

DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.08

УДК 519.216+330.133.2

С.А. Смоляк

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

СТОИМОСТНАЯ ОЦЕНКА МАШИН СО СЛУЧАЙНО УХУДШАЮЩИМИСЯ ОПЕРАЦИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Традиционно используемые методы стоимостной оценки машин и оборудования не учитывают вероятностного характера процесса их эксплуатации. Между тем стохастические модели деградации технических систем широко используются для решения различных задач теории надежности. В статье развивается направление исследований, в котором модели деградации технических систем, используемые в теории надежности, применяются к задачам стоимостной оценки машин и оборудования.

Объектами исследования являются машины, подвергающиеся деградации и случайным отказам. Предмет исследования – это сроки службы и рыночная стоимость машин. Доналоговые выгоды от использования машины определяются как рыночная стоимость выполняемых ими работ за вычетом операционных затрат. Рыночная стоимость машины определяется методом дисконтирования потоков выгод от ее предстоящего использования. Процесс деградации (ухудшения технико-экономических характеристик) машины описан случайным процессом, в котором поток отказов – пуассоновский, и при каждом отказе производительность машины умножается на случайный коэффициент. В составе операционных затрат выделена переменная часть, зависящая от объема выполняемых машиной работ, и постоянная часть. Принимается, что машина, которая стала приносить отрицательные выгоды, выбывает из эксплуатации.

Построенная модель позволяет получить явные выражения для рыночной стоимости единицы выполняемых машинами работ, среднего значения и коэффициента вариации срока ее службы, а также установить зависимость рыночной стоимости машины от ее производительности.

Мы находим явные выражения для рыночной стоимости единицы выполняемых машинами работ, среднего значения и коэффициента вариации срока ее службы. Построена зависимость рыночной стоимости машины от ее производительности.

В ряде случаев оценщик имеет информацию только о возрасте машины, но не о ее производительности. Однако машины одного возраста могут иметь разную производительность. В этой ситуации можно оценить только среднюю рыночную стоимость машин данного возраста. Получено интегро-дифференциальное уравнение для расчета такой средней стоимости. Выявлено, что в данной модели она может быть выражена функцией от относительного возраста машины (отношения ее возраста к среднему сроку службы) и коэффициента вариации срока службы.

Полученные результаты представлены в виде графиков, которые могут быть непосредственно использованы для оценки рыночной стоимости подержанных машин и оборудования.

Ключевые слова: машины и оборудование, производительность, деградация, отказы, оценка рыночной стоимости, принцип ожидания выгод, возраст, обесценение, коэффициенты годности.

S.A. Smolyak

Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation

**VALUATION OF MACHINERY AND EQUIPMENT
WITH RANDOMLY DEGRADED OPERATING
CHARACTERISTICS**

Traditionally used methods of machinery and equipment valuation do not take into account the probabilistic nature of the process of their operation. Meanwhile, stochastic models of degradation of technical systems are widely used to solve various problems of the theory of reliability. This article refers to the direction of research in which the models of technical systems degradation used in the reliability theory are applied to the problems of machinery and equipment valuation.

The objects of our research are equipment items subject to degradation and random failures. The subject of research is the service life of equipment and their market value. We define the (pre-tax) benefits from the use of equipment as the market value of the work they perform minus operating costs. The market value of equipment is determined by the sum of discounted benefits from its future use. The process of equipment degradation (deterioration of its technical and economic characteristics) is described by a Poisson random process of failures, and for each failure, the performance of the equipment is multiplied by a random coefficient. Operating costs are divided into a variable part depending on the amount of work performed by the equipment and a fixed part. We accept that equipment that has begun to bring negative benefits is decommissioned.

The constructed model makes it possible to obtain explicit expressions for the market value of a unit of work performed by equipment, the average value and the coefficient of variation of its service life, and also to find the dependence of the equipment market value on its performance.

In some cases, appraiser only knows the age of the equipment being assessed and has no information about its performance. However, equipment of the same age may have different performance. In this situation, he can only estimate the average market value of equipment of a given age. We got an integro-differential equation to calculate this average value. It turned out that in this model it can be expressed as a function of the relative age of the value (the ratio of its age to the average service life) and the coefficient of variation of the service life.

The results obtained are presented as graphs that can be directly used to estimate the market value of used machinery and equipment.

Keywords: machinery and equipment, equipment performance, degradation, failures, valuation, market value, anticipation of benefits principle, age, depreciation, percent good factors.

Введение. Основные понятия

При управлении производством и совершении сделок нередко требуется оценка рыночной стоимости (РС) различных объектов. В общем случае РС объекта отражает его полезность для участников рынка. Более строго понятие РС определяется и разъясняется в Международных стандартах оценки (МСО) [1], иное определение

даётся в российском законодательстве¹. Для наших целей это понятие можно определить короче: РС объекта на определенную дату (дату оценки) – это его цена в (реальной или гипотетической) сделке, совершаемой на эту дату на открытом и конкурентном рынке между типичными участниками. При этом типичными считаются участники рынка, ведущие себя расчетливо, проводящие надлежащий маркетинг и хорошо осведомленные о характере, свойствах и способах использования объекта, а также о состоянии рынка на дату оценки. Участники рынка обычно не в полной мере удовлетворяют всем этим требованиям, поэтому цены реальных сделок отклоняются от РС.

Для оценки РС объектов обычно используют сравнительный, затратный и доходный подходы. При сравнительном подходе для оценки объекта используются цены его точных копий или аналогов, при затратном – затраты, необходимые для создания объекта, при доходном – выгоды, получаемые от использования объекта.

В данной статье предлагается решение одной из задач, возникающих при оценке РС машин и оборудования (далее – машин).

Машины мы рассматриваем как серийно выпускаемую продукцию. Каждая машина проектируется для выполнения определённых работ, и обычно используется по своему назначению. Все машины, выпущенные по одному проекту, мы объединяем в одну *марку* (обычно говорят о моделях или модификациях, но для наших целей эта терминология неудобна). Все новые (выпущенные, но ещё не вступившие в эксплуатацию) машины одной марки мы рассматриваем как идентичные – точные копии друг друга.

Основными операционными характеристиками машины мы считаем *производительность* и *интенсивность операционных затрат*, отражающие соответственно (физический) объем работ, выполняемых в малую единицу времени, и размер затрат (кроме амортизации и налога на прибыль) на выполнение этих работ. В процессе эксплуатации (использования по назначению) проводятся технические обслуживания и текущие ремонты (ТОиР) машины. Они позволяют по возможности поддерживать техническое состояние машины. Затраты на ТОиР мы, как это обычно и делается, включаем в состав операционных затрат.

¹ Федеральный закон «Об оценочной деятельности в Российской Федерации» от 29.07.1998 № 135-ФЗ.

Производительность машины может быть измерена и в стоимостном выражении. Это обусловлено тем, что работа, выполняемая машинами одной марки, необходима участникам рынка, т.е. обладает полезностью для них, а следовательно, имеет и свою РС. Ее можно оценить, рассматривая гипотетическую или даже реальную сделку, в ходе которой один участник выполняет определенный объем работ и продает результаты другому³.

Отметим в связи с этим, что работа, выполняемая некоторыми типами машин (скажем, такси), обращается на рынке, и ее РС можно оценить и по рыночным ценам. Однако нередко выполняемые машиной работы носят агрегированный характер. Производительность экскаваторов измеряют объемом перемещенного грунта, объединяя перемещаемый грунт разных категорий, производительность шлифовальных станков измеряют количеством отшлифованных деталей, объединяя детали разной формы. В таком случае РС единицы выполняемой работы носит усредненный характер, т.е. относится к средней структуре работ (средней категории грунта, средней форме обрабатываемых деталей и т.п.). Возможно, по этой причине предприятия, владеющие машинами, равно как и профессиональные оценщики, обычно не оценивают выполняемые машинами работы (кроме, пожалуй, строительно-монтажных и ремонтных). Позднее мы предложим практически приемлемый способ оценки такой «усредненной» РС выполняемых машинами работ.

Согласно [1], РС объекта на дату оценки отражает выгоды, которые он будет приносить при последующем использовании, а также отражает вклад объекта в РС владеющего объектом предприятия. В данном случае под (доналоговыми) *выгодами* от использования машины в некотором периоде мы понимаем РС работ, выполняемых ею в этом периоде, за вычетом операционных затрат на производство этих работ⁴. Они отражают *стоимость права пользования* машиной в соответствующем периоде, а в терминологии Л.В. Канторовича,

³ Выполнение отдельных работ предприятия иногда передают сторонним фирмам на аутсорсинг.

⁴ Так, определяемый показатель выгод может рассматриваться и как связанный с использованием машины (доналоговый) денежный поток, упоминаемый в стандартах оценки. По экономическому содержанию и величине он близок к EBITDA (прибыли до уплаты налогов и процентов и начисления амортизации), используемому в оценке бизнеса. Однако EBITDA находят по фактическим данным предприятия, тогда как выгоды от использования машин таким способом определить уже нельзя.

принятой в теории оптимального планирования, – *прокатную оценку* машины [2, с. 102].

Новые и подержанные (вступившие в эксплуатацию) машины обращаются на разных рынках и оцениваются по-разному [3].

Новые машины продаются производителями и дилерами на *первичном* рынке. Их РС определяется исходя из сложившихся на первичном рынке цен машин той же марки или аналогичных машин других марок (для учета различий в технических характеристиках оцениваемой машины и ее аналогов строят регрессионные зависимости между ценами машин и их характеристиками [3; 4]). Этот этап оценки обычно каких-то принципиальных затруднений не вызывает.

Подержанные машины обращаются на *вторичном* рынке. Такая машина обычно не имеет точных аналогов, и оценивать её удобно исходя из стоимости новой машины той же марки (нового аналога оцениваемой машины). Обычно для этого РС нового аналога уменьшается на процент обесценения (износа, depreciation), определяемый по различным формулам [3; 5], либо умножается на коэффициент или процент годности (относительной стоимости, Percent Good Factor), значения которого даются в специальных таблицах, например, в [6; 7]. При этом проценты обесценения и годности дополняют друг друга до 100 %.

Машины, которые далее нецелесообразно или невозможно использовать по назначению, должны выбывать из эксплуатации – утилизироваться. При утилизации машина рассматривается как совокупность отдельных элементов (деталей и узлов, пригодных к дальнейшему использованию, металлолома). Рыночная стоимость этих элементов за вычетом стоимости работ по демонтажу машины и доставку отдельных ее элементов к месту продажи образует *утилизационную стоимость* машины. Обычно она невелика по сравнению со стоимостью новой машины той же марки.

В общем случае коэффициент годности машины зависит от ее технического состояния. Однако адекватных измерителей технического состояния, приемлемых для оценщиков, пока не предложено, поэтому чаще всего оценщики характеризуют его *возрастом* машины (в теории надёжности состояние машин описывают наработкой, однако сведения о ней часто фальсифицируются, и покупатели машин на российском рынке им не доверяют). Поскольку машины одного

возраста обычно различаются по техническому состоянию, для их оценки используют *средний* коэффициент годности/износа. Нередко его считают равным *относительному возрасту* машины – отношению ее возраста к среднему сроку службы. Однако такой метод не учитывает утилизационной стоимости машин, не позволяет оценивать машины за пределами среднего срока службы и часто не согласуется с фактическими ценами достаточно старых машин. Более обоснованные результаты получаются, если по рыночным данным строить *регрессионные* зависимости цен машин от возраста. Подобные зависимости предлагались во многих источниках, например, в [3; 4]. В [5; 8; 9] описаны зависимости среднего коэффициента годности машин от возраста, учитывающие вероятностный характер срока их службы. Однако при этом распределение срока службы задавалось экзогенно, а неопределенность процесса их деградации (ухудшения технико-экономических характеристик) не учитывалась. Задачи стоимостной оценки машин в таких ситуациях стали исследоваться сравнительно недавно. Некоторые модели для этой цели предложены, например, в [10; 11].

Моделированию случайных процессов деградации машин (и иных технических систем) посвящено огромное количество публикаций, например, [12; 13; 14; 15]. Основное внимание в них уделялось влиянию деградации на надежность машины, статистическому моделированию процесса и оптимизации операционных параметров (например, периодичности ремонтов и замен элементов). Однако при этом принималось, что в ходе эксплуатации машины меняется только интенсивность отказов, но не производительность машины или операционные затраты. Соответственно, оптимальные решения находились по критерию минимизации средних (в том или ином смысле). Однако такие критерии не в полной мере отвечали коммерческим интересам владеющих машинами фирм, а применить соответствующие модели для оценки РС реальных машин оказалось невозможным. Модели, количественно учитывающие и надёжность и некоторые виды деградации машин при их стоимостной оценке, предложены в [11; 16].

В данной статье предлагается одна из моделей такого рода. В ней машина рассматривается как единое целое (а не совокупность отдельных элементов, каждый из которых деградирует по-своему) и не

учитывается влияние дорогостоящих капитальных ремонтов. Несмотря на упрощённое описание процесса использования машин, модель позволяет получить некоторые аналитические и численные зависимости, пригодные для практической оценки средних коэффициентов годности подержанных машин. Анализ этой модели проводится по той же схеме, что и в [16]. Кроме того, почти до конца статьи будем считать, что инфляция отсутствует, а утилизационная стоимость машин – нулевая.

Деградация машин

Далее мы рассматриваем машины только одной марки. РС новой машины мы будем считать известной величиной и обозначим через K . Предполагается, что все машины предназначены для производства определённой *работы* и используются по своему назначению. Выполняемая машинами работа необходима участникам рынка, т.е. обладает полезностью для них, а следовательно, имеет и свою РС. РС единицы работы далее будем обозначать через p .

Процесс использования машин будем рассматривать в непрерывном времени. Состояние машины мы характеризуем ее производительностью w – объемом работ, выполняемых в малую единицу времени. Производительность новой машины принимается равной единице.

В составе операционных затрат, необходимых для выполнения работ, мы выделим постоянную и переменную (пропорциональную объему выполняемых работ) составляющие. Постоянные затраты, осуществляемые в единицу времени, обозначим через c , а переменные затраты, приходящиеся на единицу объема работ, через g . В таком случае машина, находящаяся в состоянии w , за малое время dt выполнит объем работ $w dt$, на что потребуются операционные затраты $(gw+c)dt$. При этом выгоды от работы машины составят

$$p w dt - (g w + c) dt = c(L w - 1) dt, \text{ где } L = (p - g) / c. \quad (1)$$

Обратим внимание, что в формулу для L входит неизвестная РС единицы выполняемых машинами работ, поэтому величина L далее будет рассматриваться как неизвестный параметр модели. Заметим также, что эксплуатация новой машины, у которой $w = 1$, должна

приносить положительные выгоды (иначе такие машины никто бы не покупал), поэтому $L > 1$.

Процесс деградации мы связываем с потоком случайных скрытых отказов, приводящих к случайным последствиям, и описываем следующим сложным пуассоновским процессом.

Время от времени с интенсивностью λ происходят случайные скрытые отказы. Их можно вообще не заметить или частично устранить их последствия при *текущем* ремонте, однако и в том и в другом случае характеристики машины ухудшаются (в том числе за счёт увеличения затрат на ТОиР). Принимается следующая модель ухудшения состояния машины после отказа.

Производительность машины w умножается на случайный коэффициент ξ , имеющий распределение на отрезке $[0,1]$ с функцией распределения x^α и плотностью распределения $\alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha > 1$ – некоторый параметр. Таким образом, в процессе эксплуатации производительность машины остается неизменной или уменьшается. Поэтому, если после очередного отказа производительность машины оказалась меньшей, чем L^{-1} , то с этого момента машина будет приносить только отрицательные выгоды. Очевидно, что продолжать ее эксплуатацию невыгодно, и мы принимаем, что она должна быть утилизирована. Подобный отказ будем называть *фатальным* (отказы, после которых машину физически невозможно или экономически нецелесообразно использовать по назначению, в теории надёжности именуют ресурсными).

Суммируя изложенное, можно сказать, что в нашей модели последствия отказов машины, если только они не оказались фатальными, «накапливаются» до тех пор, пока не достигнут уровня, при котором использование машины по назначению становится нецелесообразным, и она утилизируется, принося нулевые выгоды.

Зависимость РС машины от её состояния

Как уже отмечалось, РС актива на дату оценки отражает выгоды от его последующего использования. При этом стохастичность процесса использования актива учитывается путём использования «взвешенных по вероятностям» (в терминологии МСО) выгод. Для оценки РС машин применим упоминаемый, но не раскрываемый в

МСО и лежащий в основе метода дисконтирования денежных потоков **принцип ожидания выгод**. Мы будем использовать следующую его формулировку [4]:

РС машины на дату оценки равна математическому ожиданию суммы дисконтированных выгод от наиболее эффективного использования ее в течение прогнозного периода и ее РС в конце периода.

К этой формулировке необходимо сделать ряд комментариев.

1. Длительность прогнозного периода может быть выбрана произвольно, поскольку РС объекта от этого выбора не зависит.

2. Включение стоимости машины в конце периода в состав суммарных за прогнозный период выгод может пониматься и как выгода от продажи машины по рыночной стоимости. Тем самым продажа машины рассматривается как один из способов его использования.

3. В условиях вероятностной неопределенности термин «ожидаемый» понимается как «математическое ожидание» (в МСО – «взвешенное по вероятностям»), а риски, связанные с неопределенностью выгод, в ставке дисконтирования не учитываются – такую ставку назовем «безрисковой».

4. Вид ставки дисконтирования определяется видом выгод: номинальные (реальные) выгоды должны дисконтироваться по номинальной (реальной) ставке, а посленалоговые (доналоговые) выгоды – по после- (до-)налоговой ставке⁵. В нашей модели предполагается отсутствие инфляции и используются доналоговые выгоды, поэтому для дисконтирования выгод мы используем номинальную доналоговую «безрисковую» ставку, обозначаемую через r .

Отметим, что использование принципа ожидания выгод для оценки РС машины предполагает оптимизацию процесса ее использования по критерию максимума ожидаемой суммы дисконтированных выгод и, в конечном счете, обеспечивает максимизацию стоимости фирмы, что более оправдано с экономических позиций. Естественно, что оптимальное решение при этом оказывается не таким, как в теории

⁵ Наблюдаемые на рынке доходности финансовых инструментов, используемые при установлении ставок дисконтирования, являются номинальными доналоговыми.

надежности, где использование машины оптимизируется по затратным критериям.

В общем случае РС машины зависит от того, на какую дату она оценивается, и каково ее техническое состояние на эту дату. В данной модели предполагается отсутствие инфляции, а состояние машины характеризуется ее производительностью (w), поэтому РС машины не зависит от того, на какую дату она определяется, и мы будем считать её некоторой (неизвестной) функцией $V(w)$. Из технических и экономических соображений вытекает, что эта функция должна быть непрерывной. Кроме того, поскольку при $w < L^{-1}$ машина должна быть утилизирована, то $V(w) = 0$ при $w \leq L^{-1}$. Найдем явное выражение для $V(w)$.

Для этого рассмотрим машину в состоянии $w > L^{-1}$ на дату оценки и выясним, как изменится её РС за малое время dt . Если она не откажет, то останется в том же состоянии и будет иметь ту же РС $V(w)$. Если же произойдет отказ (вероятность этого – λdt), то машина перейдет в новое случайное состояние $w\xi$ и будет иметь стоимость $V(w\xi)$. Если при этом отказ окажется фатальным, т.е. будет $\xi < 1/(Lw)$, то машина будет утилизирована, а её РС обратится в нуль. Легко видеть, что вероятность такого события равна $(Lw)^{-\alpha}$.

Применим принцип ожидания выгод к нашей машине и малому периоду времени dt после даты оценки. Учитывая, что машина за время dt при отсутствии отказа принесёт (доналоговые) выгоды в сумме $c(Lw-1)dt$, а при фатальном отказе – нулевые выгоды, мы получим:

$$V(w) = c(Lw-1)dt + (1-rdt) \left[(1-\lambda dt)V(w) + \lambda dt \int_{1/(Lw)}^1 V(w\xi) \alpha \xi^{\alpha-1} d\xi \right].$$

Заменив в интеграле ξ на x/w , с точностью до малых более высокого порядка найдем:

$$V(w) = V(w) + \left\{ c(Lw-1) - (r+\lambda)V(w) + \lambda w^{-\alpha} dt \int_{1/L}^w V(x) \alpha x^{\alpha-1} dx \right\} dt.$$

Поэтому:

$$c(Lw-1) - (r+\lambda)V(w) + \lambda w^{-\alpha} \int_{1/L}^w V(x) \alpha x^{\alpha-1} dx = 0.$$

Умножив это на w^α и продифференцировав по w , мы получим:

$$(\alpha + 1)cLw^\alpha - c\alpha w^{\alpha-1} - (r + \lambda)V'(w)w^\alpha - \alpha rV(w)w^{\alpha-1} = 0,$$

или, после простых преобразований:

$$V'(w) + \frac{\alpha r}{(r + \lambda)w}V(w) = \frac{(\alpha + 1)cL}{(r + \lambda)} - \frac{c\alpha}{(r + \lambda)w}.$$

Решая это дифференциальное уравнение при краевом условии $V(1/L)=0$, найдём:

$$V(w) = \frac{(\alpha + 1)c}{\alpha r + r + \lambda} \left[Lw - (Lw)^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right] - \frac{c}{r} \left[1 - (Lw)^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right]. \quad (2)$$

Отсюда при $w = 1$ мы получаем выражение для РС новой машины (K):

$$K = \frac{(\alpha + 1)c}{\alpha r + r + \lambda} \left[L - L^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right] - \frac{c}{r} \left[1 - L^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right]. \quad (3)$$

В нашей модели величины K , r и c известны, так что равенство (3) потребует нам позднее для определения неизвестных пока параметров модели L , α и λ .

Разделив (2) на (3), мы получаем нелинейную зависимость коэффициента годности машины от ее производительности:

$$k(w) = \frac{V(w)}{K} = \frac{Lw - (Lw)^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} - \frac{\alpha r + r + \lambda}{(\alpha + 1)r} \left[1 - (Lw)^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right]}{L - L^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} - \frac{\alpha r + r + \lambda}{(\alpha + 1)r} \left[1 - L^{-\frac{\alpha r}{(r + \lambda)}} \right]}. \quad (4)$$

Остаточный срок службы машины

Поскольку (случайный) остаточный срок службы машины зависит только от её состояния w , его можно рассматривать как случайную функцию $\tau(w)$. Положим $\varphi(p, w) = \mathbf{E} \left[e^{-p\tau(w)} \right]$. Найдя эту функцию, можно определить и другие характеристики случайной величины $\tau(z)$, в том числе и интересующие нас среднее значение $T(w)$

и дисперсию $D(w)$ остаточного срока службы машины. Здесь важно иметь в виду, что указанные функции непрерывны только при $w > 1/L$, а при $w = 1/L$ имеют разрыв по следующей причине. Пусть w стремится к $1/L$, уменьшаясь. Наилучшим способом использования машины здесь будет продолжать ее эксплуатацию, однако вероятность того, что очередной отказ окажется фатальным, будет возрастать, стремясь к единице. Это значит, что средний остаточный срок службы машины будет стремиться к времени ее работы до отказа. В нашем случае отказы происходят с интенсивностью λ , так что среднее время работы машины до отказа составляет $1/\lambda$. Поэтому, если w , уменьшаясь, стремится к $1/L$, средний остаточный срок службы машины $T(w)$ будет стремиться к $1/\lambda$. В то же время при $w < 1/L$ машину выгодно немедленно утилизировать, и поэтому здесь $T(w) = 0$. Соответственно, в точке $1/L$ будет разрыв и у функции $\varphi(p, w)$, и мы будем искать ее только в области $w > 1/L$.

Возьмем машину, находящуюся в состоянии $w > 1/L$ на дату оценки, и выясним, как за малый период времени dt изменится остаточный срок её службы. Здесь возможны два случая.

1. С вероятностью $1 - \lambda dt$ отказа не произойдет. Тогда в конце периода машина останется в том же состоянии и будет иметь тот же остаточный срок службы $\tau(w)$. При этом в начале периода этот срок составит $\tau(w) + dt$.

2. С вероятностью λdt произойдет отказ, а машина перейдет в случайное состояние $w\xi$ и будет иметь остаточный срок службы $\tau(w\xi)$. Но при $w\xi < 1/L$, что возможно с вероятностью $(Lw)^{-\alpha}$, машина будет утилизирована, и тогда $\tau(w\xi) = 0$, $e^{-p\tau(w\xi)} = 1$.

Поэтому (с точностью до малых более высокого порядка) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(p, w) &= \mathbf{E} \left[e^{-p\tau(w)} \right] = (1 - \lambda dt) \mathbf{E} \left[e^{-p(\tau(w) + dt)} \right] + \lambda dt \mathbf{E} \left[e^{-p\tau(w\xi)} \right] = \\ &= (1 - \lambda dt) (1 - pdt) \varphi(p, z) + \lambda dt \left[\int_{1/(Lw)}^1 \varphi(p, w\xi) \alpha \xi^{\alpha-1} d\xi + (Lw)^{-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда после простых преобразований и замены переменных $w\xi = x$ в интеграле получим:

$$(\lambda + p)\varphi(p, w) - \lambda\alpha w^{-\alpha} \int_{1/L}^w \varphi(p, x) x^{\alpha-1} dx = \lambda(Lw)^{-\alpha}.$$

Если обозначить здесь $\int_{1/L}^w \varphi(p, x) x^{\alpha-1} dx = F(p, w)$ и учесть, что в точке $1/L$ функция $F(p, w)$ имеет непрерывную правую производную, а $\varphi(p, w) = F'_w(p, w)w^{1-\alpha}$, то полученное уравнение примет вид:

$$(\lambda + p)w^{1-\alpha}F'_w(p, w) - \alpha\lambda w^{-\alpha}F(p, w) = \lambda(Lw)^{-\alpha}.$$

Решая это уравнение с краевым условием $F(p, 1/L)=0$, найдем:

$$\begin{aligned} F(p, w) &= \frac{(Lw)^{\alpha\lambda/(\lambda+p)} - 1}{\alpha L^\alpha}; \quad \varphi(p, w) = F'_w(p, w)w^{1-\alpha} = \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + p)}(Lw)^{-\alpha p/(\lambda+p)}. \end{aligned}$$

Первые два момента случайной величины $\tau(w)$ найдём по известным формулам:

$$\begin{aligned} T(z) &= \mathbf{E}[\tau(w)] = -\varphi'_p(0, w) = \frac{1 + \alpha \ln Lw}{\lambda}; \\ \mathbf{E}[\tau^2(w)] &= \varphi''_{pp}(0, w) = \frac{2 + 4\alpha \ln Lw + \alpha^2 \ln^2 Lw}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь можно определить коэффициент вариации $v(w)$ остаточного срока службы:

$$v(w) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}[\tau^2(z)]}{T^2(z)} - 1} = \frac{\sqrt{1 + 2\alpha \ln Lw}}{1 + \alpha \ln Lw}. \quad (6)$$

Для многих видов машин оценщики имеют информацию о среднем значении (T) и коэффициенте вариации (v) *полного* срока службы. Так, средние сроки службы машин можно оценить на основе их назначенных или амортизационных сроков службы [5], а коэффициенты вариации – по данным РД⁶ или [17; 18]. Поэтому

⁶ РД 26-01-143-83. Надежность изделий химического машиностроения. Оценка надежности и эффективности при проектировании. Табл. 3 справочного приложения 3. – М., 1983.

величины T и v мы будем считать известными. Тогда, применив равенства (5) и (6) к новой машине, у которой $w = 1$, можно найти α и λ :

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{Tv^2}; \quad \alpha = \frac{\lambda T - 1}{\ln L}. \quad (7)$$

Подставив эти выражения в формулу (3), мы получим уравнение для определения неизвестного значения L , после чего α находится по второй из формул (7). Теперь можно оценить РС любой подержанной машины, зная ее производительность, по формуле (2), а также оценить (ранее неизвестную) РС единицы выполняемых машиной работ, используя формулу (1) в следующем виде:

$$p = g + Lc.$$

Зависимости средних коэффициентов годности машины от возраста

Выше мы выразили РС машины через ее производительность. Между тем нередко оценщик знает только возраст оцениваемой машины, но не ее производительность. Однако машины одного возраста обычно различаются по своему техническому состоянию и, следовательно, по стоимости. Поэтому оценщики обычно отбирают группу машин той же марки и примерно того же возраста с известными ценами и находят их *среднюю* цену. Мы поступим так же и будем искать регрессионную зависимость стоимости машин от их возраста или, что то же самое, среднюю стоимость работоспособных (не утилизированных) машин каждого возраста t . Для этого придётся решать более общую задачу.

Обозначим через $G(w, t)$ группу работоспособных на дату оценки машин, которые t лет назад находились в состоянии w , и будем искать их среднюю их стоимость – $V(w, t)$.

Рассмотрим машины группы $G(w, t+dt)$. Как мы видели раньше, вероятность того, что с *какой-нибудь* машиной, находящейся в состоянии w , за малый период dt не произойдёт фатального отказа, равна $1 - \lambda(Lw)^{-\alpha} dt$. Однако для рассматриваемых машин эта вероятность равна 1, поскольку они дожили до даты оценки. Поэтому за период dt для них возможны только две ситуации:

1) с вероятностью $\frac{1-\lambda dt}{1-\lambda(Lw)^{-\alpha} dt} \approx 1-\lambda \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] dt$ машина не

откажет, останется в том же состоянии и попадёт в группу $G(w, t)$;

2) с дополнительной вероятностью $\lambda \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] dt$ машина откажет и перейдет в случайное состояние $w\xi > 1/L$, т.е. попадёт в группу $G(w\xi, t)$. При этом ξ будет распределена на отрезке $[1/(Lw), 1]$ с плотностью $\alpha\xi^{\alpha-1} / \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right]$.

Отсюда следует, что средняя стоимость машин группы $G(w, t+dt)$ будет средней взвешенной из стоимостей $V(w, t)$ и $V(w\xi, t)$:

$$V(w, t+dt) = \left\{1-\lambda \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] dt\right\} V(w, t) + \\ + \lambda \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] dt \int_{1/(Lw)}^1 V(w\xi, t) \frac{\alpha\xi^{\alpha-1} d\xi}{1-(Lw)^{-\alpha}}.$$

Сделав в интеграле замену переменных $w\xi = x$ и преобразуя, мы получим:

$$V(w, t+dt) = V(w, t) + \\ + \lambda \left\{ w^{-\alpha} dt \int_{1/L}^w V(x, t) \alpha x^{\alpha-1} dx - \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] V(w, t) \right\} dt.$$

Отсюда вытекает интегро-дифференциальное уравнение для функции V :

$$\frac{\partial V(w, t)}{\partial t} = \lambda \left\{ w^{-\alpha} \int_{1/L}^w V(x, t) \alpha x^{\alpha-1} dx - \left[1-(Lw)^{-\alpha}\right] V(w, t) \right\}. \quad (8)$$

Учтем теперь, что $V(w, 0)$ – это стоимость $V(w)$ машины, находящейся на дату оценки в состоянии w , для которой мы выше получили формулу (2). Отсюда вытекает краевое условие для уравнения (8): $V(w, 0) = V(w)$. Второе краевое условие вытекает из того, что РС машин в состоянии $1/L$ – нулевая: $V(1/L, t) = 0$.

Теперь мы в состоянии дать решение поставленной задачи – найти среднюю стоимость работоспособных (не утилизированных)

машин каждого возраста. Действительно, такая машина возраста t была t лет назад новой, т.е. находилась в состоянии $w = 1$. Это значит, что все такие машины образуют группу $G(1,t)$, так что их средняя стоимость на дату оценки составляет $V(1,t)$. В то же время стоимость новой машины K в наших обозначениях можно представить как $V(1,0)$. Поэтому средний коэффициент годности для машин возраста t можно найти как отношение этих величин $V(1,t)/V(1,0) = V(1,t)/K$.

При практической оценке оказалось удобным строить зависимости средних коэффициентов годности не от абсолютного, а от относительного возраста – отношения возраста к сроку службы $\tau = t/T$. Это объясняется тем, что такие зависимости, как было выяснено, например, в [5; 9; 16], во многих случаях слабо зависят от среднего срока службы. Проведение численных расчетов облегчается, если вместо «наглядной» переменной w , отражающей производительность машины, использовать ее произведение на $L : q = Lw$. Это позволяет ввести обозначение $C(q,\tau) = V(q/L, T\tau)$. При этом средний коэффициент годности будет задаваться формулой:

$$k(\tau) = C(L,\tau)/K, \quad (9)$$

а функция C будет решением вытекающего из (8) уравнения

$$\frac{\partial C(q,\tau)}{\partial \tau} = \lambda T \left\{ q^{-\alpha} \int_1^q C(y,\tau) \alpha y^{\alpha-1} dy - (1 - q^{-\alpha}) C(q,\tau) \right\} \quad (10)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} C(1,0) &= 0; \quad C(q,0) = V(q/L) = \\ &= \frac{(\alpha+1)c}{\alpha r + r + \lambda} \left[q - q^{-\frac{\alpha r}{(r+\lambda)}} \right] - \frac{c}{r} \left[1 - q^{-\frac{\alpha r}{(r+\lambda)}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные результаты

Зависимости коэффициентов годности от производительности машины, рассчитанные по формулам (4) и (7) для некоторых сочетаний T и v , представлены на рис. 1.

Для нахождения зависимостей $k(\tau)$ среднего коэффициента годности машины от относительного возраста мы решали систему

уравнение (9) с краевыми условиями (10) численными методами. Была проведена серия расчётов для $T = 5 \dots 25$ лет, $v = 0,2 \dots 0,7$, $c = 0,1 \dots 20$. В результате проведенных расчетов оказалось, что полученные зависимости практически не зависят от ставки дисконтирования (r), среднего срока службы (T) и параметра c , т.е. от отношения условно-постоянных затрат к РС машины (более точно: при увеличении r , c и T в соответствующих диапазонах коэффициенты годности незначительно уменьшаются). Такие зависимости для ряда значений коэффициента вариации срока службы (v) приведены на рис. 2. Они отличаются от предложенных в [5; 16].

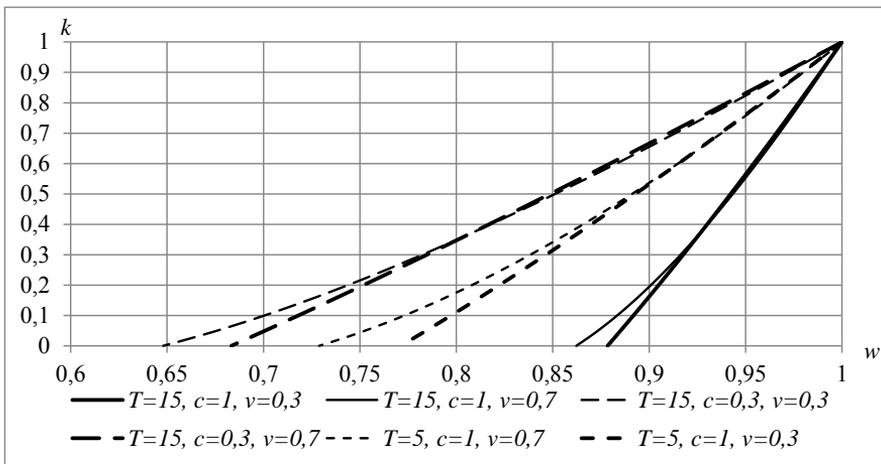


Рис. 1. Зависимости коэффициентов годности от производительности машины для некоторых сочетаний T, c и v

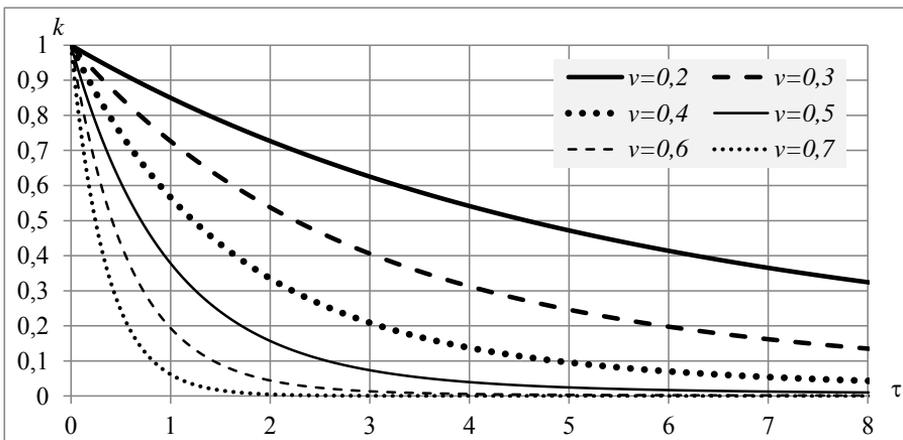


Рис. 2. Зависимости среднего коэффициента годности от относительного возраста машин при разных коэффициентах вариации срока службы

Более реалистичные допущения

При построении предложенной модели был сделан ряд не слишком реалистичных допущений. Оказывается, что их можно существенно смягчить, сделав модель пригодной для практического применения.

Утилизационную стоимость машин U до сих пор мы считали нулевой. На самом деле отношение $u = U/K$ (относительная утилизационная стоимость) обычно составляет 0,03...0,10. Нетрудно показать, что в случае, когда утилизационная стоимость машины U отлична от нуля, утилизация машины будет эффективной, только если интенсивность приносимых ею выгод будет меньше произведения rU . В такой ситуации удобно рассматривать так называемые «чистые рыночные стоимости» машин – их РС за вычетом утилизационной стоимости (U). Повторив те же рассуждения, что и в [16, раздел 7], мы увидим, что построенная нами модель остается в силе со следующими изменениями:

– РС новой машины (K) заменяется на ее «чистую рыночную стоимость» $K-U$, постоянные затраты c заменяются на $c+rU$;

– функции $V(w)$, $V(w, t)$, $C(q, \tau)$ теперь будут отражать «чистые рыночные стоимости» машин с соответствующими характеристиками;

– средние коэффициенты годности $k_u(\tau)$, учитывающие утилизационную стоимость, выражаются через аналогичные коэффициенты $k(\tau)$, определяемые формулой (9), следующим образом:

$$k_u(\tau) = (1 - u)k(\tau) + u. \quad (12)$$

Обратим внимание, что в формуле (12) по существу РС подержанной машины разложена на две составляющие, отражающие ее стоимость соответственно как средства выполнения работ («чистую») и как объекта утилизации. При этом с возрастом вторая составляющая не меняется, а первая меняется так же, как было бы при $U = 0$.

При построении модели предполагалось **отсутствие инфляции**, что нереалистично. Обычно оценщики учитывают инфляцию, прогнозируя наблюдаемые темпы роста цен. Однако измерению поддаются только темпы роста цен новых (а не подержанных) машин, так что учесть рост цен машин удастся только приближенно. Будем считать известным темп i роста цен новых машин данной марки на период, близкий к дате оценки. Предположим, что у машин,

находящихся в одном и том же (не обязательно новом) состоянии, цены машин растут с таким же темпом. Такого рода инфляция исследована в [4, раздел 4.3] и названа групповой. Оказалось, что в условиях групповой инфляции коэффициенты годности остаются стабильными⁷, а построенная модель остается в силе, если заменить доналоговую номинальную ставку дисконтирования r на $r-i$.

Заключение

Предложенная модель позволяет выяснить влияние пуассоновского процесса деградации машин на их стоимость и срок службы, а также установить необходимую оценщикам зависимость средних коэффициентов годности от возраста.

Вместе с тем принятое в статье описание процесса деградации машины может оказаться недостаточно адекватным. Представляется, что в тех же целях могут быть использованы и случайные процессы иного типа, и к ним также может быть применён использованный в статье подход к установлению зависимостей коэффициентов годности от возраста.

В предложенной модели учтено ухудшение технического состояния машин в процессе работы, но не учтена возможность их **капитального ремонта**, улучшающего техническое состояние машины и повышающего ее стоимость. Это – существенный недостаток модели. Однако чтобы предложить приемлемые для практической оценки машин модели, учитывающие не только деградацию и отказы машин, но и влияние капитальных ремонтов, необходимо знать закономерности изменения состояния машины после ремонта и иметь информацию об истории ремонтов каждой оцениваемой машины. К сожалению, решить эти проблемы в настоящее время не представляется возможным.

Список литературы

1. Международные стандарты оценки: пер. с англ. – М.: Российское общество оценщиков, 2020.

⁷ Групповой характер инфляции подтверждается и тем, что табличные зависимости процентов годности машин от возраста, ежегодно публикуемые властями ряда штатов США в источниках типа [6;7], со временем практически не меняются.

2. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд-во АН СССР, 1960.
3. Оценка машин и оборудования: учебник / М.А. Федотова, А.П. Ковалев [и др.]. – 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2018. – 324 с.
4. Смоляк С.А. Стоимостная оценка машин и оборудования. – М.: Опцион, 2016. – 377 с.
5. Справочник оценщика машин и оборудования // Корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования / под ред. Л.А. Лейфера. – изд. 2-е. – Н. Новгород: Приволжский центр методического и информационного обеспечения оценки, 2019. – 320 с.
6. 2019 Cost Index & Depreciation Schedules. Raleigh: North Carolina Department of Revenue [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.ncdor.gov/documents/2019-cost-index-and-depreciation-schedules> (дата обращения: 10.01.2022).
7. 2020 Personal Property Manual. Arizona Department of Revenue [Электронный ресурс]. – URL: https://azdor.gov/sites/default/files/media/PROPERTY_pp-manual.pdf (дата обращения: 10.01.2022).
8. AN 582. Assessor's Handbook, Section 582. The Explanation of the Derivation of Equipment Percent Good Factors. California State Board of Equalization. February 1981, Reprinted August, 1997.
9. Лейфер Л.А., Кашникова П.М. Определение остаточного срока службы машин и оборудования на основе вероятностных моделей // Имущественные отношения в Российской Федерации. – 2008. – № 1(76). – С. 66–79.
10. Аркин В.И., Слостников А.Д., Смоляк С.А. Оценка имущества и бизнеса в условиях неопределенности (проблемы «хвоста» и «начала») // Аудит и финансовый анализ. – 2006. – №1. – С. 81–92.
11. Смоляк С.А. Стоимостная оценка машин в условиях неопределенности их технико-экономических характеристик // Аудит и финансовый анализ. – 2018. – №5. – С. 52–60.
12. Li W., Pham H. Reliability modeling of multi-state degraded systems with multi-competing failures and random shocks. IEEE Transactions on Reliability. – 2005. – Vol. 54(2). – P. 297–303.
13. Nakagawa T. Shock and damage models in reliability theory – Springer, 2007.
14. An approach to reliability assessment under degradation and shock process / Z. Wang, H.-Z. Huang, Y. Li, N.-C. Xiao // IEEE Transactions on Reliability. – 2011. – Vol. 60(4). – P. 852–863.
15. Arts J.J. Maintenance modeling and optimization. (BETA publicatie: working papers; Vol. 526). – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2017.

16. Смоляк С.А. Пуассоновский процесс деградации машин: применение к стоимостной оценке // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2020. – №4 (48). – С. 63–84. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-48-4-3
17. Острейковский В.А. Теория надежности: учебник для вузов. – М.: Высшая школа. 2003. – 463 с.
18. Гринчар Н.Г., Чалова М.Ю., Фомин В.И. Основы надежности машин: учебное пособие. – М.: МГУПС. 2014. – Ч. 1. – 98 с.

References

1. International Valuation Standards. International Valuation Standards Council, 2019.
2. Cantorovich L.V. Economicheskyy raschyot nailuchshego ispolzovaniya resursov [Economic calculation of the optimal use of resources]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publ. 1960.
3. Fedotova M.A. (Ed.). Otsenka mashin i oborudovaniya [Machinery and equipment valuation]. Textbook. Second ed. Moscow, INFRA-M, 2018.
4. Smolyak S.A. Stoimostnaya otsenka mashin i oborudovaniya [Machinery and equipment valuation]. Moscow, Opton, 2016.
5. Leifer L.A. (Ed.). Spravochnik otsenshchika mashin i oborudovaniya. Correctiruyushchiye coefficienty i charakteristiki rynka mashin i oborudovaniya [Reference book of the appraiser of machinery and equipment. / Corrective factors and characteristics of the machinery and equipment market]. Second ed. Nizhny Novgorod: Volga Region Center for Methodological and Informational Support of Assessment, 2019.
6. 2019 Cost Index & Depreciation Schedules. Raleigh: North Carolina Department of Revenue, available at: <https://www.ncdor.gov/documents/2019-cost-index-and-depreciation-schedules> (accessed 10 Januari 2022).
7. 2020 Personal Property Manual. Arizona Department of Revenue, available at: https://azdor.gov/sites/default/files/media/PROPERTY_pp-manual.pdf (accessed 10 Januari 2022).
8. AH 582. Assessor's Handbook, Section 582. The Explanation of the Derivation of Equipment Percent Good Factors. California State Board of Equalization. February 1981. Reprinted August 1997.
9. Leifer L.A., Kashnikova P.M. Opredeleniye ostatochnogo sroka sluzhby mashin i oborudovaniya na osnove veroyatnostnykh modeley [Calculation of residual service life of machinery and equipment based on probabilistic models]. *Imushchestvennyye otnosheniya v Rossiyskoy Federatsii*, 2008, no 1(76), pp. 66-79.
10. Arkin V.I., Slastnikov A.D. Appraisal of property and business in conditions of indeterminacy (a problem of "tail" and "beginnings"). *Audit and financial analysis*, 2006, no 1, pp. 73-83.

11. Smolyak S.A. Machinery valuation under uncertainty of their technical and economic characteristics. *Audit and financial analysis*, 2018, no 5, pp. 52-60.

12. Li W., Pham H. Reliability modeling of multi-state degraded systems with multi-competing failures and random shocks. *IEEE Transactions on Reliability*, 2005, vol. 54(2), pp. 297-303

13. Nakagawa T. Shock and damage models in reliability theory. Springer, 2007.

14. Wang Z., Huang H.-Z., Li Y., Xiao N.-C. An approach to reliability assessment under degradation and shock process. *IEEE Transactions on Reliability*, 2011, vol. 60(4), pp. 852-863.

15. Arts, J.J. Maintenance modeling and optimization. (BETA publicatie : working papers; vol. 526). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven. 2017.

16. Smolyak S.A. Пуассоновский процесс деградации машин: применение к стоимостной оценке [The Poisson process of machinery degradation: Application to valuation]. *Journal of the New Economic Association*, 2020, no 4(48), pp. 63–84. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-48-4-3

17. Osteykovsky V.A. Теория надежности [Reliability theory]: Textbook for universities. Moscow, Vysshaya shkola, 2003.

18. Grinchar N.G., Chalova M.Yu. Fomin V.I. Основы надежности машин [Fundamentals of machinery reliability]. Part 1: Tutorial. Moscow, MGUPS Pubs, 2014.

Статья получена: 10.01.2022

Статья одобрена: 28.02.2022

Принята к публикации: 18.03.2022

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сведения об авторе

Смоляк Сергей Абрамович (Москва, Россия) – доктор экономических наук, главный научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН (117418, г. Москва, Нахимовский пр-т, 47, e-mail: smolyak1@yandex.ru).

About the author

Sergey A. Smolyak (Moscow, Russian Federation) – Dr. Habil. in Economics, Principal Science Researcher, Central Economics and Mathematics Institute of

Russian Academy of Sciences (47, Nakhimovsky ave., Moscow, 117418, e-mail: smolyak1@yandex.ru).

**Библиографическое описание статьи
согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:**

Смоляк, С. А. Стоимостная оценка машин со случайно ухудшающимися операционными характеристиками / С. А. Смоляк. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.08 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2022. – № 1. – С. 153–175.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Смоляк, С. А. Стоимостная оценка машин со случайно ухудшающимися операционными характеристиками / С. А. Смоляк // Прикладная математика и вопросы управления. – 2022. – № 1. – С. 153–175. DOI: 10.15593/2499-9873/2022.1.08

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Smolyak S.A. Valuation of machinery and equipment with randomly degraded operating characteristics. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2022, no. 1, pp. 153–175. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.08 (*in Russian*)