАФЧХ представлена на рис. 2.

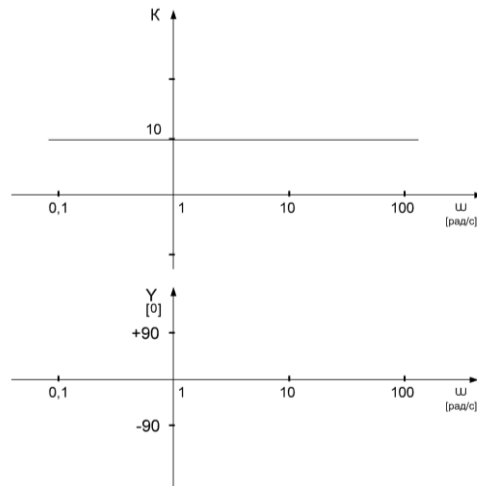


Рис. 2. ЛАФЧХ $D(s) = K = 10$

2. $D(s) = K \cdot s = 5s$. ЛАФЧХ представлена на рис. 3.

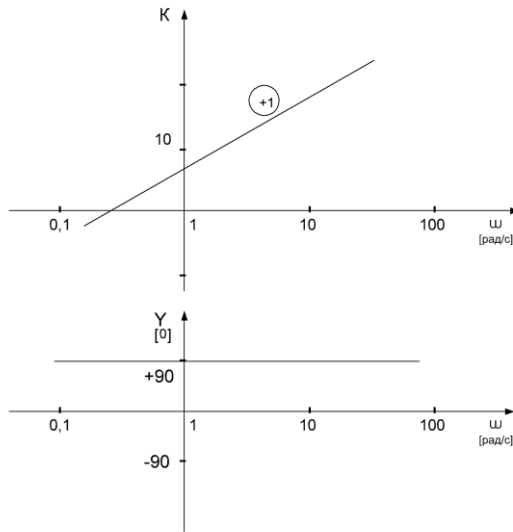


Рис. 3. ЛАФЧХ $D(s) = K \cdot s = 5s$

3. $D(s) = K(1 + T \cdot s) = 5(1 + 0,1s)$. ЛАФЧХ представлена на рис. 4. Пунктирной линией показана реальная ЛАФЧХ, сплошной линией – асимптотическая (максимальная погрешность не превышает 3 дБ).

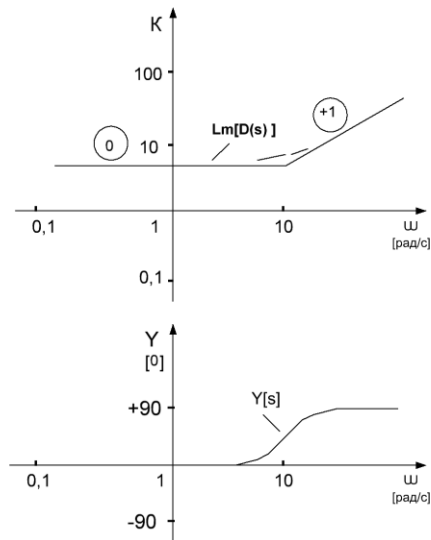


Рис. 4. ЛАФЧХ $D(s) = K(1 + T \cdot s) = 5(1 + 0,1s)$

$Lm[D(s)]$ – логарифмическая амплитудная характеристика, соответствующая многочлену $D(s)$, $Y(s)$ – фазочастотная характеристика, соответствующая многочлену $D(s)$.

4. $D(s) = 1 + 2g_1\tau_1s + \tau_1^2s^2 = 5(1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot s + 0,1^2 \cdot s^2)$. ЛАФЧХ представлена на рис. 5. Пунктирными линиями показаны реальные ЛАФЧХ при различных g , сплошной линией – асимптотическая.

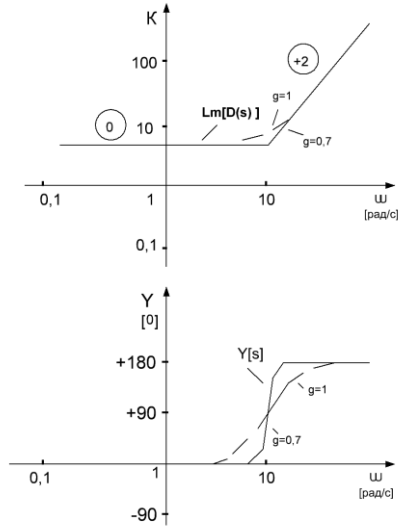


Рис. 5. ЛАФЧХ $D(s) = 1 + 2g_1\tau_1s + \tau_1^2s^2 = 5(1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,1 \cdot s + 0,1^2 \cdot s^2)$

При построении ЛАФЧХ удобно пользоваться шаблонами звеньев второго и первого порядков при различных g (от 0 до 1), представленными в [2, с. 77, рис. 4.18].

Алгоритм построения ЛАФЧХ любых многочленов типа (2) представлен на рис. 6.

Последовательность построения ЛАФЧХ любых многочленов типа (2) изложена на примере многочлена 4-й степени вида:

$$\begin{aligned} D(s) &= K(1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + 2g_3T_3s + T_3^2s^2) = \\ &= 10(1 + s)(1 + 0,1s)(1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,01 \cdot s + 0,01^2 \cdot s^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Шаг 1. Строится поле ЛАФЧХ.

Шаг 2. Определяются частоты излома ЛАФЧХ по формуле:

$$\omega_i = \frac{1}{T_i}. \quad (15)$$

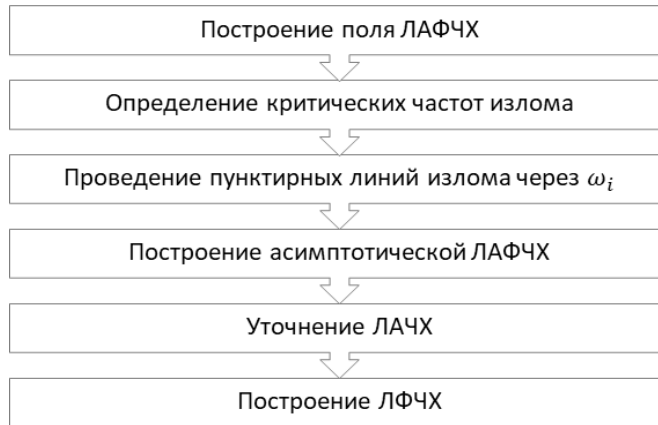


Рис. 6. Алгоритм построения ЛАФЧХ любых многочленов

В нашем случае: $\omega_1 = 1$ рад/с; $\omega_2 = 10$ рад/с; $\omega_3 = 100$ рад/с.

Шаг 3. Через точки ω_i проводятся вертикальные пунктирные линии.

Шаг 4. Через точку на оси ординат $K = 10$ проводится линия с 0-м наклоном (параллельно оси ω) до пересечения с первой вертикальной линией – точка А. От точки А проводится прямая с 1-м наклоном (действие первого двучлена) до пересечения со второй вертикальной линией – точка В. От точки В проводится прямая со 2-м наклоном (действие второго двучлена) до пересечения с третьей вертикальной линией – точка С. От точки С проводится прямая с 4-м наклоном (действие трехчлена).

Шаг 5. При необходимости по шаблону для звена второго порядка уточняется ЛАЧХ – в нашем случае уточненная ЛАФЧХ показана пунктиром на рис. 7.

Шаг 6. Строится ЛАФЧХ по ЛАЧХ с учетом того, что изменение на 20 дБ/в декаду соответствует изменению на 90° для минимально-фазовых многочленов. Для неминимально-фазовых многочленов ЛАФЧХ строится с учетом результатов суммирования составляющих векторов.

Из анализа построения ЛАФЧХ можно сделать важный вывод – корни уравнения соответствуют точкам излома асимптотической ЛАЧХ.

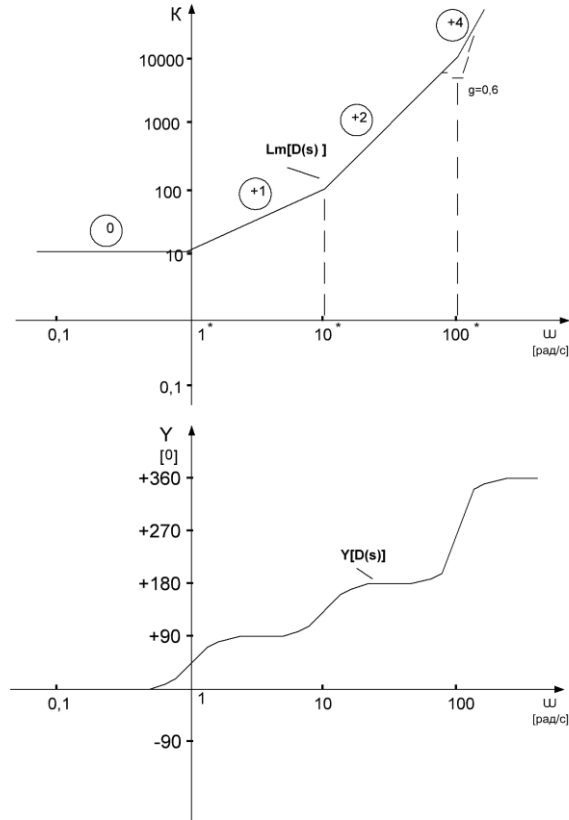


Рис. 7. ЛАФЧХ $D(s) = K(1+T_1s)(1+T_2s)(1+2g_3T_3s+T_3^2s^2) = 10(1+s)(1+0,1s)(1+2 \cdot 0,5 \cdot 0,01 \cdot s + 0,01^2 \cdot s^2)$

Отсюда следует, что если каким-либо способом построить ЛАЧХ многочлена типа (2), то *точки излома асимптотической ЛАЧХ позволяют определить корни уравнения, соответствующего указанному многочлену.*

При этом следует учитывать, что близкорасположенные корни влияют друг на друга, что необходимо учитывать при построении ЛАФЧХ – это можно сделать путем векторного суммирования элементов многочлена $D(j\omega)$ при различных ω_i .

Для определения возможностей метода проводился анализ погрешностей определения корней уравнений. Погрешности определения корней s_i определялись по следующей формуле:

$$\delta_{s_i} = \sqrt{\frac{\Delta R_i^2 + \Delta I_i^2}{R_{i0}^2 + \Delta I_{i0}^2}} \cdot 100 \%, \quad (16)$$

где $\Delta R_i = R_{i0} - R_i$; $\Delta I_i = I_{i0} - I_i$; R_i – значение вещественной части корня s_i , полученное предлагаемым методом; R_{i0} – значение вещественной части корня s_i , полученное с помощью пакета Wolfram.Matematica; I_i – значение мнимой части корня s_i , полученное предлагаемым методом; I_{i0} – значение мнимой части корня s_i , полученное с помощью пакета Wolfram.Matematica.

Алгоритм определения корней любых многочленов типа (2) представлен на рис. 8.

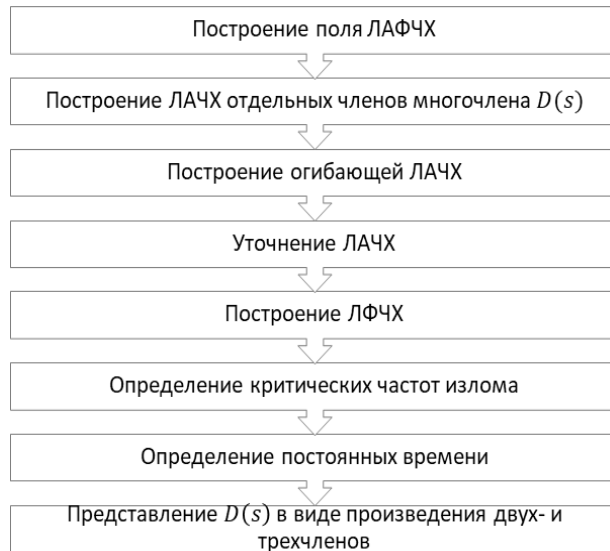


Рис. 8. Алгоритм определения корней любых многочленов

Последовательность определения корней любых многочленов типа (2) изложена на примере многочлена 4-й степени вида:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 = \\ &= 1 + 1,11s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4. \end{aligned} \quad (17)$$

Шаг 1. Строится поле ЛАФЧХ [3].

Шаг 2. Строятся ЛАЧХ отдельных членов многочлена $D(s)$, как на рис. 9.

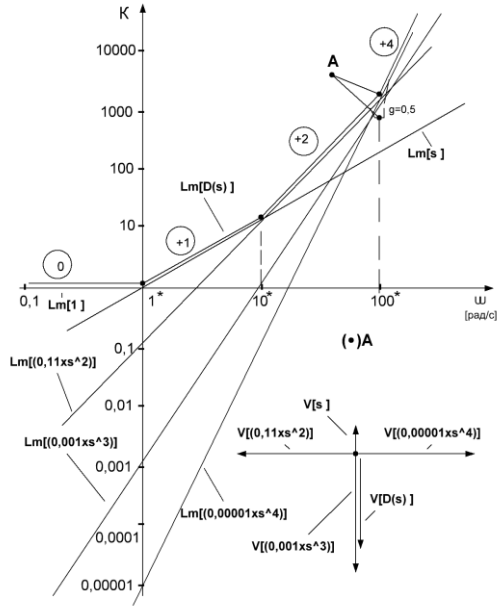


Рис. 9. ЛАЧХ $D(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 =$
 $= 1 + 1,11s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4$

Шаг 3. Строится огибающая ЛАЧХ по наибольшим участкам отдельных ЛАЧХ. Результаты представлены ниже:

- $L|D(j\omega)| = 1$, при $0 \leq \omega < 1$ рад/с;
- $L|D(j\omega)| = L|a_1(j \cdot \omega)^1|$, при 1 рад/с $\leq \omega < 10$ рад/с;
- $L|D(j\omega)| = L|a_2(j \cdot \omega)^2|$, при 10 рад/с $\leq \omega < 100$ рад/с;
- $|D(j\omega)| = L|a_3(j \cdot \omega)^4|$, при 100 рад/с $\leq \omega < \infty$.

Результирующая асимптотическая ЛАЧХ представлена на рис. 9.

Шаг 4. При необходимости получения более точной ЛАЧХ можно ее уточнить путем сложения составляющих векторов в некоторых точках (например, в точке А, как на рис. 9). В окрестности точки А близко расположены лишь четыре прямые, соответствующие

членам $1,11 \times s$, $0,11 \times s^2$, $0,001 \times s^3$, $0,00001 \times s^4$, прямая, соответствующая члену 1, проходит значительно ниже и ее можно не учитывать. На векторной диаграмме построены четыре вектора, соответствующие указанным членам – $V[1,1 \times s]$ с модулем 300 и фазовым сдвигом – -90° , $V[0,11 \times s^2]$ с модулем 1100 и фазовым сдвигом – -180° , $V[0,001 \times s^3]$ с модулем 1100 и фазовым сдвигом – 270° и $V[0,00001 \times s^4]$ с модулем 1100 и фазовым сдвигом – 360° . Результатом этой векторной суммы является вектор $V[D(s)]$ с модулем 900 и фазовым сдвигом – 270° . Это означает, что на результирующей ЛАЧХ в области частот с 0 изменением наклона 2–4 имеется отрицательный всплеск, вызванный действием трехчлена.

Шаг 5. Строится ЛФЧХ.

Шаг 6. Определяются критические частоты $\omega_1 = 1$ рад/с, $\omega_2 = 10$ рад/с; $\omega_3 = 100$ рад/с. Особо следует отметить, что эти частоты сильно отличаются друг от друга (в 10 раз).

Шаг 7. Определяются постоянные времени: $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 1$ с;

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0,1 \text{ с}; T_3 = \frac{1}{\omega_3} = 0,01 \text{ с}.$$

Шаг 8. Так как в результирующей ЛАЧХ наклоны чередуются в последовательности 0–1–2–4, то многочлен представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + 1,1s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4 \approx \\ &\approx (1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + 2gT_3s + T_3^2s^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Шаг 9. По уточненной ЛАЧХ (изображенной пунктиром) в соответствии с рис. 9 и [2, с. 77, рис. 4.18] определяется $g = 0,5$.

Шаг 10. Теперь окончательно можно написать:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + 1,1s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4 \approx \\ &\approx (1 + s)(1 + 0,1s)(1 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,01 \cdot s + 0,01^2s^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -1; & s_{10} &= -1,01; & \delta_{s_1} &= 0,9\%; \\
 s_2 &= -10; & s_{20} &= -10; & \delta_{s_2} &= 0\%; \\
 s_3 &= -50 + 87j; & s_{30} &= -49,49 + 86,31j; & \delta_{s_3} &= 0,9\%; \\
 s_4 &= -50 - 87j; & s_{40} &= -49,49 - 86,31j; & \delta_{s_4} &= 0,9\%.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Задача решена.

Следует отметить, что в данном примере корни многочлена разнесены между собой на декаду, поэтому практически не оказывают влияния друг на друга, в противном случае необходимо проводить в критических точках **векторное суммирование** отдельных составляющих и анализировать также и ЛФЧХ.

Рассмотрим еще один пример:

$$D(s) = 1 + 2s + 2s^2 + 3s^3 + 13s^4 + 5s^5 + 16s^6.
 \tag{21}$$

Построим ЛАФЧХ в соответствии с вышеизложенным алгоритмом, они представлены на рис. 10.

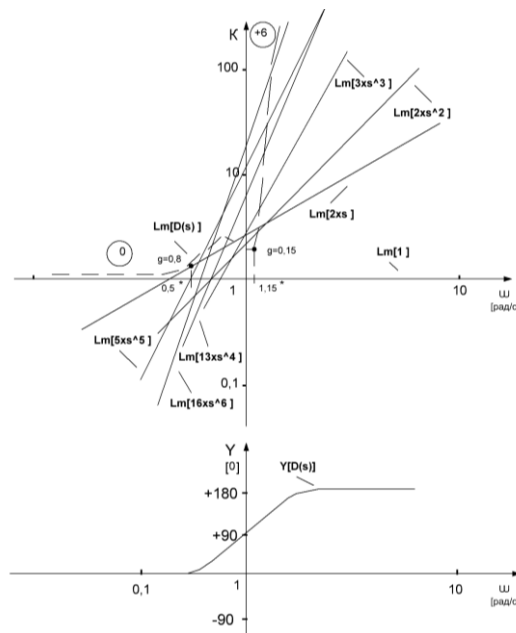


Рис. 10. ЛАФЧХ $D(s) = 1 + 2s + 2s^2 + 3s^3 + 13s^4 + 5s^5 + 16s^6$

Анализ данных ЛАФЧХ позволяет сделать следующие выводы:

– корни уравнения расположены очень близко, т.е. велико их взаимовлияние;

– сдвиг по фазе стремится к 180° , а не к 540° , т.е. два корня имеют положительные действительные части;

– на частоте $\omega = 0,85$ рад/с наблюдается бросок по амплитуде вниз, что соответствует колебательному звену с $g = 0,13$;

– на частоте $\omega = 0,5$ рад/с наблюдается плавный переход по амплитуде, что соответствует колебательному звену с $g = 0,85$;

– на частоте $\omega = 0,5$ рад/с наблюдается плавный переход по фазе, что означает наличие на очень близкой частоте ($\sim 0,55$ рад/с) колебательного звена с $g = 0,85$.

С учетом вышеизложенного можно написать:

$$\begin{aligned}
 D(s) &= 1 + 2s + 2s^2 + 3s^3 + 13s^4 + 5s^5 + 16s^6 = \\
 &= (1 + 2 \cdot 0,8 \cdot 2 \cdot s + 2^2 \cdot s^2)(1 - 2 \cdot 0,8 \cdot 2 + 2^2 \cdot s^2) \times \\
 &\quad \times (1 + 2 \cdot 0,15 \cdot 0,85 \cdot s + 0,85^2 \cdot s^2). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -0,4 + 0,3j; \quad s_{10} = -0,394 + 0,247j; \quad \delta_{s_1} = 11,5\%; \\
 s_2 &= 0,4 - 0,3j; \quad s_{20} = -0,394 - 0,247j; \quad \delta_{s_2} = 11,5\%; \\
 s_3 &= -0,17 + j; \quad s_{30} = -0,124 + 0,875j; \quad \delta_{s_3} = 15,1\%; \\
 s_4 &= -0,17 - j; \quad s_{40} = -0,124 - 0,875j; \quad \delta_{s_4} = 15,1\%; \tag{23} \\
 s_5 &= 0,4 + 0,3j; \quad s_{50} = 0,362 + 0,488j; \quad \delta_{s_5} = 31,4\%; \\
 s_6 &= 0,4 - 0,38j; \quad s_{60} = 0,362 - 0,488j; \quad \delta_{s_6} = 31,4\%.
 \end{aligned}$$

Задача решена.

Задача 2. Рассмотрим частный случай уравнения (1), в котором a_i только положительные действительные числами, а k_i – положительные числа (целые и дробные). Так как корни уравнения могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными, то можно написать:

$$D(s) = 1 + \sum_{i=1}^n (a_i s^{k_i}) = 0 \approx \prod_n^N (1 + T_n^{\bar{z}_n} s^{\bar{z}_n}) \times \prod_{m=1}^M (1 + T_m s) \times \prod_{l=1}^L (1 + 2g_l \tau_l s + \tau_l^2), \quad (24)$$

где $M + 2L + N = I$, \bar{z}_n – дробная степень отдельного члена $D(s)$.

Алгоритм определения корней любых многочленов типа (21) аналогичен предыдущему, поясним его на примере многочлена 2-й степени вида:

$$D(s) = 1 + a_1 s^{\bar{z}_1} + a_2 s + a_3 s^2 = 1 + 5s^{1/3} + 0,1s + 0,0001s^2. \quad (25)$$

Это уравнение эквивалентно следующему при $x = s^{1/3}$:

$$D(x) = 1 + 5x + 0,1x^3 + 0,0001x^6 = 0 \quad (26)$$

ЛАФЧХ многочлена представлены на рис. 11.

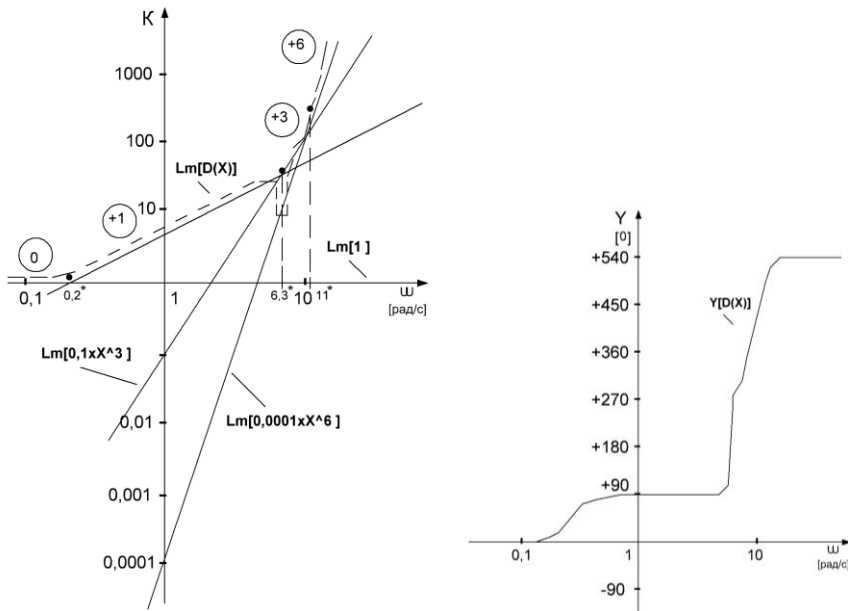


Рис. 11. ЛАФЧХ $D(x) = 1 + 5x + 0,1x^3 + 0,0001x^6 = 0$

Из рис. 11 видно, что ЛАЧХ многочлена меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 0,2 рад/с), затем на 3-й (на частоте 6,3 рад/с) и затем на 6-й (на частоте 11 рад/с), причем на частоте 6,3 рад/с наблюдается резкое изменение коэффициента передачи, что соответствует действию

трехчлена с постоянной времени 0,16 с и показателем колебательности 0,1. Кроме того, на частоте 11 рад/с наблюдается плавное изменение коэффициента передачи, что соответствует совместному действию двучлена с постоянной времени 0,09 с и трехчлена с постоянной времени 0,09 с и показателем колебательности 0,6. Тогда:

$$D(x) = 1 + 5x + 0,1x^3 + 0,0001x^6 = 0 = (1 + 5x)(1 + 0,09x) \times \\ \times (1 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,16 \cdot x + 0,025 \cdot x^2)(1 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,09 \cdot x + 0,008 \cdot x^2). \quad (27)$$

Откуда:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,2; & x_{10} &= -0,199; & \delta_{s_1} &= 0,5\%; \\ x_2 &= -11; & x_{20} &= -11,2; & \delta_{x_2} &= 1,8\%; \\ x_3 &= -0,66 + 6,6j; & x_{30} &= -0,72 + 6,6j; & \delta_{x_3} &= 0,9\%; \\ x_4 &= -0,66 - 6,6j; & x_{40} &= -0,72 - 6,6j; & \delta_{x_4} &= 0,9\%; \\ x_5 &= -6,7 + 8j; & x_{50} &= -6,4 + 7,77j; & \delta_{x_5} &= 1,4\%; \\ x_6 &= -6,7 - 8j; & x_{60} &= -6,4 - 7,77j; & \delta_{x_6} &= 1,4\%. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0,008; & s_2 &= -1331; & s_3 &= -85,96 - 278,87j; \\ s_4 &= 85,96 + 278,87j; & s_5 &= 985,64 + 565,36j; & s_6 &= 985,64 - 565,36j. \end{aligned}$$

Задача решена.

Задача 3. Рассмотрим частный случай уравнения (1), в котором a_i как положительные, так и отрицательные действительные числа, а k_i – только целые положительные числа. Так как корни уравнения могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными, то можно написать:

$$D(s) = 1 \pm \sum_{i=1}^n (a_i s^{k_i}) = 0 = \prod_{m=1}^M (1 \pm T_m s) \times \prod_{l=1}^L (1 \pm 2g_l \tau_l s \pm \tau_l^2 s^2), \quad (29)$$

где $M + 2L = R$.

Алгоритм определения корней любых многочленов типа (24) аналогичен предыдущему и изложен на примере многочлена 4-й степени вида:

$$D(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 = \quad (30)$$

$$= 1 + s - 0,1s^2 + 0,003s^3 + 0,000016s^4.$$

ЛАФЧХ многочлена представлены на рис. 12.

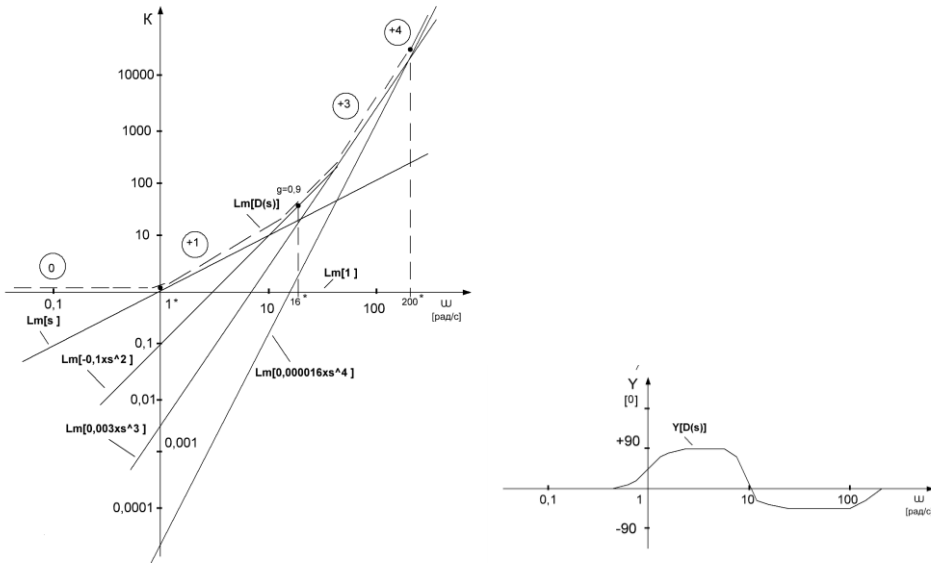


Рис. 12. ЛАФЧХ $D(s) = 1 + s - 0,1s^2 + 0,003s^3 + 0,000016s^4$

Из рис. 12 видно, что между частотами 10 рад/с и 31 рад/с у ЛАЧХ наблюдается сглаживание характеристики, а у ЛАФЧХ – изменение фазового сдвига на 90° , что соответствует колебательному звену с показателем колебательности $g = 0,9$, тогда:

$$D(s) = 1 + s - 0,1s^2 + 0,003s^3 + 0,000016s^4 \approx \quad (31)$$

$$\approx (1 + s)(1 - 2 \cdot 0,9 \cdot 0,057 \cdot s + 0,057^2 \cdot s^2)(1 + 0,005s).$$

Знаки минус в многочленах берутся при переходах на участки, соответствующие уменьшению фазового сдвига. Откуда:

$$s_1 = -1; \quad s_{10} = -0,914; \quad \delta_{s_1} = 9,4 \%;$$

$$\begin{aligned}
 s_2 &= -200; & s_{20} &= -217,5; & \delta_{s_2} &= 8,0\%; \\
 s_3 &= 15,6 + 8,1j; & s_{30} &= 15,47 + 8,64j; & \delta_{s_3} &= 3,1\%; \\
 s_4 &= 15,6 - 8,1j; & s_{40} &= 15,47 - 8,64j; & \delta_{s_4} &= 3,1\%.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Задача решена.

Следует отметить, что так как ЛАЧХ не учитывает знаков коэффициентов при членах уравнения, то при «грубом» построении она одинакова для уравнений с положительными и отрицательными коэффициентами при членах, однако при уточнении с помощью векторного суммирования векторов она может быть скорректирована.

Задача 4. Задачу сформулируем как определение значений (синтез) коэффициентов многочленов, обеспечивающих требуемый вид корней уравнения. Эту задачу рассмотрим на примере уравнения, описываемого многочленом:

$$\begin{aligned}
 D(s) &= 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 = \\
 &= 1 + 1,11s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + a_4s^4.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Сформулируем эту конкретную задачу как нахождение максимального значения a_4 , обеспечивающего только действительные корни уравнению.

ЛАЧХ, соответствующие рассматриваемому многочлену при различных a_4 $(0,3; 0,25; 0,2) \cdot 10^{-5}$, представлены на рис. 13.

Из рис. 13 видно, что ЛАЧХ многочлена при $a_4 = 0,000002$ плавно меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 1 рад/с), затем на 2-й (на частоте 10 рад/с), затем на 3-й (на частоте 100 рад/с) и затем на 4-й (на частоте 430 рад/с), что означает последовательное влияние двучленов с постоянными времени 1; 0,1; 0,01 и 0,0023 с. ЛАЧХ многочлена при $a_4 = 0,0000025$ плавно меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 1 рад/с), затем на 2-й (на частоте 10 рад/с), затем на 3-й (на частоте 100 рад/с) и затем на 4-й (на частоте 310 рад/с), что означает последовательное влияние двучленов с постоянными времени 1; 0,1; 0,01 и 0,0032 с. ЛАЧХ многочлена при $a_4 = 0,000003$ меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 1 рад/с), затем на 2-й (на частоте 10 рад/с) и затем на 4-й (на частоте 200 рад/с), что означает последовательное

влияние двучленов с постоянными времени 1; 0,1; и трехчлена с постоянной времени 0,005 с и показателем колебательности 1.

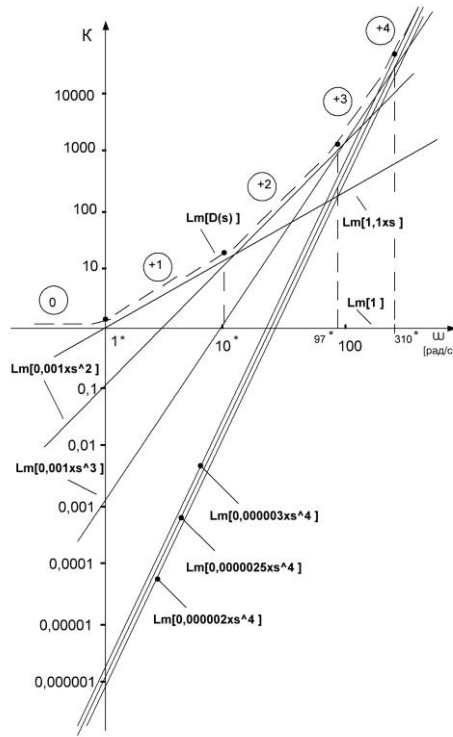


Рис. 13. ЛАЧХ $D(s) = 1 + 1,11s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + a_4s^4$

Тогда $D(s) = 1 + 1,11s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + a_4s^4$ равен:

– $(1 + s)(1 + 0,1s)(1 + 2 \cdot 1 \cdot 0,005 \cdot s + 0,005^2 \cdot s^2)$ при $a_4 = 0,000003$;

– $(1 + s)(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)(1 + 0,0032s)$ при $a_4 = 0,0000025$;

– $(1 + s)(1 + 0,1s)(1 + 0,01s)(1 + 0,0023s)$ при $a_4 = 0,000002$.

Отсюда следует, что при $a_4 = 0,0000025$ корни действительные, равные:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -1; & s_{10} &= -1,01; & \delta_{s_1} &= 0,9\%; \\
 s_2 &= -10; & s_{20} &= -10,09; & \delta_{s_2} &= 8,9\%; \\
 s_3 &= -100; & s_{30} &= -132,2; & \delta_{s_3} &= 24,3\%;
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$s_4 = -310; \quad s_{40} = -296,67; \quad \delta_{s_4} = 4,5 \%$$

Задача решена.

Задача 5. Рассмотрим еще одну интересную практически задачу – определим для уравнения (35) корни уравнения и значение коэффициента a_1 , обеспечивающего действительный корень $s_1 = -0,5$, и два комплексно сопряженных корня.

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 = \\ &= 1 + a_1s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4. \end{aligned} \quad (35)$$

На рис. 14 представлены ЛАЧХ, один с $a_1 = 1,1$ а второй – проходящий через $\omega = 0,5$ рад/с, что соответствует $a_1 = 2$.

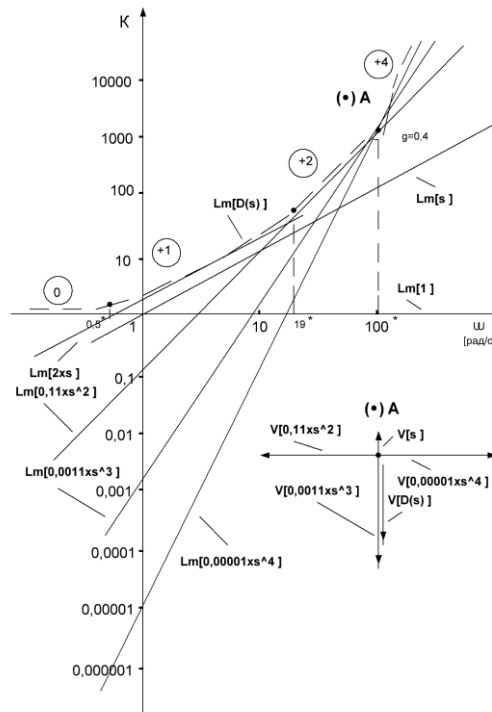


Рис. 14. ЛАЧХ $D(s) = 1 + a_1s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4$

Из рис. 14 видно, что ЛАЧХ многочлена при $a_1 = 2$ плавно меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 0,5 рад/с), затем на 2-й (на

частоте 19 рад/с) и затем на 4-й (на частоте 100 рад/с), причем на частоте 100 рад/с наблюдается значительное изменение коэффициента передачи, что соответствует действию трехчлена с постоянной времени 0,01 с и показателем колебательности 0,4. Тогда:

$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + a_1s + 0,11s^2 + 0,0011s^3 + 0,00001s^4 = \\ &= (1 + 2s)(1 + 0,052s)(1 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,01 \cdot s + 0,0001 \cdot s^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда следует, что при $a_1 = 2$ корни равны:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0,5; \quad s_{10} = -0,51; \quad \delta_{s_1} = 8,9 \%; \\ s_2 &= -19; \quad s_{20} = -21,46; \quad \delta_{s_2} = 11,4 \%; \\ s_3 &= -40 + 85j; \quad s_{30} = -44 + 84,36j; \quad \delta_{s_3} = 4,3 \%; \\ s_4 &= -40 - 85j; \quad s_{40} = -44 - 84,36j; \quad \delta_{s_4} = 4,3 \%. \end{aligned}$$

Задача решена.

Следует отметить, что при $a_1 = 1$ ЛАЧХ многочлена плавно меняется с 0-го наклона на 1-й (на частоте 1 рад/с), затем на 2-й (на частоте 10 рад/с) и затем на 3-й (на частоте 30 рад/с) и на 4-й (на частоте 100 рад/с), т.е. из рис.14 наглядно видно влияние коэффициента a_1 многочлена на его корни.

Заключение

1. Предлагаемый метод (МПОКАУ) позволяет находить приближенное решение уравнений высокой степени (до 8) с действительными коэффициентами и любыми степенями (целыми и дробными).

2. Метод обладает достаточно высокой точностью (менее 10 %) в случае далеко разнесенных членов (более 5 раз).

3. Максимальная погрешность метода (до 30 %) наблюдается при решении уравнений с отрицательными близкими коэффициентами при членах уравнения.

4. Метод позволяет определять значения коэффициентов многочленов, обеспечивающих требуемый вид корней уравнения – как их комплексность или действительность, так и конкретные значения.

Список литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 2003. – 832 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Изд-во «Наука», главная редакция физико-технической литературы, 1972. – 768 с.
3. Следящие приводы / Е.С. Блейз, Ю.А. Данилов, В.Ф. Казмиренко [и др.] / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Энергия, 1976. – Кн. 1. – 480 с.
4. Энциклопедия элементарной математики. Т. 1: Элементарная алгебра и анализ. – М.: ЕЕ Медиа, 2012. – 638 с.
5. Белый Е.К., Дорофеева Ю.А. Алгебраические уравнения: учебное пособие. – Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2015. – 240 с.
6. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.
7. Акимов В.Н., Коновалова И.Н. Комплексные числа, комплексные векторы и их приложения: учебное пособие. – М.: ГОУ ВПО Российский государственный медицинский университет, 2018. – 81 с.
8. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. – М.: МЦНМО, 2003. – 68 с.
9. Тынкевич М.А. Введение в численный анализ: учеб. пособие. – Кемерово: КузГТУ, 2017. – 176 с.
10. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: учебник: в 2 т. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – Т. I. – 336 с.
11. Кормен Томас Х., Лейзерсон Чарльз И., Ривест Рональд Л., Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е издание. – М.: Вильямс, 2013. – 1328 с.
12. Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика: пер. с франц. – М.: Мир, 1999. – 720 с.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. – 640 с.
14. Самарский А.А. Введение в численные методы: учебное пособие, 3-е изд., стер. – СПб: Лань, 2005. – 288 с.
15. Слепцов В.В. Метод приближенного решения уравнений [Электронный ресурс] // Российский технологический журнал. – 2015. – Т. 1, № 3(8). – С. 10–16. – URL: <https://www.mirea.ru/upload/medialibrary/678/1-03-sleptsov-16.pdf> (дата обращения: 26.07.2021).

References

1. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Math reference book for scientists and engineers]. Moscow, Nauka, 2003, 832 p.

2. Besekersky V.A., Popov E.P. Teoriia sistem avtomaticheskogo regulirovaniia [Theory of automatic control systems]. Moscow, Nauka, 1972, 768 p.

3. Blaze E.S., Danilov Yu.A., Kazmirenko V.F. et al. Slediashchie privody. Pod red. B.K. Chemodanova; kn. pervaiia [Tracking drives / ton. First]. Moscow, Energiya, 1976, 480 p.

4. Entsiklopediia elementarnoi matematiki. Tom 1. Elementarnaia algebra i analiz [Encyclopedia of Elementary Mathematics. Volume 1. Elementary Algebra and Analysis]. Moscow, EE Media, 2012, 638 p.

5. Belyi E.K., Dorofeeva Yu.A. Algebraicheskie uravneniia: uchebnoe posobie [Algebraic equations: textbook]. Petrozavodsk, PetrGU, 2015, 240 p.

6. Panteleev A.V., Yakimova A.S. Teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo i operatsionnoe ischislenie v primerakh i zadachakh: uchebnoe posobie [Theory of functions of a complex variable and operational calculus in examples and problems: a textbook]. Moscow, Vysshaia shkola, 2001, 445 p.

7. Akimov V.N., Konovalova I.N. Kompleksnye chisla, kompleksnye vektory i ikh prilozheniia: uchebnoe posobie [Complex numbers, complex vectors and their applications: textbook]. Moscow, GOU VPO Rossiiskii gosudarstvennyi meditsinskii universitet, 2018, 81 p.

8. Arzhantsev I.V. Bazisy Grebnera i sistemy algebraicheskikh uravnenii [Basis of Gröbner and systems of algebraic equations]. Moscow, MTsNMO, 2003, 68 p.

9. Tynkevich M.A. Vvedenie v chislennyi analiz: ucheb. posobie [Introduction to numerical analysis: study. manual]. Kemerovo, KuzSTU, 2017, 176 p.

10. Glukhov M.M., Elizarov V.P., Nechaev A.A. Algebra: uchebnik. V 2-kh t. T. I [Algebra. V 2-kh t. T. I]. Moscow, Gelios ARV, 2003, 336 p.

11. Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald L.; Stein, Clifford. Introduction to Algorithms. 3rd. MIT Press, 2009, 1292 p.

12. Naudin P., Quitte C. Algorithmique algebrique. Masson, 1992, 720 p.

13. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody [Numerical methods]. Moscow, Binom. Laboratoriia znanii, 2003, 640 p.

14. Samarsky A.A. Vvedenie v chislennye metody: uchebnoe posobie [Introduction to numerical methods: textbook]. SPb, Lan', 2005, 288 p.

15. Sleptsov V.V. Metod priblizhennogo resheniia uravnenii [Method of approximate solution of equations]. *Rossiyskii eologicheskii zhurnal*, 2015, no 3(8), tom 1, pp. 10-16, available at: <https://www.mirea.ru/upload/medialibrary/678/1-03-sleptsov-16.pdf> (accessed July 26, 2021).

Статья получена: 13.10.2021

Статья одобрена: 16.02.2022

Принята к публикации: 18.03.2022

Финансирование. *Исследование не имело спонсорской поддержки.*

Конфликт интересов. *Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

Сведения об авторах

Слепцов Владимир Владимирович (Москва, Россия) – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры приборов и информационно-измерительных систем МИРЭА – Российского технологического университета (119454, Москва, пр-т Вернадского, 78); главный научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (119334, г. Москва, ул. Бардина, e-mail: vsleptsov@gmail.com).

Лагунова Анна Дмитриевна (Москва, Россия) – кандидат экономических наук, доцент кафедры практической и прикладной информатики МИРЭА – Российского технологического университета (119454, г. Москва, пр-т Вернадского, 78, e-mail: lagunova.ad@gmail.com).

Аблаева Анна Евгеньевна (Москва, Россия) – старший преподаватель кафедры приборов и информационно-измерительных систем МИРЭА – Российского технологического университета (119454, г. Москва, пр-т Вернадского, 78, e-mail: ablaeva@mirea.ru).

About the authors

Vladimir V. Sleptsov (Moscow, Russian Federation) – Dr. Habil. In Engineering, Professor, Departments of Instruments and Information-Measuring Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo ave., Moscow, 119454, e-mail: vsleptsov@gmail.com); Chief Researcher, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (4, Bardina str., Moscow, 119334, e-mail: vsleptsov@gmail.com).

Anna D. Lagunova (Moscow, Russian Federation) – Ph. D. in Economics Sciences, Associate Professor, Departments of Practical and Applied Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo ave., Moscow, 119454, e-mail: lagunova.ad@gmail.com).

Anna E. Ablaeva (Moscow, Russian Federation) – Senior Lecturer, Departments of Instruments and Information-Measuring Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo ave., Moscow, 119454, e-mail: ablaeva@mirea.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Слепцов, В. В. Определение, анализ и синтез корней действительных алгебраических уравнений с помощью логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик / В. В. Слепцов, А. Д. Лагунова, А. Е. Аблаева. – текст: непосредствен-

ный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.01 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2022. – № 1. – С. 9–34.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Слепцов, В. В. Определение, анализ и синтез корней действительных алгебраических уравнений с помощью логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик / В. В. Слепцов, А. Д. Лагунова, А. Е. Аблаева // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 1. – С. 9–34. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Sleptsov V.V., Lagunova A.D., Ablaeva A.E. Determination, analysis and synthesis of the roots of valid algebraic equations using logarithmic amplitude-phase frequency characteristics. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 1, pp. 9–34. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.01 (*in Russian*)