

**А.В. Ганичева<sup>1</sup>, А.В. Ганичев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Тверская государственная сельскохозяйственная академия, Тверь, Россия

<sup>2</sup>Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия

## **МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕСУРСА**

Исследуется проблема оптимизации распределения целочисленного ресурса (средств) по задачам (мероприятиям, целям). Методы, исследующие данную проблему, относятся к области комбинаторной оптимизации, а именно к задачам о назначении целей. Известные методы решения данной проблемы являются численными, переборными, приближенными, требуют проведения большого числа итераций, не предполагают проверку условий существования целочисленного решения, в ряде случаев могут выдавать решение, не только далекое от оптимального, но и нарушающее область допустимых значений переменных.

Целью данной работы является разработка нового аналитического способа решения задачи распределения целочисленных ресурсов методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого распределяемые ресурсы представлены в виде суммы целой и дробной частей числа. Сформулированы и доказаны условия, когда дробные части переменных решения задачи равны нулю, т.е. оно является целочисленным. Доказана теорема (критерий существования целочисленного решения), определяющая необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решение задачи существует и находится по разработанному в статье алгоритму. К таким условиям относятся однородность ресурсов, а также дополнительные условия (ограничения на целочисленность и положительность дополнительных выведенных формульных условий задачи). Показано, что полученное решение задачи соответствует максимуму целевой функции. Разработан алгоритм поиска целочисленного решения задачи распределения ресурсов методом неопределенных множителей Лагранжа и разобран конкретный пример.

Изложенный в данной статье метод может применяться для распределения ресурсов в промышленном производстве, сельском хозяйстве, системах организационного управления, учебном процессе, решении вопросов целераспределения в военном деле, построении систем информационной, техносферной безопасности, ликвидации чрезвычайных ситуаций, создании систем охраны объектов и тревожной сигнализации. В этом случае необходима его адаптация к рассматриваемым проблемам и задачам. Он может применяться также для распределения жизненнообеспечивающих ресурсов: продуктов питания, одежды, тепла, электрической энергии, газа, водоснабжения.

**Ключевые слова:** задачи, ресурсы, однородность средств, целераспределение, вероятность, целевая функция, абсолютная и относительная погрешности, оптимальное решение, целая и дробная части числа, алгоритм.

**A.V. Ganicheva<sup>1</sup>, A.V. Ganichev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Tver State Agricultural Academy, Tver, Russian Federation

<sup>2</sup>Tver State Technical University, Tver, Russian Federation

## **A METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMIZING THE DISTRIBUTION OF AN INTEGER RESOURCE**

The problem of optimizing the distribution of an integer resource (funds) by tasks (activities, goals) is investigated. The methods investigating this problem relate to the field of combinatorial optimization, namely, to the tasks of assigning goals. The known methods for solving this problem are numerical, selective, approximate, require a large number of iterations, do not involve checking the conditions for the existence of an integer solution, in some cases they can produce a solution not only far from optimal, but also violating the range of acceptable values of variables.

The purpose of this work is to develop a new analytical method for solving the problem of the distribution of integer resources by the method of indefinite Lagrange multipliers. To do this, the allocated resources are represented as the sum of the integer and fractional parts of the number. The conditions are formulated and proved when the fractional parts of the variables of the solution of the problem are zero, that is, it is an integer. A theorem (criterion for the existence of an integer solution) is proved, which determines the necessary and sufficient conditions under which the solution of the problem exists and is found according to the algorithm developed in the article. Such conditions include the homogeneity of resources, as well as additional conditions (restrictions on integers and positivity of additional derived formula conditions of the problem). It is shown that the obtained solution of the problem corresponds to the maximum of the objective function. An algorithm for finding an integer solution to the problem of resource allocation by the method of indeterminate Lagrange multipliers is developed and a specific example is analyzed.

The method described in this article can be used for the allocation of resources in industrial production, agriculture, organizational management systems, educational process, solving issues of target allocation in military affairs, building information systems, techno sphere security, emergency response, creating systems for the protection of objects and alarm systems. In this case, it is necessary to adapt it to the problems and tasks under consideration. It can also be used for the distribution of life-supporting resources: food, clothing, heat, electricity, gas, water supply.

**Keywords:** tasks, resources, uniformity of means, target distribution, probability, objective function, absolute and relative error, optimal solution, integer and fractional parts of a number, algorithm.

### **Введение**

Одним из важных классов задач комбинаторной оптимизации является задача о назначении целей. Первоначально задача рассматривалась для военных приложений как задача определения оптимального распределения комплекта различного вооружения (средств поражения) по целям для нанесения максимального ущерба противнику [1–7]. В настоящее время область применения таких задач расширилась за счет моделей распределения ресурсов в экономике [8], системах организационного управления [9, 10], планировании производства продукции [11], банковской сфере [12]. Особое внимание распределению ресурсов уделяется при проектном управлении. В статье [13] для реше-

ния данной проблемы используется система рейтингов по рабочим задачам и компетенциям.

Во многих задачах о назначении целей имеется требование целочисленности переменных. Например, количество ракет, самолетов-перехватчиков, сотрудников, компьютеров. Требование целочисленности переменных существенно усложняет процесс нахождения оптимального решения [14, 15]. Округление нецелочисленных переменных до целых чисел может привести не только к заметным потерям эффективности целочисленного плана, но и к недопустимому решению. Для решения задачи целочисленного распределения средств применяется метод максимального относительного элемента [14]. Данный метод основан на упорядоченном переборе возможных решений и является численным, приближенным. Проблема при его использовании заключается в том, что точного целочисленного решения задачи может не быть, а на поиск наиболее близкого к нему приближенному решению будут тратиться значительные вычислительные ресурсы.

Многие задачи оптимизации распределения нецелочисленных ресурсов для непрерывных функций решаются методом неопределенных множителей Лагранжа [9]. Важным и новым является распространение данного метода на решение задач дискретной оптимизации.

Целью данной работы является решение задачи распределения целочисленных ресурсов (задачи дискретной оптимизации) методом неопределенных множителей Лагранжа.

## 1. Постановка задачи

Проблема распределения ресурсов (средств) для решения набора заданных задач заключается в следующем.

Имеется  $n$  задач и  $m$  средств для их решения. Заданы важности  $a_j$  и вероятности  $p_j (j = \overline{1, n})$  выполнения  $j$ -й задачи каждым средством ( $0 < p_j < 1$ ). Обозначим через  $x_j$  – количество средств, назначенных для выполнения  $j$ -й задачи. Пусть  $x_j = [x_j] + \{x_j\}$ , где  $[x_j]$  – целая часть числа  $x_j$ ,  $\{x_j\}$  – дробная часть. Требуется найти такое распределение ресурсов  $x_j$ , при котором вероятность выполнения всех задач будет максимальна.

В этом случае максимизируемая целевая функция будет иметь вид

$$\Theta = \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[ 1 - (1 - p_j)^{[x_j] + \{x_j\}} \right] = \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[ 1 - (1 - p_j)^{[x_j]} (1 - p_j)^{\{x_j\}} \right]. \quad (1)$$

Коэффициент  $a_j$  – это важность выполнения  $j$ -й задачи,  $\frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j}$  –

нормировка  $a_j$ .

Для получения критерия целочисленности решения задачи (1) разложим множитель  $\varepsilon_j = (1 - p_j)^{\{x_j\}}$  в ряд, ограничиваясь двумя членами, получим

$$(1 - p_j)^{\{x_j\}} = 1 - \{x_j\} p_j.$$

При таком разложении абсолютная погрешность вычисления  $\varepsilon_j$  не превосходит величины  $\frac{0,5^2 \cdot 0,5^2}{2} = 0,0313$ .

В самом деле, абсолютная погрешность не превосходит первого отброшенного члена, т.е. члена  $\frac{\{x_j\}(\{x_j\} - 1) p_j^2}{2}$ .

При максимальном значении вероятности  $p = 1$  покажем, что  $\frac{\{x_j\}(\{x_j\} - 1) p_j^2}{2} \leq \frac{0,5^4}{2}$ .

Имеем  $\{x_j\}^2 - \{x_j\} - 0,5^4 \leq 0$ , т.е.  $0 \leq \{x_j\} \leq 1$  – это верно.

Относительная погрешность не превосходит величины  $\Delta = \frac{0,0313}{1 - 0,25} = 0,042$ , т.е. 4,2 %, что близко к повышенной точности. По-

грешность в вычислении функции  $\Theta$  составляет

$$\Delta_{\Theta} = \left| \frac{\Theta'_{\varepsilon_j} \varepsilon_j \Delta}{\Theta} \right| = \frac{a_j \left[ (1 - p_j)^{[x_j]} \varepsilon_j \Delta \right]}{\sum_{j=1}^n a_j \left[ 1 - (1 - p_j)^{[x_j]} \varepsilon_j \right]} \leq \Delta, \text{ т.е. } \Delta_{\Theta} \leq 4,2 \%.$$

Система ограничений задачи распределения ресурсов имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j = m, \\ 0 \leq \{x_j\} < 1, \quad j = \overline{1, n}, \\ [x_j] \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

## 2. Метод решения

Для нахождения экстремума функции (1) при ограничениях (2) запишем функцию Лагранжа:

$$\Theta^* = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[ 1 - (1 - p_j)^{[x_j]} (1 - \{x_j\} p_j) \right] + \lambda \left( m - \sum_{j=1}^n [x_j] - \sum_{j=1}^n \{x_j\} \right). \quad (3)$$

Последние два ограничения системы (2) здесь использовать не будем. Они будут учтены в дальнейшем.

Найдем частные производные по  $[x_j]$ ,  $\{x_j\}$  ( $j = \overline{1, n}$ ),  $\lambda$  и приравняем их к нулю.

Имеем

$$\Theta_{[x_j]}^* = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[ -(1 - p_j)^{[x_j]} (\ln(1 - p_j) (1 - \{x_j\} p_j)) \right] - \lambda = 0, \quad (4)$$

$$\Theta_{\{x_j\}}^* = \frac{a_j}{\sum_{j=1}^n a_j} \left[ (1 - p_j)^{[x_j]} p_j \right] - \lambda = 0, \quad (5)$$

$$\Theta_{\lambda}^* = m - \sum_{j=1}^n [x_j] - \sum_{j=1}^n \{x_j\} = 0. \quad (6)$$

Из формулы (4) для  $j = \overline{1, n-1}$  получаем

$$\begin{aligned} \ln a_j + [x_j] \ln(1 - p_j) + \ln \left( -(\ln(1 - p_j)) (1 - \{x_j\} p_j) \right) = \\ = \ln a_n + [x_n] \ln(1 - p_n) + \ln \left( -(\ln(1 - p_n)) (1 - \{x_n\} p_n) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Из формулы (5) при  $j = \overline{1, n-1}$  находим

$$\ln a_j + [x_j] \ln(1 - p_j) + \ln p_j = \ln a_n + [x_n] \ln(1 - p_n) + \ln p_n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [x_j] &= \frac{1}{\ln(1 - p_j)} \left( [x_n] \ln(1 - p_n) + \ln \frac{p_n}{p_j} + \ln \frac{a_n}{a_j} \right) = \\ &= \frac{[x_n] \ln(1 - p_n)}{\ln(1 - p_j)} + \frac{1}{\ln(1 - p_j)} \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из формулы (7) имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_n}{a_j} + \ln(-\ln(1 - p_n)(1 - \{x_n\} p_n)) + [x_n] \ln(1 - p_n) - [x_j] \ln(1 - p_j) = \\ = \ln(-\ln(1 - p_j)) + \ln(1 - \{x_j\} p_j). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом формулы (8) получаем

$$\ln(-\ln(1 - p_n)(1 - \{x_n\} p_n)) - \ln \frac{p_n}{p_j} = \ln(-\ln(1 - p_j)) + \ln(1 - \{x_j\} p_j)$$

и

$$\ln \frac{p_j (\ln(1 - p_n)(1 - \{x_n\} p_n))}{p_n \ln(1 - p_j)} = \ln(1 - \{x_j\} p_j).$$

Следовательно,

$$\{x_j\} = \frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1 - p_n)(1 - \{x_n\} p_n)}{p_n \ln(1 - p_j)}. \quad (9)$$

Допустим, что  $a_n \leq a_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ).

Предположим, что  $\{x_n\} = 0$ . В этом случае  $\{x_j\} = 0$  ( $j = 1, \dots, n-1$ )

тогда и только тогда, когда

$$\frac{p_n}{p_j} = \frac{\ln(1 - p_n)}{\ln(1 - p_j)}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что уравнение (10) выполняется тогда и только тогда, когда все  $p_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) равны. Это означает однородность средств. Тогда из формулы (9) следует, что  $\{x_j\} = 0$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ).

Определим условие выполнения равенства  $\{x_n\} = 0$ .

Подставим  $[x_j]$  из уравнения (8) и  $\{x_j\}$  из уравнения (9) в первое уравнение системы (2), получим

$$[x_n] \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j} / \ln(1-p_j) + \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1-p_n)}{p_n \ln(1-p_j)} \right) + \{x_n\} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right) = m. \quad (11)$$

Для краткости введем следующие обозначения: в формуле (11) коэффициент при  $[x_n]$  обозначим через  $a$ , второе слагаемое – через  $b$ , третье –  $c$ . Тогда

$$\{x_n\} = (m - a[x_n] - b - c) / a. \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует, что  $\{x_n\} = 0$  тогда и только тогда, когда

$$[x_n] = (m - b - c) / a. \quad (13)$$

Таким образом, условие (13) является необходимым условием целочисленности ресурсов.

При  $\{x_n\} = 0$  из уравнения (11) имеем

$$[x_n] = \left( m - \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{p_j} - \frac{\ln(1-p_n)}{p_n \ln(1-p_j)} - \ln \frac{a_n p_n}{a_j p_j} / \ln(1-p_j) \right) \right) / \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\ln(1-p_n)}{\ln(1-p_j)} + 1 \right). \quad (14)$$

При  $\{x_j\} = 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) равенство (14) превращается в равенство

$$[x_n] = \frac{1}{n} \left( m + \sum_{j=1}^{n-1} \ln \frac{a_n}{a_j} / \ln(1-p_n) \right). \quad (15)$$

При выполнении условия  $a_n \leq a_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) с учетом равенства (15) получаем, что  $[x_n] > 0$ .

Для целочисленности  $[x_n]$  необходимо и достаточно, чтобы выражение в скобках в уравнении (15) было кратно  $n$ .

При выполнении однородности из формулы (8) и (15) для  $j = \overline{1, n-1}$  имеем

$$[x_j] = [x_n] + \frac{1}{\ln(1-p_n)} \ln \frac{a_n}{a_j}. \quad (16)$$

Если  $[x_n]$  – целое положительное число, то для положительной целочисленности  $[x_j]$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{1}{\ln(1-p_n)} \ln \frac{a_n}{a_j}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) было целым при  $a_n \leq a_j$ .

Итак, точка  $P(x_1, \dots, x_n)$ , координаты которой вычисляются по формулам (15), (16), при этом в (15) выражение в скобках кратно  $n$  и второе слагаемое в формуле (16) является целым числом при  $a_n \leq a_j$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ), является стационарной точкой с целыми положительными координатами.

Достаточное условие экстремума сводится к анализу второго дифференциала функции Лагранжа (3) для найденной точки  $P$  при условии, что  $dx_i$  связаны уравнением

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (\sum dx_j^2 \neq 0).$$

Второй дифференциал для функции Лагранжа будет иметь вид

$$d^2 \mathcal{E}^* = - \sum_{j=1}^n \left( a_j / \sum_{j=1}^n a_j \right) (\ln(1-p_j))^2 (1-p_j)^{x_j} dx_j^2, \quad (17)$$

при этом  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_j} dx_j = 0$ .

Поскольку  $d^2 \mathcal{E}^* < 0$ , в точке  $P$  имеется максимум.



Таким образом, имеем следующее утверждение.

**Теорема.** Для того чтобы задача целераспределения, сводящаяся к максимизации целевой функции (1) при ограничениях (2), имела положительное целочисленное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) однородность средств, т.е. все вероятности  $p_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) должны быть равны;

2) если  $a_n = \min a_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), то  $\{x_n\} = 0$  и  $[x_n]$ , вычисленное по формуле (15), должно быть целым положительным;

3) выражение  $\frac{1}{\ln(1-p_n)} \ln \frac{a_j}{a_n}$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) должно быть целым.

В самом деле, пусть выполнены условия 1–3. Тогда из условия 1 следует, что все  $p_j$  равны, т.е. выполняется равенство (12) и при выполнении условия 3 из  $\{x_n\} = 0$  с учетом уравнения (12) следует, что  $\{x_j\} = 0$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ). Тогда отсюда вытекает равенство (15), и с учетом выполнения условия 2 получаем, что  $[x_n]$  – целое положительное число, откуда с учетом выполнения условия 3 имеем  $[x_j]$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) – целое положительное число. Из равенства (17) следует, что данное решение максимизирует функцию (1) при ограничениях (2).

Докажем теорему в обратную сторону.

Пусть  $x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – целое положительное решение, максимизирующее функцию (1) при ограничениях (2). Тогда при представлении  $x_j$  в виде  $x_j = [x_j] + \{x_j\}$ , где  $[x_j]$  – целая,  $\{x_j\}$  – дробная части числа, имеем  $\{x_j\} = 0$ , но тогда выполняется равенство (12) и все  $p_j$  равны ( $j = \overline{1, n}$ ). Значит, выполняется условие 1. Пусть  $a_n = \min_{1 \leq j \leq n} a_j$ . Тогда, очевидно,  $[x_n]$ , вычисленное по формуле (15), будет целым положительным, т.е. выполняется условие 2. При этом  $[x_j]$  ( $j = \overline{1, n-1}$ ) будет вычисляться по формуле (16), а так как  $[x_n]$  и  $[x_j]$  – целые, то выполняется условие 3.

### 3. Результаты и их обсуждение

Рассмотрим практическую реализацию разработанного метода. Приведем алгоритм поиска целочисленного решения задачи распределения средств и разберем конкретный пример.

Основные этапы алгоритма решения данной задачи заключаются в следующем.

1. Все вероятности должны быть одинаковы. Если это не так, то производится их корректировка. При невозможности такой корректировки положительного целочисленного решения не будет.

2. Ищется  $\min_{1 \leq j \leq n} a_j$ . Пусть это будет  $a_n$ .

3. Для  $x_n$  должно быть известно, что это целое положительное число, т.е.  $\{x_j\} = 0$  и  $[x_n]$  – целое положительное число.

4. Значение  $[x_n]$  вычисляется по формуле (15).

5. По формуле (16) находятся значения  $[x_j]$ , которые будут целыми положительными.

Рассмотрим следующий пример на выполнение вычислений по разработанному алгоритму.

Пусть  $n = 3$ ;  $m = 11$ ;  $p = 0,2$ ;  $a_1 = 0,5$ ;  $a_2 = 0,5$ ;  $a_3 = 0,4$ . По формулам (15) и (16) находим положительное целочисленное решение:  $x_1 = x_2 = 4$ ,  $x_3 = 3$ , максимизирующее соответствующую целевую функцию (1), которая при данных значениях:

$$\Xi = 2 \cdot \frac{0,5}{1,4} \cdot (1-0,2)^4 + \frac{0,2}{1,4} \cdot (1-0,2)^3 = 0,438857.$$

Таким образом, алгоритм позволяет аналитически найти решение задачи распределения ресурсов.

### Заключение

В статье разработан новый метод решения оптимизационной задачи распределения целочисленного ресурса. Доказана теорема (критерий существования целочисленного решения), определяющая необходимые и достаточные условия, при выполнении которых решение задачи существует и находится по разработанному в статье алгоритму. К таким условиям относится однородность ресурсов (средств), а также дополнительные условия (ограничения на целочисленность и положи-

тельность дополнительных условий задачи). Разработан алгоритм поиска целочисленного решения задачи распределения ресурсов методом неопределенных множителей Лагранжа и разобран конкретный пример.

*Исследование не имело спонсорской поддержки. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

### Список литературы

1. Абчук В.А., Матвейчук Ф.А., Томашевский Л.П. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
2. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр. – М.: Радио и связь, 1983. – 216 с.
3. Буравлев А.И. Об оценке влияния системы управления огнем на эффективность поражения целей // Вооружение и экономика. – 2012. – № 1 (17). – С. 25–29.
4. Математическая модель процесса управления средствами ПВО / Д.А. Григорьев, Т.Н. Масленникова, А.Н. Пифтанкин, А.В. Половинкина // Автоматизация процессов управления. – 2019. – № 2 (56). – С. 15–22.
5. Кежаев В.А., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г. Обоснование решений в задачах целераспределения с использованием инновационных технологий дискретного программирования // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. – 2012. – № 2 (72). – С. 97–103.
6. Письменная В.А., Якутин А.В. Повышение эффективности решения задачи целераспределения в системах воздушно-космической обороны // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». – 2017. – № 1. – С. 76–81.
7. Юдин А.В. Целераспределение неоднородных средств подавления методом двух функций // Актуальные проблемы науки и техники: материалы IV Междунар. конкурса науч.-исслед. работ, г. Уфа, 10 апреля 2021 г. – Уфа, 2021. – С. 11–15.
8. Славянов А.С. Анализ и практическое применение моделей распределения ресурсов // Бюллетень науки и практики. – 2018. – Т. 4, № 9. – С. 228–244.
9. Ганичева А.В. Оптимальное решение и оценка полезности организационных вопросов // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 3(2). – С. 53.
10. Menshikh V.V., Samorokovsky A.F., Avsentev O.S. Models of resource allocation optimization when solving the control problems in organizational systems // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 973, no 1. – P. 12–40.
11. Mathematical Model for Production Plan Optimization / S. Rezig, W. Ezzeddine, S. Turki, N. Rezg // A Case Study of Discrete Event Systems Mathematics. – 2020. – No. 8 (6). – P. 955.

12. Filippova A.S. Economic-mathematical modeling of a multi-criteria optimization management problem of a retail unit of a commercial bank Perm University Herald // *Economy*. – 2019. – No 14(1). – P. 93–109.

13. Bakanova A.P., Shikov A.N. The Method of Employee Competencies Management Based on the Ontological Approach // *CEUR Workshop Proceedings*. – 2020. – No 2590. – P. 1–9.

14. Соболевский В.А. К оценке точности задачи целераспределения средств поражения // *Военная мысль*. – 2016. – № 8. – С. 32–43.

15. Kataev A.V., Kataeva T.M., Makarova E.L. Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors' Appointment for Project Works // *Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Экономика. Управление. Право*. – 2016. – № 3. – С. 294–299.

### References

1. Abchuk V.A., Matveychuk F.A. Tomashevskiy L.P. *Spravochnik po issledovaniyu operatsiy [Handbook of Operations Research]*. Moscow, Voenizdat, 1979, 368 p.

2. Berzin YE.A. *Optimal'noye raspredeleniye resursov i teoriya igr [Optimal resource allocation and game theory]*. Moscow, Radio i svyaz', 1983, 216 p.

3. Buravlev A.I. Ob otsenke vliyaniya sistemy upravleniya ognem na effektivnost' porazheniya tseley [On the assessment of the impact of the fire control system on the effectiveness of hitting targets]. *Armament and Economics*, 2012, no. 1 (17). pp. 25-29.

4. Grigor'yev D.A., Maslennikova T.N., Piftankin A.N, Polovinkina A.V. *Matematicheskaya model' protsessa upravleniya sredstvami PVO [Mathematical model of the air defense control process]*. *Automation of Control Processes*, 2019, no. 2 (56). pp. 15-22.

5. Kezhayev V.A., Anisimov V.G., Anisimov YE.G. *Obosnovaniye resheniy v zadachakh tseleraspredeleniya s ispol'zovaniyem innovatsionnykh tekhnologiy diskretnogo programmirovaniya [Substantiation of solutions in the tasks of target allocation using innovative discrete programming technologies]*. *Izvestiya Rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk*, 2012, no. 2 (72), pp. 97-103.

6. Pis'mennaya V.A., Yakutin A.V. *Povysheniye effektivnosti resheniya zadachi tseleraspredeleniya v sistemakh vozdushno-kosmicheskoy oborony [Improving the efficiency of solving the task of target distribution in aerospace defense systems]*. *Vestnik Kontserna VKO Almaz-Antey*, 2017, no. 1. pp. 76-81.

7. Yudin A.V. *Tseleraspredeleniye neodnorodnykh sredstv podavleniya metodom dvukh funktsiy [Target distribution of heterogeneous means of suppression by the method of two functions]*. *Aktual'n•yye problemy nauki i tekhniki: materialy IV Mezhd. konkursa nauch.-issled. rabot*. Ufa, 2021. pp. 11-15.

8. Slavyanov A.S. Analiz i prakticheskoye primeneniye modeley raspredeleniya resursov [Analysis and practical application of resource allocation models]. *Bulletin of science and practice*, 2018, V. 4, no. 9. pp. 228-244.

9. Gancheva A.V. Optimal'noye resheniye i otsenka poleznosti organizatsionnykh voprosov [Optimal solution and evaluation of the usefulness of organizational issues]. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 2011, no. 3(2). pp. 53.

10. Menshikh V.V., Samorokovsky A.F., Avsentev O.S. Models of resource allocation optimization when solving the control problems in organizational systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, V. 973, no. 1. pp. 12-40.

11. Rezig S., Ezzeddine W., Turki S., Rezg N. Mathematical Model for Production Plan Optimization. *A Case Study of Discrete Event Systems Mathematics*, 2020, no. 8 (6). P. 955.

12. Filippova A.S. Economic-mathematical modeling of a multi-criteria optimization management problem of a retail unit of a commercial bank Perm University Herald. *Economy*, 2019, no. 14(1). pp. 93-109.

13. Bakanova A.P., Shikov A.N. The Method of Employee Competencies Management Based on the Ontological Approach. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020, no. 2590. pp. 1-9.

14. Sobolevskiy V.A. K otsenke tochnosti zadachi tseleraspredeleniya sredstv porazheniya [To assess the accuracy of the task of target distribution of means of destruction]. *Voyennaya mysl'*, 2016, no. 8. pp. 32-43.

15. Kataev A.V., Kataeva T.M., Makarova E.L. Project Management: Mathematical Models of Optimal Executors' Appointment for Project Works. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Ekonomika. Upravleniye. Pravo*, 2016, no. 3. pp. 294-299.

### Сведения об авторах

**Ганичева Антонина Валериановна** (Тверь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Физико-математические дисциплины и информационные технологии», Тверская государственная сельскохозяйственная академия (170904, Тверь, ул. Маршала Василевского, 7, e-mail: TGAN55@yandex.ru).

**Ганичев Алексей Валерианович** (Тверь, Россия) – доцент кафедры «Информатика и прикладная математика», Тверской государственный технический университет (170026, Тверь, наб. Аф. Никитина, 22, e-mail: alexej.ganchev@yandex.ru).

### About the authors

**Antonina V. Gancheva** (Tver, Russian Federation) – Ph.D in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Physical and Mathematical Disciplines and Information Technologies, Tver State Agricultural Academy (7, st. Marshal Vasilevsky, Tver, 170904, e-mail: TGAN55@yandex.ru).

**Alexey V. Ganichev** (Tver, Russian Federation) – Associate Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics, Tver State Technical University (22, st. Nikitin nab., Tver, 170026, e-mail: alexej.ganichev@yandex.ru).

Статья получена: 20.10.2021

Статья принята: 28.11.2021

Опубликовано: 26.01.2022

**Библиографическое описание статьи согласно  
ГОСТ Р 7.0.100–2018:**

**Ганичева, А.В.** Метод решения задачи оптимизации распределения целочисленного ресурса / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. – текст: непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.4.03 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2021. – № 4. – С. 42–55.

**Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:**

**Ганичева, А.В.** Метод решения задачи оптимизации распределения целочисленного ресурса / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – № 4. – С. 42–55. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.4.03

**Цитирование статьи в references и международных изданиях**

**Cite this article as:**

Ganicheva A.V., Ganichev A.V. A method for solving the problem of optimizing the distribution of an integer resource. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2021, no. 4, pp. 42–55. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.4.03 (in Russian)