DOI: 10.15593/2499-9873/2021.03.01
УДК 517.977.52

Т.Ф. Мамедова

Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика

АНАЛОГ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления линейными двухпараметрическими системами с распределенными управляющими функциями. Целью работы является установление необходимого условия оптимальности в предположении, что выполняется выпуклость множества допустимых управлений и условие связи является нелинейным. С помощью приращений функционала качества в виде двумерных линейных неоднородных систем разностных уравнений получена формула, которая позволяет как получить дискретный аналог принципа максимума Понтрягина, так и исследовать случай его вырождения. Сформулирована теорема, которая является аналогом дискретного принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи. В случае особых управлений дискретный принцип максимума вырождается и, следовательно, становится неэффективным, в том числе в проверочном смысле. Ввиду этого надо иметь новые необходимые условия оптимальности. Изучен особый, в смысле принципа максимума Понтрягина, случай дискретного условия максимума, при котором допустимые управления считаются особыми. Установлено необходимое условие оптимальности особых управлений.

Ключевые слова: дискретная двухпараметрическая система, формула приращения, допустимое управление, особое управление, функционал качества, принцип максимума Понтрягина, дискретный принцип максимума, условия связи, дискретный аналог функции Римана, необходимое условие оптимальности, двухэтапная задача оптимального управления.

T.F. Mamedova

Institute of Control Systems of Azerbaijan NAS,
Baku, Azerbaijan Republic

ANALOGUE OF THE DISCRETE MAXIMUM PRINCIPLE AND THE NECESSARY OPTIMALITY CONDITION OF SINGULAR CONTROLS IN ONE TWO-PARAMETRIC DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A two-stage (stepwise) optimal control problem for linear two-parameter systems with distributed control functions is considered. The aim of the work is to establish the necessary optimality condition under the assumption that the convexity of the set of admissible controls is satisfied and the connection condition is nonlinear. Using increments of the quality functional in the form of two-dimensional linear inhomogeneous systems of difference equations, a formula is obtained that allows one to obtain both a discrete analogue of the Pontryagin maximum principle and to study the case of its degeneration. A theorem is formulated that is an analogue of the discrete Pontryagin maximum principle for the problem under consideration. In the case of special controls, the discrete maximum principle degenerates and, therefore, becomes ineffective, including in the verification sense. Therefore, it is necessary to have new necessary conditions for optimality. A special, in the sense of the Pontryagin maximum principle, case of a discrete maximum condition, under which admissible controls are considered special, is studied. A necessary condition for optimality of singular controls is established.

Keywords: two-parameter discrete system, increment formula, admissible control, singular control, quality functional, Pontryagin maximum principle, discrete maximum principle, connection conditions, discrete analog of the Riemann function, necessary optimality condition, two-stage optimal control problem.

Введение

В работах [1–6] исследован ряд задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами с распределенными и граничными управлениями, описываемыми дискретным аналогом системы гиперболических уравнений с краевыми условиями типа Гурса. Установлены некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности, а также изучены вопросы, связанные с управляемостью и наблюдаемостью двухпараметрических систем. Другие классы задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами исследованы в работах [7–9].

В предлагаемой работе рассматривается двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления линейными двухпараметрическими системами с распределенными управляющими функциями. Для рассматриваемой задачи, с учетом применения одного варианта метода приращений [10–15], доказано необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума Понтрягина. Изучен случай вырождения дискретного условия максимума.

1. Постановка задачи

Пусть $U_1 \subset R^r, U_2 \subset R^q$ – заданные непустые и ограниченные множества, t_0, t_1, t_2, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_2 - t_0, x_1 - x_0$ есть натуральные числа, а $D_1 = \{(t,x): t = t_0, t_0 + 1, ..., t_1 - 1,\ x = x_0, x_0 + 1, ..., x_1 - 1\}$, $D_2 = \{(t,x): t = t_1, t_1 + 1, ..., t_1 - 1,\ \ x = x_0, x_0 + 1, ..., x_1 - 1\}$ – «дискретные прямоугольники».

Предположим, что управляемый дискретный двухэтапный процесс описывается краевыми задачами вида

$$\begin{aligned} &z_1\left(t+1,x+1\right)=A_1(t,x)z_1(t,x)+B_1(t,x)z_1(t+1,x)+ \\ &+C_1(t,x)z_1(t,x+1)+f_1\left(t,\ x,u_1\left(t,x\right)\right),\ \left(t,x\right)\in D_1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &z_1\left(t_0,x\right)=a\left(x\right),\ x=x_0,x_0+1,...,x_1, \\ &z_1\left(t,x_0\right)=b_1\left(t\right),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1, \\ &a\left(x_0\right)=b_1\left(t_0\right), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &z_2\left(t+1,x+1\right)=A_2(t,x)z_2(t,x)+B_2(t,x)z_2(t+1,x)+ \\ &+C_2(t,x)z_2(t,x+1)+f_2\left(t,\ x,u_2\left(t,x\right)\right),\ \left(t,x\right)\in D_2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &z_2\left(t_1,x\right)=G\left(z_1\left(t_1,x\right)\right),\ x=x_0,x_0+1,...,x_1, \\ &z_2\left(t,x_0\right)=b_2\left(t\right),\ t=t_1,t_1+1,...,t_1, \\ &G(z_1(t_1,x_0))=b_2(t_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $z_1(t,x), z_2(t,x)$ – соответственно n- и m-мерные векторы состояния; $A_1(t,x), B_1(t,x), C_1(t,x)$ – заданные ($n\times n$)-дискретные, ограниченные матричные функции; $f_1\left(t,x,u_1\right)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по u_1 при всех (t,x); $A_2(t,x), B_2(t,x), C_2(t,x)$ – заданные ($m\times m$)-дискретные, ограниченные матричные функции; $f_2\left(t,x,u_2\right)$ – заданная m-мерная вектор-функция, непрерывная по u_2 при всех (t,x); $a\left(x\right), b_1\left(t\right)$ – заданные n-мерные дискретные вектор-функции; $b_2\left(t\right)$ – заданная n-мерная дискретная вектор-функция; $G(z_1)$ – заданная, дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция; $u_1\left(t,x\right)\ \left(u_2\left(t,x\right)\right)$ – $r\,(q)$-мерная дискретная управляющая функция, удовлетворяющая ограничениям

$$\begin{aligned} &u_1\left(t,x\right)\in U\subset R^r, \quad \left(t,x\right)\in D_1, \\ &u_2\left(t,x\right)\in U\subset R^q, \quad \left(t,x\right)\in D_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Каждую пару $\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)$, удовлетворяющую вышеприведенным ограничениям, назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении краевые задачи (1)–(2) и (3)–(4) имеют единственное дискретное решение. Заметим, что наложенные ограничения на правые части уравнений и на краевые условия являются естественными и не противоречат существованию и единственности решений краевых задач (1)–(2) и (3)–(4). В дальнейшем приводится также представление решений этих краевых задач.

На решениях этих краевых задач, порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминального типа функционал

$$S\left(u_1,u_2\right)=\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)+\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1\left(z_1\right)$, $\varphi_2\left(z_2\right)$ – заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)$, доставляющее минимальное значение функционалу (6), при ограничениях (1)–(5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1\left(t,x\right)$, $u_2\left(t,x\right),z_1(t,x),z_2(t,x))-$ оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества

Построим формулу приращения функционала качества.

Пусть $\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right),z_1\left(t,x\right),z_2\left(t,x\right)\right)$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\overline{u}_1\left(t,x\right)=u_1\left(t,x\right)+\Delta u_1\left(t,x\right),\overline{u}_2\left(t,x\right)=u_2\left(t,x\right)+$ $+\Delta u_2\left(t,x\right),\overline{z}_1\left(t,x\right)=z_1\left(t,x\right)+\Delta z_1\left(t,x\right),\overline{z}_2\left(t,x\right)=z_2\left(t,x\right)+\Delta z_2\left(t,x\right)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение

$$\begin{gathered}\Delta S\left(u_1,u_2\right)=S\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)-S\left(u_1,u_2\right)=\left(\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)-\varphi_1\left(\overline{z}_1\left(t_1,x_1\right)\right)\right)+\\+\left(\varphi_2\left(\overline{z}_2\left(t_2,x_1\right)\right)-\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)\right)\end{gathered} \tag{7}$$

функционала качества (6).

Ясно, что $\Delta z_i(t,x)$, $i=\overline{1,2}$, являются решениями краевых задач

$$\begin{gathered}\Delta z_1\left(t+1,x+1\right)=A_1(t,x)\Delta z_1(t,x)+B_1(t,x)\Delta z_1(t+1,x)+\\+C_1(t,x)\Delta z_1(t,x+1)+\left(f_1\left(t,\ x,\overline{u}_1\left(t,x\right)\right)-f_1\left(t,\ x,u_1\left(t,x\right)\right)\right),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Delta z_1\left(t_0,x\right)=0,x=x_0,x_0+1,\ldots,x_1,\\\Delta z_1\left(t,x_0\right)=0,t=t_0,t_0+1,\ldots,t_1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Delta z_2\left(t,x\right)=A_2(t,x)\Delta z_2(t,x)+B_2(t,x)\Delta z_2(t+1,x)+\\+C_2(t,x)\Delta z_2(t,x+1)+\left(f_2\left(t,x,\overline{u}_2\left(t,x\right)\right)-f_2\left(t,x,u_2\left(t,x\right)\right)\right),\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Delta z_2\left(t_1,x\right)=G\left(\overline{z}_1\left(t_1,x\right)\right)-G\left(z_1\left(t_1,x\right)\right),x=x_0,x_0+1,...,x_1,\\ \Delta z_2\left(t,x_0\right)=0,\ t=t_1,t_1+1,...,t_1.\end{gathered}\tag{11}$$

Пусть $\psi_i(t,x),\ i=\overline{1,2},-$ пока произвольные соответственно n- и m-мерные вектор-функции. Из соотношений (8), (10) получим, что

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)\Delta z_1\left(t+1,x+1\right)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)A_1(t,x)\Delta z_1\left(t,x\right)+\\+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)B_1(t,x)\Delta z_1\left(t+1,x\right)+\\+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)C_1(t,x)\Delta z_1\left(t,x+1\right)+\\+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)\left(f_1\left(t,x,\overline{u}_1\left(t,x\right)\right)-f_1\left(t,x,u_1\left(t,x\right)\right)\right),\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)\Delta z_2\left(t+1,x+1\right)=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)A_2(t,x)\Delta z_2\left(t,x\right)+\\+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)B_2(t,x)\Delta z_2\left(t+1,x\right)+\\+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)C_2(t,x)\Delta z_2\left(t,x+1\right)+\\+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)\left(f_2\left(t,\ x,\overline{u}_2\left(t,x\right)\right)-f_2\left(t,\ x,u_2\left(t,x\right)\right)\right),\end{gathered}\tag{13}$$

здесь и в дальнейшем штрих $(')$ для векторов означает скалярное произведение, а для матриц операцию транспонирования.

Как видно, в тождествах (12) и (13) индексы суммирования тоже различные.

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в тождествах (12), (13).

Полагая $t+1=\alpha$, $x+1=\beta$ и учитывая краевые условия (9), (11), получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x)\Delta z_1(t+1,x+1)=\sum_{\alpha=t_0+1}^{t_1}\sum_{\beta=x_0+1}^{x_1}\psi_1'(\alpha-1,\beta-1)\Delta z_1(\alpha,\beta)=$$

$$=\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_1'(t_1-1,x-1)\Delta z_1(t_1,x)-\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_1'(t_0-1,x-1)\Delta z_1(t_0,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1,x_1-1)\Delta z_1(t,x_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1,x_0-1)\Delta z_1(t,x_0)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x-1)\Delta z_1(t,x)=\psi_1'(t_1-1,x_1-1)\Delta z_1(t_1,x_1)-$$

$$-\psi_1'(t_1-1,x_0-1)\Delta z_1(t_1,x_0)-\psi_1'(t_0-1,x_1-1)\Delta z_1(t_0,x_1)+$$

$$+\psi_1'(t_0-1,x_0-1)\Delta z_1(t_0,x_0)+\sum_{t=t_0}^{t-1_1}\psi_1'(t-1,x_1-1)\Delta z_1(t,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1,x_0-1)\Delta z_1(t,x_0)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t_1-1,x-1)\Delta z_1(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x-1)\Delta z_1(t,x)=\psi_1'(t_1-1,x_1-1)\Delta z_1(t_1,x_1)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1,x_1-1)\Delta z_1(t,x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t_1-1,x-1)\Delta z_1(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x-1)\Delta z_1(t,x), \tag{14}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x)B_1(t,x)\Delta z_1(t+1,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x)B_1(t-1,x)\Delta z_1(t,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t_1-1,x)B_1(t_1-1,x)\Delta z_1(t_1,x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t_0-1,x)B_1(t_0-1,x)\Delta z_1(t_0,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x)B_1(t-1,x)\Delta z_1(t,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t_1-1,x)B_1(t_1-1,x)\Delta z_1(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t-1,x)B_1(t-1,x)\Delta z_1(t,x), \tag{15}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x)C_1(t,x)\Delta z_1(t,x+1)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_1'(t,x-1)C_1(t,x-1)\Delta z_1(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t,x_1-1)C_1(t,x_1-1)\Delta z_1(t,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t,x_0-1)C_1(t,x_0-1)\Delta z_1(t,x_0)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x-1)C_1(t,x-1)\Delta z_1(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t,x_1-1)C_1(t,x_1-1)\Delta z_1(t,x_1)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x-1)C_1(t,x-1)\Delta z_1(t,x). \tag{16}$$

Далее аналогично доказывают, что

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t,x)\Delta z_2(t+1,x+1)=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_2'(t-1,x-1)\Delta z_2(t,x)=$$

$$=\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_2'(t_2-1,x-1)\Delta z_2(t_2,x)-\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_2'(t_1-1,x-1)\Delta z_2(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_2'(t-1,x-1)\Delta z_2(t,x)=\psi_2'(t_2-1,x_1-1)\Delta z_2(t_2,x_1)-$$

$$-\psi_2'(t_2-1,x_0-1)\Delta z_2(t_2,x_0)-\psi_2'(t_1-1,x_1-1)\Delta z_2(t_1,x_1)+$$

$$+\psi_2'\left(t_1-1,x_0-1\right)\Delta z_2\left(t_1,x_0\right)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t-1,x_0-1\right)\Delta z_2\left(t,x_0\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_2-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t_2,x\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t_1,x\right)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t,x\right), \qquad (17)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)B_2(t,x)\Delta z_2\left(t+1,x\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t-1,x\right)B_2(t-1,x)\Delta z_2\left(t,x\right)=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_2-1,x\right)B_2(t_2-1,x)\Delta z_2\left(t_2,x\right)- \qquad (18)$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_1-1,x\right)B_2(t_1-1,x)\Delta z_2\left(t_1,x\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t-1,x\right)B_2(t-1,x)\Delta z_2\left(t,x\right),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)C_2(t,x)\Delta z_2\left(t,x+1\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1}\psi_2'\left(t,x-1\right)C_2(t,x-1)\Delta z_2\left(t,x\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t,x_1-1\right)C_2(t,x_1-1)\Delta z_2\left(t,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t,x_0-1\right)C_2(t,x_0-1)\Delta z_2\left(t,x_0\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x-1\right)C_2(t,x-1)\Delta z_2\left(t,x\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t,x_1-1\right)C_2(t,x_1-1)\Delta z_2\left(t,x_1\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x-1\right)C_2(t,x-1)\Delta z_2\left(t,x\right). \tag{19}$$

Используя формулу Тейлора, а также тождества (14)–(19), получим, что

$$\Delta S\left(u_1,u_2\right)=\frac{\partial\varphi_1{}'\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_2{}'\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z_2{}'\left(t_2,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+$$

$$+\,o_1\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)\right\|^2\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t,x\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t,x_1\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)+\psi_1'\left(t_1-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)A_1(t,x)\Delta z_1\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t-1,x\right)B_1(t-1,x)\Delta z_1\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t_1-1,x\right)B_1(t_1-1,x)\Delta z_1\left(t_1,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x-1\right)C_1(t,x-1)\Delta z_1\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'\left(t,x_1-1\right)C_1(t,x_1-1)\Delta z_1\left(t,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'(t,x)\Big(f_1\big(t,\ x,\bar{u}_1(t,x)\big)-f_1\big(t,\ x,u_1(t,x)\big)\Big)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t-1,x-1)\Delta z_2(t,x)+$$

$$+\psi_2'(t_2-1,x_1-1)\Delta z_2(t_2,x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t_2-1,x-1)\Delta z_2(t_2,x)-$$

$$-\psi_2'(t_1-1,x_1-1)\Delta z_2(t_1,x_1)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t_1-1,x-1)\Delta z_2(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'(t-1,x_1-1)\Delta z_2(t,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t,x)A_2(t,x)\Delta z_2(t,x)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t_1-1,x)B_2(t_1-1,x)\Delta z_2(t_1,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t-1,x)B_2(t-1,x)\Delta z_2(t,x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t_2-1,x)B_2(t_2-1,x)\Delta z_2(t_2,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'(t,x_1-1)C_2(t,x_1-1)\Delta z_2(t,x_1)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t,x-1)C_2(t,x-1)\Delta z_2(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'(t,x)\Big(f_2\big(t,\ x,\bar{u}_2(t,x)\big)-f_2\big(t,\ x,u_2(t,x)\big)\Big). \qquad (20)$$

Так как

$$\Delta z_2(t_1,x_1)=G\big(\bar{z}_1(t_1,x_1)\big)-G\big(z_1(t_1,x_1)\big),$$

то, полагая

$$N(\psi_2(t_1-1,x-1),\psi_2(t_1-1,x),z(t_1,x))=$$
$$=-(\psi_2(t_1-1,x-1)-\psi_2(t_1-1,x)B(t_1-1,x))'G(z_1(t_1,x)),$$

$$M(\psi_2(t_1-1,x_1-1),z_1(t_1,x_1))=\psi_2{}'(t_1-1,x_1-1)G(z(t_1,x_1)),$$

формулу приращения (20) можем записать в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S(u_1,u_2)&=\frac{\partial\varphi_1{}'\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+\\
&+\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+\\
&+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)\right\|\right)+\frac{\partial\varphi_2{}'\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+\\
&+\frac{1}{2}\Delta z_2{}'\left(t_2,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+\\
&+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)\right\|\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t,x\right)+\\
&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t,x_1\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)+\\
&+\psi_1'\left(t_1-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)A_1(t,x)\Delta z_1\left(t,x\right)-\\
&-\psi_2'\left(t_2-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_2-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t_2,x\right)-\\
&-\psi_2'\left(t_1-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t_1,x_1\right)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t_1,x\right)+\\
&+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t,x_1\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)A_2(t,x)\Delta z_2\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t-1,x\right)B_2(t-1,x)\Delta z_2\left(t,x\right)+\\
&+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_2-1,x\right)B_2(t_2-1,x)\Delta z_2\left(t_2,x\right)+\\
&+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_1-1,x\right)B_2(t_1-1,x)\Delta z_2\left(t_1,x\right)-
\end{aligned}$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x-1\right)C_2(t,x-1)\Delta z_2\left(t_2,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2'\left(t,x_1-1\right)C_2(t,x_1-1)\Delta z_2\left(t,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t,x\right)\left(f_2\left(t,\ x,\bar{u}_2\left(t,x\right)\right)-f_2\left(t,\ x,u_2\left(t,x\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial\varphi_1{}'\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+\mathrm{o}_1\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)\right\|^2\right)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_2{}'\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z_2{}'\left(t_2,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+\mathrm{o}_2\left(\left\|\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)\right\|^2\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t,x\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t,x_1\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)+\psi_1'\left(t_1-1,x_1-1\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)\left(f_1\left(t,\ x,\bar{u}_1\left(t,x\right)\right)-f_1\left(t,\ x,u_1\left(t,x\right)\right)\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x\right)A_1(t,x)\Delta z_1\left(t,x\right)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t_1-1,x\right)B_1(t_1-1,x)\Delta z_1\left(t_1,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t-1,x\right)B_1(t-1,x)\Delta z_1\left(t,x\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_1'\left(t,x-1\right)C_1(t,x-1)\Delta z_1\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'\left(t,x_1-1\right)C_1(t,x_1-1)\Delta z_1\left(t,x_1\right)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t,x\right)+$$

$$+\psi_2'\left(t_2-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi_2'\left(t_2-1,x-1\right)\Delta z_2\left(t_2,x\right)-$$

$$-\psi_2'\left(t_1-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t_1,x_1\right)-$$

$$-M_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'_1\left(t_1,x\right)N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x-1\right),\psi_2\left(t_1-1,x\right),z_1\left(t_1,x\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_3\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x\right)\right\|^2\right)-M_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\times$$

$$\times\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-\frac{1}{2}\Delta z'_1\left(t_1,x_1\right)M_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}N_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x-1\right),\psi_2\left(t_1-1,x\right),z(t_1,x)\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'_2\left(t_2-1,x\right)B_2(t_2-1,x)\Delta z_2\left(t_1,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi'_2\left(t-1,x_1-1\right)\Delta z_2\left(t,x_1\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'_2\left(t,x\right)A_2(t,x)\Delta z_2\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'_2\left(t-1,x\right)B_2(t-1,x)\Delta z_2\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}N_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x-1\right),\psi_2\left(t_1-1,x\right),z_1\left(t_1,x\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'_1\left(t_1,x\right)N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x-1\right),\psi_2\left(t_1-1,x\right),z_1\left(t_1,x\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x\right)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi'_2\left(t,x-1\right)C_2(t,x-1)\Delta z_2\left(t,x\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi'_2\left(t,x_1-1\right)C_2(t,x_1-1)\Delta z_2\left(t,x_1\right). \tag{21}$$

Если ввести аналоги функции Гамильтона – Понтрягина

$$H_i\left(t,x,u_i\left(t,x\right),\psi_i\left(t,x\right)\right)=\psi_i'\left(t,x\right)f_i(t,x,u_i(t,x)),\ i=1,2,$$

и предполагать, что $\psi_i(t,x),\ i=\overline{1,2},$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\psi_1(t-1,x-1)=A'_1(t,x)\psi_1(t,x)+\\+B'_1(t-1,x)\psi_1(t-1,x)+C'_1(t,x-1)\psi_1(t,x-1),\end{gathered} \tag{22}$$

$$\psi_2(t-1,x-1)=A'_2(t,x)\psi_2(t,x)+ \\ +B'_2(t-1,x)\psi_2(t-1,x)+C'_2(t,x-1)\psi_2(t,x-1) \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$\psi_1(t_1-1,x-1)=B'_1(t_1-1,x)\ \psi_1(t_1-1,x)+ \\ +N_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x-1\right),\psi_2\left(t_1-1,x\right),z(t_1,x)\right),$$

$$\psi_1(t-1,x_1-1)=C'_1(t,x_1-1)\ \psi_1(t,x_1-1),$$

$$\psi_1(t_1-1,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1(z_1(t_1,x_1))}{\partial z_1}+M_{z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right), \tag{24}$$

$$\psi_2(t_1-1,x-1)=B'_1(t_1-1,x)\psi_1(t_1-1,x)+M_{z_1}(\psi_2(t_1-1,x-1),z(t_1,x)),$$

$$\psi_2(t-1,x_1-1)= \\ =-B_2(t_2-1,x)\psi_2(t_2-1,x)+N_{z_2}(\psi_2(t_1-1,x),B(t_1-1,x),z_1(t_1,x)), \tag{25}$$

$$\psi_2(t_1-1,x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_2(z_1(t_2,x_2))}{\partial z_2},$$

то формула приращения (21) критерия качества примет вид

$$\Delta S\left(u_1,u_2\right)=\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)+ \\ +\frac{1}{2}\Delta z_2{}'\left(t_2,x_1\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\Delta z_2\left(t_2,x_1\right)- \\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(H_1\left(t,x,\bar{u}_1\left(t,x\right),\psi_1\left(t,x\right)\right)-H_1\left(t,x,u_1\left(t,x\right),\psi_1\left(t,x\right)\right)\right)- \\ -\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(H_2\left(t,x,\bar{u}_2\left(t,x\right),\psi_2\left(t,x\right)\right)-H_2\left(t,x,u_2\left(t,x\right),\psi_2\left(t,x\right)\right)\right)- \\ -\frac{1}{2}\Delta z'_1\left(t_1,x_1\right)M_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)- \\ -\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z'_2\left(t_1,x\right)N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x\right),\psi_2(t_1-1,x),z_1\left(t_1,x\right)\right)\Delta z_2\left(t_1,x\right)+ \\ +o_3\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x_1\right)\right\|^2\right)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x\right)\right\|^2\right). \tag{26}$$

Заметим, что соотношения (22), (23) представляют собой двумерные линейные разностные уравнения относительно $\psi_1(t,x)$ и $\psi_2(t,x)$ с краевыми условиями (24), (25) соответственно. Следуя принятой терминологии [2, 4, 5, 10–12, 15], назовем их сопряженными уравнениями.

Построенная формула приращения позволяет как получить дискретный аналог принципа максимума Понтрягина, так и исследовать случай вырождения условия максимума Понтрягина.

3. Необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума

Как видно, уравнения (8) и (10) являются двумерными линейными неоднородными системами разностных уравнений. Исходя из этого, на основе формулы о представлении решений линейных неоднородных разностных уравнений типа (8), (10) [11, 12] решения краевых задач (8), (9), (10), (11) могут быть представлены в виде

$$\Delta z_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x,\tau,s)\Big(f_1\big(\tau,s,\overline{u}(\tau,s)\big)-f_1\big(\tau,s,u(\tau,s)\big)\Big), \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\Delta z_2(t,x)&=R_2(t,x,t_1-1,x-1)\Big(G\big(\overline{z}_1(t_1,x)\big)-G\big(z_1(t_1,x)\big)\Big)+\\&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\Big[R_2(t,x,t_1-1,s-1)-R_2(t,x,t_1-1,s)B_2(t_1-1,s)\Big]\times\\&\times\Big(G\big(\overline{z}_1(t_1,s)\big)-G\big(z_1(t_1,s)\big)\Big)+\\&+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,\tau,s)\Big(f_2\big(\tau,s,\overline{u}_2(\tau,s)\big)-f_2\big(\tau,s,u_2(\tau,s)\big)\Big).\end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $R_1(t,x,\tau,s)$, $R_2(t,x,\tau,s)$ – соответственно ($n\times n$)- и ($m\times m$)-мерные матричные функции (аналоги функции Римана), являющиеся решениями матричных разностных уравнений с соответствующими краевыми условиями

$$\begin{aligned}&R_1(t,x,\tau-1,s-1)=R_1(t,x,\tau,s)A_1(\tau,s)+\\&+R_1(t,x,\tau-1,s)B_1(\tau-1,s)+R_1(t,x,\tau,s-1)C_1(\tau,s-1),\\&R_1(t,x,t-1,s-1)=R_1(t,x,t-1,s)B_1(t-1,s),\end{aligned}$$

$$R_1\left(t,x,\tau-1,x-1\right)=R_1(t,x,\tau,x-1)C_1(\tau,x-1),$$
$$R_1\left(t,x,t-1,x-1\right)=E_1,$$

$$R_2\left(t,x,\tau-1,s-1\right)=R_2(t,x,\tau,s)A_2(\tau,s)+$$
$$+R_2(t,x,\tau-1,s)B_2(\tau-1,s)+R_2(t,x,\tau,s-1)C_2(\tau,s-1),$$
$$R_2\left(t,x,t-1,s-1\right)=R_2(t,x,t-1,s)B_2(t-1,s),$$
$$R_2\left(t,x,\tau-1,x-1\right)=R_2(t,x,\tau,x-1)C_2(\tau,x-1),$$
$$R_2\left(t,x,t-1,x-1\right)=E_2,$$

где E_1, E_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей.

В представлениях (13),(14), переходя к норме и используя условие Липшица, получаем следующие оценки:

$$\left\|\Delta z_1\left(t,x\right)\right\|\le L_1\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left\|f_1\left(\tau,s,\bar{u}_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right\|, \tag{29}$$

$$\left\|\Delta z_2\left(t,x\right)\right\|\le L_2\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left\|f_2\left(\tau,s,\bar{u}_2\left(\tau,s\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right\|+$$
$$+\left\|\Delta z_1\left(t_1,x\right)\right\|+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left\|\Delta z_1\left(t_1,s\right)\right\|, \tag{30}$$

где $L_i=\mathrm{const}, i=1,2,$ – некоторые постоянные.

Теперь предположим, что множества

$$f_1(t,x,U_1)=\left\{\alpha;\alpha=f_1\left(t,x,v_1\left(t,x\right)\right),\ v_1\left(t,x\right)\in U_1,\ \left(t,x\right)\in D_1\right\}, \tag{31}$$

$$f_2(t,x,U_2)=\left\{\beta;\beta=f_2\left(t,x,v_2\left(t,x\right)\right),\ v_2\left(t,x\right)\in U_2,\ \left(t,x\right)\in D_2\right\} \tag{32}$$

выпуклы при всех $\left(t,x\right)$.

Пусть $\varepsilon\in\left[0,1\right]$ – произвольное число, а $v_1\left(t,x\right)$ – произвольная допустимая управляющая функция.

Специальное приращение управляющей функции $u_1\left(t,x\right)$ определим по формуле

$$\Delta u_1\left(t,x;\varepsilon\right)=v_1\left(t,x;\varepsilon\right)-v_1\left(t,x\right) \tag{33}$$

и положим

$$\Delta u_2(t,x)=0,$$

где $v_1(t,x;\varepsilon)\in U_1,(t,x)\in D_1$ – произвольный вектор, такой, что

$$\begin{aligned} &f_1(t,x,v_1(t,x;\varepsilon))-f_1(t,x,u_1(t,x))=\\ &=\varepsilon\big(f_1(t,x,v_1(t,x))-f_1(t,x,u_1(t,x))\big). \end{aligned} \tag{34}$$

Соотношение (30) имеет место в силу выпуклости множества (27).

Через $(\Delta z_1(t,x;\varepsilon),\Delta z_2(t,x;\varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z_1(t,x),z_2(t,x))$. Из оценок (25), (26) следует, что

$$\|\Delta z_1(t,x;\varepsilon)\|\le L_3\varepsilon, \tag{35}$$

$$\|\Delta z_2(t,x;\varepsilon)\|\le L_4\varepsilon, \tag{36}$$

где L_3,L_4 – некоторые постоянные, $L_3=\text{const}>0,L_4=\text{const}>0$. Учитывая формулы (33), (34) и (35), (36) в формуле (26), получим специальное приращение функционала качества в виде

$$\begin{gathered} S(u_1(t,x)+\Delta u_1(t,x;\varepsilon),u_2(t,x))-S(u_1(t,x),u_2(t,x))=\\ =-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(H_1(t,x,v_1(t,x),\psi_1(t,x))-H_1(t,x,u_1(t,x),\psi_1(t,x))\big)+\\ +o(\varepsilon). \end{gathered} \tag{37}$$

Далее, считая $\mu\in[0,1]$ произвольным числом, а $v_2(t,x)$ произвольной допустимой управляющей функцией, специальное приращение управления $u_2(t,x)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t,x;\mu)=v_2(t,x;\mu)-u_2(t,x) \tag{38}$$

и положим

$$\Delta u_2(t,x)=0,$$

где $v_2(t,x;\mu)$ – такая допустимая управляющая функция, что

$$f_2\left(t,x,v_2\left(t,x;\mu\right)\right)-f_2\left(t,x,u_2\left(t,x\right)\right)=$$
$$=\mu\left(f_2\left(t,x,v_2\left(t,x\right)\right)-f_2\left(t,x,u_2\left(t,x\right)\right)\right). \tag{39}$$

Через $\left(\Delta z_1\left(t,x;\mu\right),\Delta z_2\left(t,x;\mu\right)\right)$ обозначим специальное приращение состояния, отвечающее специальному приращению (38) управляющей функции $u_2\left(t,x\right)$.

Из формулы (38) ясно, что $\Delta z_2\left(t,x;\mu\right)=0$,

а представление (28) имеет вид

$$\Delta z_2\left(t,x;\mu\right)=$$
$$=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2\left(t,x,\tau,s\right)\left(f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)+\Delta u_2\left(\tau,s;\mu\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right).$$

Отсюда, переходя к норме и применяя условие Липшица, получим, что

$$\left\|\Delta z_2\left(t,x;\mu\right)\right\|\le L_5\mu, \tag{40}$$

где L_5 – некоторая постоянная, $L_5=\text{const}>0$.

С учетом формулы (39) и оценки формулы (32) из формулы (40) получаем, что

$$S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)+\Delta u_2\left(t,x;\mu\right)\right)-S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)=$$
$$=-\mu\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(H_2\left(t,x,v_2\left(t,x\right),\psi_2\left(t,x\right)\right)-H_2\left(t,x,u_2\left(t,x\right),\psi_2\left(t,x\right)\right)\right)+o\left(\mu\right).$$

Полученные разложения в силу произвольности ε и μ позволяют сформулировать необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума.

Теорема 1. Если множества (31) и (32) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(H_1\left(t,x,v_1\left(t,x\right),\psi_1\left(t,x\right)\right)-H_1\left(t,x,u_1\left(t,x\right),\psi_1\left(t,x\right)\right)\right)\le 0,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big(H_2\big(t,x,v_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)-H_2\big(t,x,u_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)\Big)\le 0$$

выполнялись для всех $v_1(t,x)\in U_1,(t,x)\in D_1$, $v_2(t,x)\in U_2,(t,x)\in D_2$ соответственно.

Доказанная теорема является аналогом дискретного принципа максимума [12–15] для рассматриваемой задачи.

4. Исследование особого случая

Как известно [5, 10, 11], условие максимума является необходимым условием оптимальности первого порядка. В этом подразделе изучается случай вырождения дискретного принципа максимума.

Определение. Допустимое управление $\big(u_1(t,x),u_2(t,x)\big)$ назовем особым (в смысле принципа максимума Понтрягина) управлением [12, 15], если для всех $v_i(t,x)\in U_i,(t,x)\in D_i$, $i=\overline{1,2}$, выполняются следующие равенства:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big(H_1\big(t,x,v_1(t,x),\psi_1(t,x)\big)-H_1\big(t,x,u_1(t,x),\psi_1(t,x)\big)\Big)=0,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Big(H_2\big(t,x,v_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)-H_2\big(t,x,u_2(t,x),\psi_2(t,x)\big)\Big)=0.$$

Из введенного определения следует, что в случае особых управлений дискретный принцип максимума вырождается и, следовательно, становится неэффективным. Ввиду этого надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Из представления (28) с помощью формулы Тейлора получаем, что

$$\begin{aligned}\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,\tau,s)\Big(f_2\big(\tau,s,\overline{u}_2(\tau,s)\big)-f_2\big(\tau,s,u_2(\tau,s)\big)\Big)+\\ +R(t,x;t_1-1,s-1)-R_2\big(t,x,t_1-1,x-1\big)\times\\ \times\Big[G_{z_1}\big(z_1(t_1,x)\big)\Delta z_1(t_1,x)+o_5\big(\big\|\Delta z_1(t_1,x)\big\|\big)\Big]+\\ +\sum_{s=x_0}^{x-1}\big[R_2\big(t,x,t_1-1,s-1\big)B_2\big(t_1-1,s\big)\big]\times\end{aligned}$$

$$\times\left[G_{z_1}\left(z_1\left(t_1,s\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,s\right)+\mathrm{o}_5\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,s\right)\right\|\right)\right]. \qquad (41)$$

Теперь займемся преобразованием $\Delta z_2\left(t_1,s\right)$ в формуле (41).

Используя представление (27), будем иметь

$$\begin{gathered}R_2\left(t,x,t_1-1,x-1\right)G_z\left(z_1\left(t_1,x\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x\right)=\\=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2\left(t,x,t_1-1,x-1\right)G_z\left(z_1\left(t_1,x\right)\right)\times\\\times R_1\left(t_1,x,\tau,s\right)\left(f_1\left(\tau,s,\overline{u}_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right)+\\+R_2\left(t_1,x,t_1-1,x-1\right)\mathrm{o}_5\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,x\right)\right\|\right).\end{gathered} \qquad (42)$$

Далее

$$\begin{gathered}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,s-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]\times\\\times B_2\left(t_1-1,s\right)G_{z_1}\left(z_1\left(t_1,s\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,s\right)=\\=\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,s-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]B_2\left(t_1-1,s\right)G_{z_1}\left(z_1\left(t_1,s\right)\right)\times\\\times\sum_{\beta=x_0}^{s-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}R_1\left(t_1,x,\tau,\beta\right)\left(f_1\left(\tau,\beta,\overline{u}_1\left(\tau,\beta\right)\right)-f_1\left(\tau,\beta,u_1\left(\tau,\beta\right)\right)\right)+\\+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,s-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]B_2\left(t_1-1,s\right)\mathrm{o}_5\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,s\right)\right\|\right).\end{gathered} \qquad (43)$$

Далее, используя дискретный аналог теоремы Фубини, т.е. меняя порядок суммирования, получаем, что

$$\begin{gathered}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=x_0}^{s-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,s-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]\times\\\times B_2\left(t_1-1,\beta\right)G_{z_1}\left(z_1\left(t_1,\beta\right)\right)R_1\left(t_1,s,\tau,\beta\right)\times\\\times\left(f_1\left(\tau,\beta,\overline{u}_1\left(\tau,\beta\right)\right)-f_1\left(\tau,\beta,u_1\left(\tau,\beta\right)\right)\right)=\\=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,\beta-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]\times\end{gathered}$$

$$\times B_2(t_1-1,s)\,G_{z_1}\big(z_1(t_1,\beta)\big)\times$$
$$\times R_2(t_1,\beta,\tau,s)\Big(f_1\big(\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\Big). \qquad (44)$$

С учетом тождеств (42)–(44) представление (41) записываем в виде

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,\tau,s)\Big(f_2\big(\tau,s,\bar{u}_2(\tau,s)\big)-f_2\big(\tau,s,u_2(\tau,s)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,t_1-1,x-1)\,G_z\big(z_1(t_1,x)\big)R_2(t_1,x,\tau,s)\times$$
$$\times\Big(f_1\big(\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\Big[R_2(t,x,t_1-1,s-1)-R_2(t,x,t_1-1,s)\Big]\times$$
$$\times B_2(t_1-1,s)\,o_5\big(\|\Delta z_1(t_1,s)\|\big)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\Big[R_2(t,x,t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x,t_1-1,s)\Big]\times$$
$$\times B_2(t_1-1,s)\,G_{z_1}\big(z_1(t_1,\beta)\big)\times$$
$$\times R_2(t_1,\beta,\tau,s)\Big(f_1\big(\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\Big). \qquad (45)$$

Полагая

$$Q(\tau,s,t,x)=R_2(t,x,t_1-1,x-1)\,G_{z_1}\big(z_1(t_1,x)\big)+$$
$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\Big[R_2(t,x,t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x,t_1-1,s)\Big]\times$$
$$\times B_2(t_1-1,\beta)\,G_{z_1}\big(z_1(t_1,\beta)\big)R_2(t_1,\beta,\tau,\beta),$$

из формулы (45) получаем, что

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x,\tau,s)\Big(f_2\big(\tau,s,\bar{u}_2(\tau,s)\big)-f_2\big(\tau,s,u_2(\tau,s)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(\tau,s,t,x)\Big(f_1\big(\tau,s,\bar{u}_1(\tau,s)\big)-f_1\big(\tau,s,u_1(\tau,s)\big)\Big)+$$
$$+\ R_2(t,x,t_1-1,x-1)\,o_5\big(\|\Delta z_1(t_1,s)\|\big)+$$

$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2\left(t,x,t_1-1,s-1\right)-R_2\left(t,x,t_1-1,s\right)\right]B_2\left(t_1-1,s\right)\mathrm{o}_5\left(\left\|\Delta z_1\left(t_1,s\right)\right\|\right). \quad (46)$$

Считая $\left(u^0\left(t,x\right),v^0\left(t,x\right)\right)$ особым оптимальным управлением, его специальное приращение определим аналогично формуле (33).

Тогда по формулам (33), (36) из формулы (26) получаем, что

$$S\left(u_1\left(t,x\right)+\Delta u_1\left(t,x;\varepsilon\right),u_2\left(t,x\right)\right)-S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}\Delta z_1\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)+$$

$$+\Delta z_2{}'\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\Delta z_2\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)M_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right)\right)\Delta z_1\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta z_1{}'\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1\right),\psi_2\left(t_1-1,x_1\right)z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\times$$

$$\times\Delta z_2\left(t,x\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon^2\right). \quad (47)$$

Из формул приращения (27), (46) ясно, что

$$\Delta z_1\left(t_1,x_1:\varepsilon\right)=\varepsilon\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\left(f_1\left(\tau,s,v_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right), \quad (48)$$

$$\Delta z_2\left(t_2,x_1:\varepsilon\right)=$$

$$=\varepsilon\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q\left(\tau,s,t_2,x_1\right)\left(f_1\left(\tau,s,v_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon\right). \quad (49)$$

Учитывая формулы (48), (49) в формуле (47), получим, что справедливо разложение

$$S\left(u_1\left(t,x\right)+\Delta u_1\left(t,x;\varepsilon\right),u_2\left(t,x\right)\right)-S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_1\left(\tau,s,v_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right)'\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}+Q\left(t_2,x_1,\tau,s\right)+\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}-\right.$$

$$-M_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right)\right)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x\right),\psi_2\left(t-1,x\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)\Bigg]\times$$
$$\times\left(f_1\left(\alpha,\beta,v_1\left(\alpha,\beta\right)\right)-f_1\left(\alpha,\beta,u_1\left(\alpha,\beta\right)\right)\right)+o\left(\varepsilon^2\right).$$
(50)

Из разложения (50), полагая

$$K_1\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)=M_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x_1-1\right)\right)+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}N_{z_1z_1}\left(\psi_2\left(t_1-1,x\right),\psi_2\left(t-1,x\right),z_1\left(t_1,x_1\right)\right)- \tag{51}$$
$$-\frac{\partial^2\varphi_1\left(z_1\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_1^2}-\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2},$$

получим, что если $\left(u_1\left(t,x\right),v_2\left(t,x\right)\right)$ – особое оптимальное управление, то

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_1\left(\tau,s,v_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right)'K_1\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)\times$$
$$\times\left(f_1\left(\alpha,\beta,v_1\left(\alpha,\beta\right)\right)-f_1\left(\alpha,\beta,u_1\left(\alpha,\beta\right)\right)\right)\le 0.$$

Теперь, если предположить, что $\Delta u_1\left(t,x\right)=0$, а специальное приращение $\Delta u_2\left(t,x:\mu\right)$ управляющей функции $u_2\left(t,x\right)$ определить по формуле (38), то получим, что в особом случае

$$S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)+\Delta u_2\left(t,x;\mu\right)\right)-S\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)=$$
$$=-\frac{\mu^2}{2}\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_2\left(\tau,s,v_2\left(\tau,s\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right)'\times$$
$$\times R_2'\left(t_2,x_1,\tau,s\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_2,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}\times \tag{52}$$
$$\times R_2\left(t_2,x_1,\tau,s\right)\left(f_2\left(\alpha,\beta,v_2\left(\alpha,\beta\right)\right)-f_2\left(\alpha,\beta,u_2\left(\alpha,\beta\right)\right)\right)+o\left(\mu^2\right).$$

Полагая

$$K_2\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)=-R_2'\left(t_2,x_1,\tau,s\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(z_2\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial z_2^2}R_2\left(t_2,x_1,\alpha,\beta\right),$$

из разложения (52) получаем, что если $\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)$ – особое оптимальное управление, то

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_2\left(\tau,s,v_2\left(\tau,s\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right)'K_2\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)\times$$
$$\times\left(f_2\left(\tau,s,v_2\left(\tau,s\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right)\le 0.$$

Исходя из формул (51), (52) сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если $\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)$ – особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление, то неравенства

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_1\left(\tau,s,v_1\left(\tau,s\right)\right)-f_1\left(\tau,s,u_1\left(\tau,s\right)\right)\right)'K_1\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)\times$$
$$\times\left(f_1\left(\alpha,\beta,v_1\left(\alpha,\beta\right)\right)-f_1\left(\alpha,\beta,u_1\left(\alpha,\beta\right)\right)\right)\le 0, \tag{53}$$

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1-1}\left(f_2\left(\tau,s,v_2\left(\tau,s\right)\right)-f_2\left(\tau,s,u_2\left(\tau,s\right)\right)\right)'K_2\left(\alpha,\beta,\tau,s\right)\times$$
$$\times\left(f_2\left(\alpha,\beta,v_2\left(\alpha,\beta\right)\right)-f_2\left(\alpha,\beta,u_2\left(\alpha,\beta\right)\right)\right)\le 0 \tag{54}$$

выполняются для всех $v_1\left(t,x\right)\in U_1,\left(t,x\right)\in D_1, v_2\left(t,x\right)\in U_2,\left(t,x\right)\in D_2$ соответственно.

Заметим, что из соотношений (53), (54), определяя $v_i\left(t,x\right)$, $i=1,2,$ специальным образом, можно получить относительно легко проверяемые необходимые условия оптимальности особых управлений. Но они будут менее информативными. Докажем одно из них.

В силу произвольности $v_i\left(t,x\right)$, $i=1,2,$ их определим следующим образом:

$$v_i\left(t,x\right)=\begin{cases} w_i,(t,x)=(\theta,\xi)\in D_i, i=1,2,\\ u_i(t,x),(t,x)\ne(\theta,\xi).\end{cases} \tag{55}$$

Здесь $w_i\in U_i, i=1,2,$ – произвольные постоянные векторы, а $(\theta,\xi)\in D_i, i=1,2,$ – произвольные точки. Учитывая формулы (55) в неравенствах (53) и (54) (при $i=1$ в формуле (53), а при $i=2$ в формуле (54)), соответственно получим, что

$$\left(f_1\left(\theta,\xi,w_1\right)-f_1\left(\theta,\xi,u_1\left(\theta,\xi\right)\right)\right)' K_1(\theta,\xi,\theta,\xi)\times \\ \times\left(f_1\left(\theta,\xi,w_1\right)-f_1\left(\theta,\xi,u_1\left(\theta,\xi\right)\right)\right)\le 0, \tag{56}$$

$$\left(f_2\left(\theta,\xi,w_2\right)-f_2\left(\theta,\xi,u_2\left(\theta,\xi\right)\right)\right)' K_2(\theta,\xi,\theta,\xi)\times \\ \times\left(f_2\left(\theta,\xi,w_2\right)-f_2\left(\theta,\xi,u_2\left(\theta,\xi\right)\right)\right)\le 0 \tag{57}$$

для всех $w_1 \in U_1, (\theta,\xi)\in D_1$ и $w_2 \in U_2, (\theta,\xi)\in D_2$ соответственно.

Как видно, необходимые условия оптимальности (56) и (57) являются более слабыми и менее информативными, чем условия оптимальности (53) и (54).

Благодарность

Автор выражает благодарность рецензенту за очень полезные советы и замечания.

Список литературы

1. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 175, № 1. – С. 17–19.
2. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференциальные уравнения. – 1991. – № 2. – С. 213–218.
3. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 1978. – № 12. – С. 2190–2195.
4. Алиева С.Т. Условия оптимальности в дискретных двухпараметрических граничных задачах управления: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Баку, 2005. – 18 с.
5. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления с граничным условием // Вестник Бакинского государственного университета. Серия физико-математических наук. – 2004. – № 4. – С. 13–19.
6. Мансимов К.Б. Достаточное условие оптимальности типа Кротова для дискретных двухпараметрических систем // Автоматика и телемеханика. – 1985. – № 8. – С. 15–20.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 272 с.

8. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. – Минск: Наука и техника, 1996. – 200 с.

9. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / БГЭУ. – Минск, 2005. – 363 с.

10. Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. – LAP LAMBERT Publishing RU, 2017. – 263 с.

11. Мансимов К.Б. Дискретные системы. – Баку: Изд-во БГУ, 2013. – 151 с.

12. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория задачи оптимального управления системами Гурса – Дарбу. – Баку: Элм, 2010. – 360 с.

13. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1988. – 360 с.

14. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: МЦНМО, 2011. – 624 с.

15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы / Н. ИМСО АН СССР. – М., 1979. – Вып. 28. – С. 14–25.

References

1. Vasil'yev O.V., Kirillova F.M. Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [Optimal processes in two-parameter discrete systems]. *Soviet Mathematics. Doklady*. 1967, vol.175, no. 1, pp. 17-19.

2. Mansimov K.B. Optimizatsiya odnogo klassa diskretnykh dvukhparametricheskikh sistem [Optimization of one class of discrete two-parameter systems]. *Differential equations*. 1991, no. 2, pp. 213-218.

3. Stepanyuk N.N. Nekotoryye zadachi upravlyayemosti i nablyudayemosti dvukhparametricheskikh dinamicheskikh sistem [Some problems of controllability and observability of two-parameter dynamical systems]. *Differential equations*. 1978, no. 12, pp. 2190-2195.

4. Aliyeva S.T. Usloviya optimal'nosti v diskretnykh dvukhparametricheskikh granichnykh zadachakh upravleniya [Optimality conditions in discrete two-parameter boundary control problems]. Abstract of Ph. D. thesis. Baku, 2005. 18 p.

5. Aliyeva S.T., Mansimov K.B. Ob odnoy diskretnoy dvukhparametricheskoy zadache upravleniya s granichnym usloviyem[On a discrete two-parameter control problem with a boundary condition]. *Vestnik Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia fiziko-matematicheskikh nauk*, 2004, no. 4, pp. 13-19.

6. Mansimov K.B. Sufficient conditions of Krotov type in discrete two-parameter systems. *Automation and Remote Control*, 1985, vol. 6, pp. 932–937.

7. Gabasov R., Kirillova F.M. Metody optimizatsii [Optimization methods], Minsk: Chetyre chetverti, 2011. 272 p.

8. Gayshun I.V. Multiparameter control systems. Minsk: Science and technology, 1996. 200 p.

9. Dymkov M.P. Extreme problems in multiparameter control systems. Minsk: BSEU, 2005. 363 p.

10. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Optimization of the processes described by the Volterra difference equations. LAP LAMBERT Publishing RU, 2017. 263 p.

11. Mansimov K.B. Diskretnyye sistemy [Discrete systems]. Baku: Izd-vo BGU, 2013. 151 p.

12. Mansimov K.B., Mardanov M.Dj. Kachestvennaya teoriya zadachi optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu[Qualitative theory of the optimal control problem for Goursat-Darboux systems]. Baku: Elm, 2010. 360 p.

13. Mordukhovich B.Sh. Metody approksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya [Approximation methods in optimization and control problems]. Moscow: Nauka, 1988. 360 p.

14. Vasil'yev F.P. Metody optimizatsii [Optimization methods], M.: Izd-vo MTSNMO, 2011. 624 p.

15. Gabasov R., Kirillova F.M. K teorii neobkhodimykh usloviy optimal'nosti v diskretnykh sistemakh upravleniya [On the theory of necessary conditions for optimality in discrete control systems]. *Upravlyayemyye sistemy*. N. IMSO AN SSSR, 1979, vyp. 28, pp. 14-25.

Статья получена: 15.11.2020

Статья принята: 24.09.2021

Сведения об авторе

Мамедова Туркан Фикрет кызы (Баку, Азербайджанская Республика) – аспирант, Институт систем управления НАН Азербайджана (Az1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

About the author

Turkan F. Mamedova (Baku, Azerbaijan Repablic) – Postgraduate Student, Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan (9, B. Vahabzade st., Baku, AZ1141, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.1000–2018:

Мамедова, Т.Ф. Аналог дискретного принципа максимума и необходимое условие оптимальности особых управлений в одной дискретной двухпараметрической задаче оптимального управления / Т.Ф. Мамедова. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.01 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2021. – № 3. – С. 7–34.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Мамедова Т.Ф. Аналог дискретного принципа максимума и необходимое условие оптимальности особых управлений в одной дискретной двухпараметрической задаче оптимального управления // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – № 3. – С. 7–34. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Mamedova T.F. Analogue of the discrete maximum principle and the necessary optimality condition of singular controls in one two-parametric discrete optimal control problem. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2021, no. 3, pp. 7–34. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.01