DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.02
УДК 517.977

С.Ю. Култышев, Л.М. Култышева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Получены новые теоремы об управляемости линейной функционально-дифференциальной системы эволюционного типа и алгоритм для практической проверки управляемости, который можно применять даже в случае, когда коэффициенты системы не являются непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемом отрезке времени. Частными случаями этой системы являются нестационарные дифференциальные системы с распределенными и сосредоточенными запаздываниями, интегро-дифференциальные системы с вольтерровским интегралом и обыкновенные дифференциальные системы. Основные полученные результаты сформулированы в виде 12 теорем и 3 следствий. На их основе построен алгоритм практической проверки управляемости рассматриваемой системы с помощью компьютера. Приведены примеры, иллюстрирующие работоспособность полученных теорем и алгоритма. Алгоритм реализован в пакете Maple 17 для примеров дифференциальных систем второго порядка с запаздыванием.

Ключевые слова: линейные эволюционные функционально-дифференциальные системы, дифференциальные системы с запаздыванием, обыкновенные дифференциальные системы, матрица Коши, интегральные уравнения, основная задача управления, разрешимость, управляемость, практическая неуправляемость, эффективный практический алгоритм.

S.Iu. Kultyshev, L.M. Kultysheva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON THE CONTROLLABILITY OF LINEAR EVOLUTIONARY FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL SYSTEMS

New theorem on the controllability of linear functional-differential system of evolutionary type and algorithm for practical verification of controllability are obtained, which can be applied even in the case when the coefficients of system are not continuously differentiable over the time interval under consideration. Special cases of this system are nonstationary systems with distributed and concentrated delay, integro-differential systems with a Voltaire integral and ordinary differential systems. The main results obtained are formulated in the form of 12 theorems and 3 corollaries. On their basis an algorithm for practical verification of the controllability of the system under consideration using a computer is built. Examples illustrating the operability of the obtained theorems and the algorithm are given. The algorithm is implemented in the Maple 17 package for examples of second-order differential systems with delay.

Keywords: linear evolutionary functional-differential systems, differential systems with delay, ordinary differential systems, Couchy matrix, integral equations, the main problem of control, tractability, controllability, practical uncontrollability, effective practical algorithm.

Введение

Рассматривается вопрос о разрешимости основной задачи управления (об управляемости) для линейной функционально-дифференциальной системы эволюционного типа (1), в виде которой можно записать обыкновенную линейную нестационарную дифференциальную систему, интегро-дифференциальную систему с вольтерровским оператором, дифференциальную систему с распределенным запаздыванием и нестационарную дифференциальную систему с сосредоточенным запаздыванием. Разным частным видам системы (1) посвящено много работ [1–4], в которых получены эффективные условия управляемости при условиях достаточной гладкости коэффициентов и запаздываний. Но если эти коэффициенты не дифференцируемы, то возникает проблема получения условий управляемости таких систем. Ввиду этого вопрос об управляемости и получении практических алгоритмов для его решения в этом случае является актуальным. В этой статье доказываются новые теоремы об управляемости системы (1) и алгоритм практического выявления управляемости, вытекающий из этих теорем.

1. Постановка задачи и краткий обзор известных результатов

Пусть R^n – пространство n-мерных векторов, компонентами которых являются действительные числа; L_p^n – пространство n-мерных вектор-функций, компоненты которых суммируемы в степени $p = \overline{1,2}$ на отрезке $[a,b]$; L_∞^n – пространство n-мерных вектор-функций, измеримых и ограниченных в существенном на отрезке $[a,b]$; D_1^n – пространство n-мерных, абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций с производной из L_1^n; $(\bullet)^*$ – символ транспонирования векторов и матриц; $\|A\|_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $\|A\|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ – нормы для числовой $(n\times n)$-матрицы $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, a_{ij} \in R^1$.

Рассмотрим линейную функционально-дифференциальную [5] систему

$$\dot{x}(t)=\int_a^t K(t,s)\dot{x}(s)ds+A(t)x(a)+B(t)u(t)+f(t), t\in[a,b], \tag{1}$$

в следующих предположениях: $K(t,s)$ – $(n\times n)$-матрица, определенная при $a\le s\le t\le b$, элементы которой при почти каждом $s\in[a,b]$ суммируемы по t на отрезке $[s,b]$ и при почти каждом t ограничены в существенном по s на отрезке $[a,t]$; A – $(n\times n)$-матрица со столбцами из L_1^n; B – $(n\times m)$-матрица со столбцами из $L_2^n, m\le n,$ $f\in L_1^n, u\in L_2^m, x\in D_1^n$; $Q: L_1^n\to L_1^n, (Qy)(t)=\int_a^t K(t,s)y(s)ds$ – ограниченный интегральный оператор; $G{:}L_2^r\to L_1^n, (Gu)(t)=B(t)u(t)$ – ограниченный оператор. Решение системы (1) – вектор-функция $x\in D_1^n$, удовлетворяющая условию (1) почти всюду на отрезке $[a,b]$.

Замечание 1. В виде системы (1) можно записать обыкновенную линейную динамическую систему, линейную нестационарную систему с сосредоточенными запаздываниями и систему с распределенным запаздыванием [5–9].

Основная задача управления для системы (1) формулируется следующим образом: *по заданным* $\alpha\in R^n, \beta\in R^n$, $f\in L_1^n$ *найти такое управление* $u\in L_2^m$, *при котором решение системы (1) с начальным условием* $x(a)=\alpha$ *удовлетворяет конечному условию* $x(b)=\beta$.

Определение 1. *Систему (1) назовем управляемой, если основная задача управления разрешима для любых* $\alpha\in R^n$, $\beta\in R^n$, $f\in L_1^n$.

Приведем основные известные признаки управляемости для частных случаев системы (1).

1. В случае обыкновенной линейной стационарной системы

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+f(t), t\in[a,b],$$

где $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}$, $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m, f(t)\in R^n$, для управляемости необходимо и достаточно, чтобы ранг составной $(n\times(n\bullet m))$-матрицы $U=\left\{B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right\}$ был равен n.

Это критерий Р. Калмана [1].

2. Обыкновенная линейная нестационарная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), t \in [a,b], \qquad (2)$$

где $A(t) \in R^{n\times n}, B(t) \in R^{n\times m}, x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, f(t) \in R^n$ (в предположении непрерывности $n-1$ производной матриц $A(t)$ и $B(t)$ по t), управляема, если при некотором $t_* \in [a,b]$ ранг составной матрицы $U = \{D_0(t_*), D_1(t_*), ..., D_{n-1}(t_*)\}$ равен n, где $D_0(t) = B(t), D_k(t) =$ $= A(t)D_{k-1}(t) - \dot{D}_{k-1}(t), k = \overline{1, n-1}$.

Это достаточный признак управляемости Н.Н. Красовского [2].

3. Система (2) управляема тогда и только тогда, когда $\det M \neq 0$, где $M = \int\limits_a^b C(b,s)B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds,$ а $C(t,s)$ – матрица Коши системы (2).

Это критерий Р. Калмана [1].

4. Система (2) управляема тогда и только тогда, когда краевая задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)B^*(t)y(t), t \in [a,b], \\ \dot{y}(t) = -A^*(t)y(t), x(a) = 0, x(b) = 0, \end{cases}$$

где $x(t) \in R^n, y(t) \in R^n$, имеет только тривиальное решение $\{x(t), y(t)\} \equiv \{0,0\}$.

Этот критерий сформулирован Е.Л. Тонковым в 1975 г. [10].

5. Линейная стационарная система с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + g(t), t \in [0,T], \\ x(t) = \varphi(t), t < 0, \end{cases}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, g(t) \in R^n, A_0 \in R^{n\times n}, A_1 \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}, h \in R^1, h > 0,$$

управляема тогда и только тогда, когда ранг составной матрицы $U = \left\{Q_k(s), k = \overline{0, n-1}, s = 0, h, 2h, ..., ph\right\}$ равен n, где

$$Q_k(s) = A_0Q_{k-1}(s) + A_1Q_{k-1}(s-h), s \in [0,T], k = \overline{1, n-1},$$
$$Q_0(0) = B, Q_0(s) = 0 \text{ при } s \neq 0,$$

$p = \left[\dfrac{T}{h}\right]$ – целая часть отношения $\dfrac{T}{h}$.

Это критерий Р.Ф. Габасова, Ф.М. Кирилловой [3].

6. Линейная нестационарная система с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + b(t)u(t) + g(t), t \in [0,T], \\ x(t) = \varphi(t), t < 0, \end{cases}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^1, g(t) \in R^n, A_0(t) \in R^{n\times n}, A_1(t) \in R^{n\times n}, b(t) \in R^n,$$

$h \in R^1, h > 0$ (в предположении, что матрицы $A_0(t), A_1(t)$ и вектор $b(t)$ имеют непрерывную производную $n-1$ порядка по t), управляема, если найдется такое $t_* \in [0,T]$, что ранг матрицы $U(t_*)$ равен n, где $U(t)$ – составная матрица вида

$$U(t) = \{q_k(t,s), k = \overline{0, n-1}, s = 0, h, 2h, ..., ph\}, \text{ а}$$

$$q_k(t,s) = A_0(t)q_{k-1}(t,s) + A_1(t)q_{k-1}(t,s) - \frac{\partial q_{k-1}(t,s)}{\partial t}, k = \overline{1, n-1},$$

$$q_0(t,0) = b(t), q_0(t,s) = 0, s \neq 0, t \in [0,T].$$

Это достаточный признак управляемости Р.Ф. Габасова, Ф.М. Кирилловой, который распространен и на случай непостоянного запаздывания [3, 4]. Аналогичные признаки управляемости получены учениками и аспирантами Р.Ф. Габасова и Ф.М. Кирилловой для разных видов систем с запаздыванием [11].

7. Рассмотрим систему с распределенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \int_a^t [d_s R(t,s)]x(s)ds + B(t)u(t) + f(t), t \in [a,b], \qquad (3)$$

где интеграл в правой части этого уравнения понимается в смысле Лебега – Стилтьеса.

Эта система управляема тогда и только тогда, когда найдется такая $(n \times n)$-матрица $W(t,s)$, что $\det M_w \neq 0$ и единица не является точкой спектра оператора $P: L_1^n \to L_1^n, (Py)(t) = \int_a^b \tilde{P}(t,s)y(s)ds,$ где

$$M_W = \int_a^b W(b,s)B(s)B^*(s)W^*(b,s)ds,\ W(t,t)=E,$$

$$\tilde{P}(t,s) = \sigma(t-s)K(t,s) -$$

$$-B(t)B^*(t)W^*(b,t)M_W^{-1}\int_s^b W(b,r)[K(r,s)-Q(r,s)]dr,\ \sigma(t) = \begin{cases} 0, t<0, \\ 1, t \geq 0, \end{cases}$$

$K(t,s) = R(t,t) - R(t,s),$ а $Q(r,s) - (n \times n)$-матрица, которая является решением уравнения $\int_s^t W(t,r)Q(r,s)dr = W(t,s) - E$, или уравнения

$$Q(t,s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} W(t,r)Q(r,s)dr = \frac{\partial}{\partial t} W(t,s), a \leq s \leq t \leq b .$$

Систему (3) можно записать в виде системы (1), если положить

$$A(t) = R(t,t) - R(t,a), K(t,s) = R(t,t) - R(t,s).$$

Этот критерий управляемости получен в 1975 г. на основе W-метода Н.В. Азбелева [7, 12, 13].

Замечание 2. Результаты по управляемости нелинейных функционально-дифференциальных систем можно найти в работе [14].

2. Основные полученные результаты

Решение системы (1) с начальным условием $x(a) = \alpha$ представимо по формуле Коши

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_a^t C(t,s)[B(s)u(s) + f(s)]ds, \tag{4}$$

где $X(t) = E + \int_a^t C(t,s)A(s)ds$, а $C(t,s) - (n \times n)$ -матрица Коши, определяемая равенством

$$C(t,s) = E + \int_s^t R(\tau,s)d\tau . \tag{5}$$

Здесь E – единичная $(n \times n)$ -матрица, а $R(t,s)$ – ядро резольвенты для оператора Q , т.е. решение интегрального уравнения

$$y(t)=\int_a^t K(t,s)y(s)ds+g(t), t\in[a,b],$$

представимо в виде

$$y(t)=\int_a^t R(t,s)g(s)ds+g(t), t\in[a,b],$$

где $R(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(t,s), K_i(t,s)=\int_s^t K_{i-1}(t,r)K(r,s)dr, i=2,3,...,\quad K_1(t,s)=$ $=K(t,s)$ [15].

В силу формулы (5) матрица Коши удовлетворяет уравнению

$$C(t,s)=E+\int_s^t C(t,r)K(r,s)dr, a\le s\le t\le b \tag{6}$$

(о матрице Коши для функционально-дифференциальных систем можно прочитать в источниках [5–9]).

Введем обозначения:

$$M=\int_a^b C(b,s)B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds,$$

$$M_k=\int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)C_k^*(b,s)ds,$$

где $C_0(t,s)=E$, $C_k(t,s)=E+\int_s^t C_{k-1}(t,r)K(r,s)dr$ $(k=1,2,3,...)$ – последовательные приближения к матрице Коши (при $a\le s\le t\le b$).

По аналогии с работой [1] можно сформулировать критерий управляемости в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Система (1) управляема тогда и только тогда, когда* $\det M\ne 0$.

Следствие 1. *Система (1) управляема тогда и только тогда, когда строки* $(n\times m)$*-матрицы* $U(t)=C(b,t)B(t)$ *линейно независимы на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Матрица M является матрицей Грамма для строк матрицы $U(t)$, следовательно, $\det M\ne 0$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $U(t)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$.

Но эти признаки управляемости неявные, так как выражены через матрицу Коши, а не через параметры исходной системы. А более явный критерий дает следующая теорема.

Теорема 2. *Если существует такая положительная константа* γ*, что* $\|K(t,s)\| \le \gamma$ *при* $a \le s \le t \le b$*, то система (1) управляема тогда и только тогда, когда найдется такой номер* k*, что* $\det M_k \ne 0$*, и выполнится неравенство*

$$\lambda_k < \frac{1}{\left\|M_k^{-1}\right\|}, \tag{7}$$

где

$$\lambda_k = \frac{2\gamma^k (b-a)^k e^{\gamma(b-a)} (e^{\gamma(b-a)} - 1)}{k!} \int_a^b \left\|B(s)B^*(s)\right\| ds,$$

M_k^{-1} *– матрица, обратная к* M_k.

Доказательство. Достаточность: пусть нашелся такой номер k, что $\det M \ne 0$, и выполняется неравенство (7). Поскольку последовательность матриц $C_k(t,s)$ сходится к матрице Коши $C(t,s)$ при $k \to \infty$, то, согласно источнику [15], при почти всех $s \in [a,b]$ справедливы неравенства:

$$\begin{gathered} \|C(b,s)\| \le e^{\gamma(b-a)}, \|C_k(b,s)\| \le e^{\gamma(b-a)}, \\ \|C(b,s) - C_k(b,s)\| \le \frac{\gamma^k (b-a)^k (e^{\gamma(b-a)} - 1)}{k!}, \\ \|C^*(b,s)\| \le e^{\gamma(b-a)}, \|C_k^*(b,s)\| \le e^{\gamma(b-a)}, \\ \|C^*(b,s) - C_k^*(b,s)\| \le \frac{\gamma^k (b-a)^k (e^{\gamma(b-a)} - 1)}{k!}. \end{gathered} \tag{8}$$

Отсюда имеем

$$\|M - M_k\| =$$

$$= \left\| \int_a^b C(b,s)B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds - \int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)C_k^*(b,s)ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_a^b [C(b,s) - C_k(b,s)]B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds + \right.$$

$$+\int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)[C^*(b,s)-C_k^*(b,s)]\,ds\Big\| \le$$

$$\le \left\|\int_a^b [C(b,s)-C_k(b,s)]B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds\right\| +$$

$$+\left\|\int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)[C^*(b,s)-C_k^*(b,s)]ds\right\| \le$$

$$\le \int_a^b \left\|[C(b,s)-C_k(b,s)]B(s)B^*(s)C^*(b,s)\right\| ds +$$

$$+\int_a^b \left\|C_k(b,s)B(s)B^*(s)[C^*(b,s)-C_k^*(b,s)]\right\| ds \le$$

$$\le \int_a^b \left\|C(b,s)-C_k(b,s)\right\| \times \left\|B(s)B^*(s)\right\| \times \left\|C^*(b,s)\right\| ds +$$

$$+\int_a^b \left\|C_k(b,s)\right\| \times \left\|B(s)B^*(s)\right\| \times \left\|C^*(b,s)-C_k^*(b,s)\right\| ds \le$$

$$\le \frac{2\gamma^k (b-a)^k e^{\gamma(b-a)}(e^{\gamma(b-a)}-1)}{k!}\int_a^b \left\|B(s)B^*(s)\right\| ds = \lambda_k,$$

следовательно, в силу неравенства (5) имеем $\left\|M-M_k\right\| < \dfrac{1}{\left\|M_k^{-1}\right\|}$.

Далее: в силу теоремы Банаха [16] матрица M обратима, следовательно, $\det M \ne 0$, и по теореме 1 система (1) управляема. Достаточность доказана.

Необходимость: пусть система (1) управляема, тогда $\det M \ne 0$, а поскольку $M_k \to M$ при $k \to \infty$, существует такой номер k_1, что $\left|\det M - \det M_k\right| < \dfrac{d}{2}$ при всех $k > k_1$, где $d = \left|\det M\right|$.

Далее: $\dfrac{d}{2} > \left|\det M - \det M_k\right| \ge \left|\det M\right| - \left|\det M_k\right|$ при всех $k > k_1$, следовательно, $d - \left|\det M_k\right| < \dfrac{d}{2}$ и $\left|\det M_k\right| > \dfrac{d}{2} > 0$. Отсюда $\det M_k \ne 0$ при всех $k > k_1$. Далее: так как $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, то существует такой номер $k_2 > k_1$, что $\det M_k \neq 0$ и $\lambda_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при всех $k > k_2$, где $\varepsilon = \dfrac{1}{\|M^{-1}\|}$.

И наконец, так как $M_k \to M$ при $k \to \infty$, существует такой номер $k_3 > k_2$, что $\det M_k \neq 0$, $\lambda_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\left|\dfrac{1}{\|M^{-1}\|} - \dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при всех $k > k_3$.

Отсюда $\det M_k \neq 0$ и $\dfrac{\varepsilon}{2} > \left|\dfrac{1}{\|M^{-1}\|} - \dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|}\right| \geq \dfrac{1}{\|M^{-1}\|} - \dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|} = \varepsilon - \dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|}$ при всех $k > k_3$.

Далее: $\dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|} > \dfrac{\varepsilon}{2} > \lambda_k$ при всех $k > k_3$, следовательно, найдется такой номер $k > k_3$, что $\det M_k \neq 0$ и $\lambda_k < \dfrac{1}{\|M_k^{-1}\|}$.

Таким образом, необходимость и вся теорема доказаны.

Замечание 3. Эта теорема была сформулирована в источнике [17] без доказательства, в несколько более общем виде. Более подробное изложение результатов авторов об управляемости систем вида (1) см. в работе [12].

Следствие 2. *Если* $\|K(t,s)\| \leq \gamma$ *(при* $a \leq s \leq t \leq b$*),* $\det M_1 \neq 0$ *и* $\lambda_1 < \dfrac{1}{\|M_1^{-1}\|}$, *где* $M_1 = \int_a^b C_1(b,s)B(s)B^*(s)C_1^*(b,s)ds$, $C_1(b,s) = E + \int_s^b K(r,s)dr$, $\lambda_1 = 2\gamma(b-a)e^{\gamma(b-a)}(e^{\gamma(b-a)}-1)\int_a^b \|B(s)B^*(s)\| ds$, *то система (1) управляема.*

Это следствие получается из теоремы 2 при $k = 1$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x[h(t)] + B(t)u(t) + g(t), t \in [0,1], \\ x(t) = \varphi(t), t < 0, \end{cases}$$

где

$$x(t) \in R^2, u(t) \in R^1, g(t) \in R^2, h(t) \in R^1,$$

$$A_0(t)=\begin{pmatrix}0,01 & 0\\ 0 & 0,01\end{pmatrix},\ A_1(t)=\begin{pmatrix}0,01 & 0\\ 0 & 0,01\end{pmatrix},\ h(t)=t-0,5,$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}0,1\\ 0,2t\end{pmatrix}.$$

Эту систему можно записать в виде системы (1), если положить

$$A(t)=A_0(t)+\sigma[h(t)]\times A_1(t), K(t,s)=A_0(t)+\sigma[h(t)-s]\times A_1(t),$$

$$f(t)=g(t)+(1-\sigma[h(t)])A_1(t)\varphi[h(t)],\ \text{где}\ \sigma(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ 1, t\geq 0,\end{cases}$$

причем $\gamma=0,02,\ \lambda_1\approx 0,0011,\ \dfrac{1}{\left\|M_1^{-1}\right\|}\approx 0,001\,457,\ \det M_1\approx 0,000\,034\,2,$

а $\varepsilon_1\approx 0,000\,061$. Очевидно, выполняется неравенство $\lambda_1<\dfrac{1}{\left\|M_1^{-1}\right\|}$, поэтому (в силу следствия 2) эта система управляема.

Теорема 3. *Если найдется такой номер* k*, что строки составной* $(n\times(n+m))$*-матрицы*

$$N(s)=\left\{C_k(b,s)B(s),\int_s^b K_{k+1}(r,s)dr\right\}(k=0,1,2,3,...), s\in[a,b],$$

линейно зависимы на отрезке $[a,b]$*, то система (1) неуправляема.*

Доказательство. В силу формул (3),(4) матрица Коши представима в виде

$$C(t,s)=C_k(t,s)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_s^t\int_r^t K_k(\tau,r)d\tau K_i(r,s)dr, k=0,1,2...,$$

где $K_0(t,s)=0,$ поэтому

$$U(s)=C(b,s)B(s)=C_k(b,s)B(s)+\sum_{i=1}^{\infty}[\int_s^b\int_r^b K_k(\tau,r)d\tau K_i(r,s)dr]B(s),$$

$k=0,1,2,3,\ldots.$

Далее: если выполняется условие теоремы, то существует такой вектор

$$\xi \in R^n \text{, что } \xi \neq 0 \text{ и } \xi^* C_k(b,s)B(s) = 0, \xi^* \int_s^b K_{k+1}(r,s)dr = 0,$$

при почти всех $s \in [a,b]$. Следовательно,

$$\xi^* C_k(b,s)B(s) + \xi^* \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_s^b \int_r^b K_k(\tau,r)d\tau K_i(r,s)dr \right] B(s) = 0$$

и $\xi^* U(s) = \xi^* C(b,s)B(s) = 0$ для почти всех $s \in [a,b]$, поэтому строки матрицы $U(t)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$ и система (1), согласно следствию 1, неуправляема. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если строки составной* $(n \times (m+n))$*-матрицы* $\left\{ B(t), \int_t^b K(s,t)ds \right\}$ *линейно зависимы на отрезке* $[a,b]$*, то система (1) неуправляема.*

Доказательство: это утверждение получается из теоремы 3 при $k = 0$.

Пример 2. Рассмотрим систему второго порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x[h(t)] + B(t)u(t) + g(t), t \in [0,2], \\ x(t) = \varphi(t), t < 0, \end{cases}$$

где $x(t) \in R^2, u(t) \in R^1, f(t) \in R^2, h(t) \in R^1$,

$$A_9(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_1(t) = \begin{pmatrix} t-0,5 & t-0,5 \\ t-0,5 & t-0,5 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0,5t \\ 0,5t \end{pmatrix},$$

$$h(t) = 0,5(t-1).$$

Эту систему можно записать в виде системы (1), где

$$A(t) = A_0(t) + \sigma[h(t)]A_1(t), K(t,s) = A_0(t) + \sigma[h(t)-s]A_1(t),$$

$$f(t) = g(t) + (1-\sigma[h(t)])A_1(t)\varphi[h(t)], \sigma(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что при $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ выполняются равенства $\xi^* B(t) = 0, \xi^* \int_t^2 K(s,t)ds = 0$ для всех $t \in [a,b]$.

Таким образом, в силу следствия 3 эта система неуправляема.

Пример закончен.

Если можно построить некоторое приближение $\tilde{C}(t,s)$ к матрице Коши $C(t,s)$ другим способом, причем $\left\| C(b,s) - \tilde{C}(b,s) \right\| \le \varepsilon$ почти при всех $s : a \le s \le b$, то имеет место:

Теорема 4. *Если* $\det \tilde{M} \ne 0$ *и* $q \bullet \varepsilon < \dfrac{1}{\left\| \tilde{M}^{-1} \right\|}$*, где*

$$\tilde{M} = \int_a^b \tilde{C}(b,s)B(s)B^*(s)\tilde{C}^*(b,s)ds,\ q = (\mu^* + \tilde{\mu})\int_a^b \left\| B(s)B^*(s) \right\| ds,$$

$\left\| C^*(b,s) \right\| \le \mu^*, \left\| \tilde{C}(b,s) \right\| \le \tilde{\mu},$ *то система (1) управляема.*

Доказательство. При этих условиях по аналогии с теоремой 2 доказывается неравенство $\left\| M - \tilde{M} \right\| \le q \bullet \varepsilon$, следовательно, выполняется неравенство $\left\| M - \tilde{M} \right\| < \dfrac{1}{\left\| \tilde{M}^{-1} \right\|}$. Далее: в силу теоремы Банаха из обратимости матрицы $\tilde{M}$ вытекает обратимость матрицы M и неравенство $\det M \ne 0$. Следовательно, по теореме 1 система (1) управляема, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает следующий критерий управляемости.

Теорема 5. *Система (1) управляема тогда и только тогда, когда найдется такая* $(n \times n)$*-матрица* $W(t)$*, что* $\det M_w \ne 0$ *и* $q \bullet \varepsilon < \dfrac{1}{\left\| M_w^{-1} \right\|}$*,*

где

$$M_w = \int_a^b W(s)B(s)B^*(s)W^*(s)ds, q = (\mu_c + \mu_w)\int_a^b \left\| B(s)B^*(s) \right\| ds,$$

$$\left\| C^*(b,s) \right\| \le \mu_c, \left\| W(s) \right\| \le \mu_w, \left\| C(b,s) - W(s) \right\| \le \varepsilon, \left\| C^*(b,s) - W^*(s) \right\| \le \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как теорема 4.

Необходимость доказывается, если положить $W(t) = C(b,t)$. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим систему второго порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \lambda A_1 x[h(t)] + B(t)u(t) + g(t), t \in [0,1], \\ x(t) = \varphi(t), t < 0, \end{cases}$$

где $x(t) \in R^2, u(t) \in R^1, g(t) \in R^2, \lambda \in R^1, h(t) \in R^1, h(t) = 0,5(t-1)$,

$$A_0 = A_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \lambda \geq 0.$$

Эту систему можно записать в виде системы (1), если положить

$$A(t) = A_0 + \lambda\sigma[h(t)]A_1, K(t,s) = A_0 + \lambda\sigma[h(t)-s] \bullet A_1,$$

$$f(t) = g(t) + \lambda(1-\sigma[h(t)])A_1(t)\varphi[h(t)], \text{ где } \sigma(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0, \end{cases}$$

причем $\gamma = 1 + \lambda, \mu_c = e^{\gamma}, \int\limits_0^1 \left\| B(s)B^*(s) \right\| ds = 2.$

Возьмем $W(t) = e^{1-s} \bullet E$, тогда $M_W = \int\limits_0^1 e^{2(1-s)} B(s)B^*(s)ds, \det M_W \neq 0$,

$\mu_w = e, \varepsilon = \lambda(e-1)(1+\gamma e^{\gamma}), q = 2(e+e^{\gamma})$ и при $\lambda \leq 0,01$ выполняется неравенство $q \bullet \varepsilon < \dfrac{1}{\left\| M_W^{-1} \right\|}$. Следовательно, эта система управляема.

Лемма. *Для числовых* $(n \times n)$*-матриц* A *и* $\tilde{A}$ *имеет место неравенство* $\left| \det A - \det \tilde{A} \right| \leq \mu \left\| A - \tilde{A} \right\|$*, где* $\|A\|$ *– одна из введенных ранее норм матрицы* A*,* $\mu = \max\limits_{i,j}(|A_{ij}|, |\tilde{A}_{ij}|)$*,* A_{ij} *и* $\tilde{A}_{ij}$ *– алгебраические дополнения элементов* a_{ij} *и* $\tilde{a}_{ij}$ *матриц* A *и* $\tilde{A}$ *соответственно.*

Доказательство. Введем обозначения $\varphi(A) = \det A$, тогда по формуле конечных приращений (теорема о среднем) $\det A - \det \tilde{A} =$ $= \varphi(A) - \varphi(\tilde{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi(\overline{A})}{\partial a_{ij}} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij})$, где $\overline{A}$ – матрица, элементы которой имеют вид $\overline{a}_{ij} = \tilde{a}_{ij} + \theta(a_{ij} - \tilde{a}_{ij}), \theta \in [0,1]$, но $\dfrac{\partial\varphi(A)}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$ и $\dfrac{\partial\varphi(\overline{A})}{\partial a_{ij}} = \overline{A}_{ij}$, следовательно, $\left|\det A - \det\tilde{A}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\overline{A}_{ij}\right| \times \left|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\right| \le$

$\le (\max_{i,j}\left|\overline{A}_{ij}\right|)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\right| \le \mu\left\|A - A\right\|_0$.

Аналогичную оценку можно получить и для других норм в пространстве числовых $(n \times n)$-матриц. Лемма доказана.

Теорема 6. *Система (1) управляема тогда и только тогда, когда найдется такой номер k, что выполняется неравенство $\left|\det M_k\right| > \varepsilon_k$, где*

$$\varepsilon_k = \frac{2\bullet(n!)\bullet\mu^{n-1}\bullet\gamma^k\bullet(b-a)^k\bullet(e^{2\gamma(b-a)} - e^{\gamma(b-a)})\bullet\beta_0}{k!},$$

$$\max_{i,j}\left|M_{ij}\right| \le \mu, \max_{i,j}\left|\tilde{M}_{ij}\right| \le \mu, \tilde{M} = M_k = \int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)C_k^*(b,s)ds,$$

$$\beta_0 = \int_a^b \left\|B(s)B^*(s)\right\| ds \ (k = 1,2,3,...), M_{ij} \ \textit{и} \ \tilde{M}_{ij} -$$

алгебраические дополнения элементов матриц M и $\tilde{M}$.

Доказательство. Достаточность: пусть выполняется неравенство $\left|\det M_k\right| > \varepsilon_k$. В силу условий этой теоремы и леммы имеют место неравенства $\left|\det M - \det M_k\right| \le \varepsilon_k$ и $\left|\det M_k\right| - \varepsilon_k \le \left|\det M\right| \le \left|\det M_k\right| + \varepsilon_k$, следовательно, $\left|\det M\right| > 0$, $\det M \ne 0$ и система (1) управляема.

Необходимость: пусть система (1) управляема, тогда $\left|\det M\right| > 0$, а условие $\left|\det M_k\right| > \varepsilon_k$ (от противного) не выполняется для любого k, т.е. для любого k: $\left|\det M_k\right| \le \varepsilon_k$. Тогда $\lim_{k\to\infty}\left|\det M_k\right| = \left|\det M\right|, \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, причем $\lim_{k\to\infty}\left|M_k\right| = \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k$, следовательно, $\left|\det M\right| = 0$ – противоречие. Исходя из этого, если система управляема, то $\left|\det M_k\right| > \varepsilon_k$ при некотором k. Необходимость и вся теорема доказаны.

Теорема 7. *Если матрица* $K(t,s)$ *абсолютно непрерывна по* $s \in [a,t]$ *при почти всех* $t \in [a,b]$, *то система (1) управляема тогда и только тогда, когда краевая задача*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\dot{x}(s)ds + B(t)B^*(t)y(t), t \in [a,b], x(t) \in R^n, y(t) \in R^n, \\ \dot{y}(t) = -K^*(t,t)y(t) + \int\limits_t^b \frac{\partial}{\partial t} K^*(s,t)y(s)ds, x(a) = x(b) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

имеет только тривиальное решение $\{x(t), y(t)\} \equiv \{0, 0\}$.

Доказательство. В силу формулы (4) решение краевой задачи (9) имеет вид $\{x(t), y(t)\}$, где

$$x(t) = [\int\limits_a^t C(t,s)B(s)B^*(s)C^*(b,s)ds]\gamma, y(t) = C^*(b,t)\gamma, \text{ а } \gamma \in R^n.$$

Это решение тривиально тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. А в силу условия $x(b) = 0$ равенство $\gamma = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\det M \neq 0$, т.е. когда система (1) управляема. Теорема доказана.

Замечание 4. Эта теорема обобщает критерий, сформулированный Е.Л. Тонковым для обыкновенных дифференциальных систем в работе [10]. На ее основе можно получать коэффициентные признаки управляемости с помощью упомянутого ранее W-метода Н.В. Азбелева и других теорем об однозначной разрешимости краевых задач [7–9].

Теорема 8. *Если* $\det M_0 \neq 0$ *и* $\underset{s\in[a,b]}{vrai\sup} \int\limits_a^b \|P(t,s)\| dt < 1$, *где* $M_0 = \int\limits_a^b B(s)B^*(s)ds$, $P(t,s) = \sigma(t-s)K(t,s) - B(t)B^*(t)M_0^{-1}\int\limits_s^b K(r,s)dr$, *то система (1) управляема.*

Доказательство. Будем строить искомое управление в виде $u(t) = B^*(t)\gamma$, где $\gamma \in R^n$, тогда $\dot{x}(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)\alpha + B(t)B^*(t)\gamma +$ $+ f(t), t \in [a,b]$.

Интегрируя обе части этого уравнения от a до t, получаем

$$x(t)=[E+\int_a^t A(s)ds]\alpha+$$

$$+\int_a^t\int_a^s K(s,r)\dot{x}(r)drds+\int_a^t B(s)B^*(s)ds\gamma+\int_a^t f(s)ds=$$

$$=[E+\int_a^t A(s)ds]\alpha+\int_a^t[\int_s^t K(r,s)dr]\dot{x}(s)ds+\int_a^t B(s)B^*(s)ds+\int_a^t f(s)ds.$$

В силу условия $x(b)=\beta$ имеем уравнение

$$[E+\int_a^b A(s)ds]\alpha+\int_a^b[\int_a^b K(r,s)dr]\dot{x}(s)ds+\int_a^b B(s)B^*(s)ds\gamma+$$

$$+\int_a^b f(s)ds=\beta.$$

Решая это уравнение относительно γ, получаем

$$\gamma=M_0^{-1}\{\beta-[E+\int_a^b A(s)ds]\alpha-\int_a^b[\int_s^b K(r,s)dr]\dot{x}(s)ds-\int_a^b f(s)ds\}.$$

Далее, подставляя это выражение в исходную систему, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t)=\int_a^b P(t,s)\dot{x}(s)ds+g(t), t\in[a,b], \text{ где}$$

$$P(t,s)=\sigma(t-s)K(t,s)-B(t)B^*(t)M_0^{-1}\int_s^b K(r,s)dr, \text{ а}$$

$$g(t)=A(t)\alpha+f(t)+B(t)B^*(t)M_0^{-1}\{\beta-[E+\int_a^b A(s)ds]\alpha-\int_a^b f(s)ds\}.$$

В силу условий теоремы 8, которые достаточны для применения упомянутой выше теоремы Банаха из источника [16], это интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение $\dot{x}(t)$ для любого $g\in L_1^n$ и при $u(t)=B^*(t)\gamma$ (где γ определено выше) соответствующее решение $x(t)$ системы (1) удовлетворяет условиям $x(a)=\alpha, x(b)=\beta$. Следовательно, система (1) управляема. Теорема доказана.

При построении алгоритма для практического (компьютерного) выяснения вопроса об управляемости системы (1) нам понадобится:

Определение 2. *Систему (1) назовем практически неуправляемой, если* $\left|\det M\right| \le 2\varepsilon_*$*, где* ε_* *– «машинный ноль».*

Замечание 5. Очевидно, что если система (1) неуправляема согласно теореме 1, то она практически неуправляема.

Замечание 6. Если система (1) практически неуправляема, то определитель матрицы M очень близок к нулю, поэтому невозможно корректно с помощью персонального компьютера вычислить искомое управление, так как соответствующая линейная алгебраическая система плохо обусловлена.

Замечание 7. Величина ε_* – это такое достаточно малое положительное число, что если $|x| \le \varepsilon_*$, то число x компьютер считает равным нулю.

Пусть далее M_{ij} и $\tilde{M}_{ij}$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов матриц M и $\tilde{M}$, а ε – величина оценки близости матриц $C(b,s)$ и $\tilde{C}(b,s)$ из теоремы 4. Тогда имеет место:

Теорема 9. *Если* $\max\limits_{i,j}\left|M_{ij}\right| \le \mu,\ \max\limits_{ij}\left|\tilde{M}_{ij}\right| \le \mu,\ \left|\det\tilde{M}\right| > \varepsilon_*$ *и* $\mu\times\varepsilon \le \varepsilon_*$*, то система (1) управляема.*

Доказательство. При этих условиях имеют место неравенства $\left|\det M - \det\tilde{M}\right| \le \mu\times\varepsilon \le \varepsilon_*$. Отсюда $\left|\det\tilde{M}\right| - \varepsilon_* \le \left|\det M\right| \le \left|\det\tilde{M}\right| + \varepsilon_*$ и далее $\left|\det M\right| \ge \left|\det\tilde{M}\right| - \varepsilon_* > \varepsilon_* - \varepsilon_* = 0$. Следовательно, $\left|\det M\right| > 0$ (т.е. $\det M \ne 0$) и система (1) управляема. Теорема доказана.

Теорема 10. *Если* $\left|\det M - \det\tilde{M}\right| \le \varepsilon_*$ *и* $\left|\det\tilde{M}\right| \le \varepsilon_*$*, то система (1) практически неуправляема.*

Доказательство. Пусть $d = \det M$, а $\tilde{d} = \det\tilde{M}$, тогда $\left|d-\tilde{d}\right| \le \varepsilon_*$ и $\left|\tilde{d}\right| \le \varepsilon_*$, следовательно, $|d| = \left|d-\tilde{d}+\tilde{d}\right| \le \left|d-\tilde{d}\right| + \left|\tilde{d}\right| \le \varepsilon_* + \varepsilon_* = 2\varepsilon_*$, т.е. $\left|\det M\right| \le 2\varepsilon_*$ и система (1) практически неуправляема.

Теорема доказана.

Теорема 11. *Если* $\varepsilon_k \le \varepsilon_*$ *и* $\left|\det M_k\right| \le \varepsilon_*$ *при некотором* k*, где* ε_k *определяется согласно теореме 6, то система (1) практически неуправляема.*

Доказательство. В силу теоремы 6 имеет место неравенство $\left|\det M - \det M_k\right| \le \varepsilon_k$, а в силу условий теоремы 11 $\varepsilon_k \le \varepsilon_*$, следовательно, выполняются условия теоремы 10 при $\tilde{M} = M_k$. Ввиду этого система (1) практически неуправляема. Теорема доказана.

Теорема 12. *Если* $\left|\det M - \det \tilde{M}\right| \le \varepsilon_*$ *и* $\left|\det \tilde{M}\right| > \varepsilon_*$*, то система (1) управляема.*

Доказательство. В силу условий теоремы справедливы неравенства $\left|\det M\right| \ge \left|\det \tilde{M}\right| - \varepsilon_* > \varepsilon_* - \varepsilon_* = 0$, т.е. $\left|\det M\right| > 0, \det M \ne 0$, следовательно, система (1) управляема. Теорема доказана.

Таким образом, для выяснения вопроса об управляемости системы (1) нужно построить достаточно точное приближение $\tilde{M}$ к матрице M (или $\det \tilde{M}$ к $\det M$) и проверить условие $\det \tilde{M} \ne 0$. Эта простая идея в сочетании с полученными теоремами приводит к следующим алгоритму и результатам.

Алгоритм № 1

1. Вычислить постоянную γ, при которой $\left\|K(t,s)\right\| \le \gamma$ для $t,s : a \le s \le t \le b$.

2. Положить

$$k = 1, C_0(b,s) = E, \varepsilon_* = 10^{-10}, \beta_0 = \int_a^b \left\|B(s)B^*(s)\right\| ds, \mu = \beta_0 e^{2\gamma(b-a)}.$$

3. Вычислить $\lambda_k = \dfrac{2 \times \gamma^k \times (b-a)^k \times (e^{2\gamma(b-a)} - e^{\gamma(b-a)}) \times \beta_0}{k!}$,

$$\varepsilon_k = \frac{2 \times (n!) \times \mu^{n-1} \times \gamma^k \times (b-a)^k \times (e^{2\gamma(b-a)} - e^{\gamma(b-a)}) \times \beta_0}{k!},$$

$$C_k(b,s) = E + \int_s^b C_{k-1}(b,\tau)K(\tau,s)d\tau, M_k = \int_a^b C_k(b,s)B(s)B^*(s)C_k^*(b,s)ds$$

$$\text{и } d_k = \left|\det M_k\right|.$$

4. Проверить неравенство $d_k \neq 0$. Если оно выполняется, то перейти к п. 5, а если нет, то перейти к п. 7.

5. Вычислить M_k^{-1} и $\left\|M_k^{-1}\right\|$.

6. Проверить неравенство $\lambda_k < \dfrac{1}{\left\|M_k^{-1}\right\|}$. Если оно выполняется, то выдать ответ «система (1) управляема» и перейти к п. 9, а если нет, то перейти к п. 7.

7. Проверить неравенство $d_k > \varepsilon_k$. Если оно выполняется, то выдать ответ «система (1) управляема» и перейти к п. 9, а если нет, то перейти к п. 8.

8. Проверить неравенство $\varepsilon_k \leq \varepsilon_*$. Если оно выполняется, то выдать ответ «система (1) практически неуправляема» и перейти к п. 9, а если нет, то положить $k = k_{\text{пр}} + 1$, где $k_{\text{пр}}$ – предыдущее значение k, и перейти к п. 3.

9. Конец.

Замечание 8. Если через k_* обозначить минимальное k, при котором выполняется неравенство $\varepsilon_k \leq \varepsilon_*$, то либо $d_{k_*} > \varepsilon_*$, либо $d_{k_*} \leq \varepsilon_*$ и в силу теорем 6, 10 и 12 система (1) либо управляема, либо практически неуправляема, т.е. счет по алгоритму № 1 заканчивается через конечное число итераций, которое не превосходит k_*.

По этому алгоритму просчитаны следующие примеры.

Пример 4. Рассмотрим линейную дифференциальную систему с запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x\left[h(t)\right] + B(t)u(t) + f(t), t \in [0,2], \\ x(t) = 0, t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $A_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1(t) = \begin{pmatrix} t-0,5 & 1 \\ 1 & 0,5-t \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h(t) = 0,5(t-1)$,

$$x(t) \in R^2, u(t) \in R^1, f(t) \in R^2, h(t) \in R^1, h(t) < t.$$

Эту систему можно записать в виде системы (1), где

$$A(t) = A_0(t) + \sigma[h(t)]A_1(t), K(t,s) = A_0(t) + \sigma[h(t) - s]A_1(t),$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Система (10) управляема, по теореме 2, так как $\det M_k \neq 0$ и $\lambda_k < \dfrac{1}{\left\| M_k^{-1} \right\|}$ при $k = 38, \varepsilon_* = 10^{-10}$.

Пример 5. Рассмотрим систему (10), где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1(t) = \begin{pmatrix} t-0,5 & 0 \\ 0 & t-0,5 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}, h(t) = 0,5(t-1).$$

Эту систему можно записать в виде системы (1) (так же, как в примере 4), и она управляема (в силу теоремы 6), так как $\left|\det M_k\right| > \varepsilon_k$ при $k = 13, \varepsilon_* = 10^{-10}$.

Пример 6. Рассмотрим систему (10), где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}, A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & -0,5t \\ 1 & -0,5t \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h(t) = 0,5(t-1).$$

Если записать эту систему в виде системы (1), то

$$A(t) = A_0(t) + \sigma[h(t)]A_1(t), K(t,s) = A_0(t) + \sigma[h(t) - s]A_1(t).$$

Как и в примере 4. Эта система практически неуправляема, по теореме 11, так как $\left|\det M_k\right| \leq \varepsilon_*$ и $\varepsilon_k \leq \varepsilon_*$ при $k = 42$, где $\varepsilon_* = 10^{-10}$.

Пример 7. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), t \in [0,1],$$

$$x(t) \in R^2, u(t) \in R^1, f(t) \in R^2, \text{ где } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что строки матрицы (вектора) $B(t)$ линейно независимы, эта система практически неуправляема, по теореме 11, так как $\left|\det M_k\right| \leq \varepsilon_*$ и $\varepsilon_k \leq \varepsilon_*$ при $k = 22$ и $\varepsilon_* = 10^{-10}$.

Замечание 9. Для этих примеров сделана программа в пакете Maple 17, которая реализует алгоритм № 1 и аналитически вычисляет последовательные приближения к матрицам Коши для рассматриваемых систем.

Замечание 10. Можно упростить алгоритм № 1, убрав проверку условий теоремы 2, но в этом случае может увеличиться число итераций для получения окончательного ответа на поставленный вопрос.

Заключение

Здесь получены теоремы о разрешимости основной задачи управления (управляемости) для систем вида (1) и алгоритм для практического выявления управляемости этих систем. Этот алгоритм позволяет выяснить, управляема система или нет (практически) даже в случае, когда коэффициенты системы не являются непрерывно дифференцируемыми на рассматриваемом отрезке времени. Иными словами, этот алгоритм можно использовать для эффективного решения вопроса об управляемости систем, которые записываются в виде системы (1).

Список литературы

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

3. Габасов Р.Ф, Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

4. Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. – 1967. – Т. 174, № 6. – С. 1260–1263.

5. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Рахматуллина Л.Ф. О линейном функционально-дифференциальном уравнении эволюционного типа // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 11. – С. 1915–1925.

6. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 4. – С. 601–606.

7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит, 1991. – 280 с.

8. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Ин-т комп. исслед. – М., 2002. – 384 с.

9. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2003. – 306 с.

10. Култышев С.Ю., Тонков Е.Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 7. – С. 1206–1216.

11. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Линейные стационарные дифференциально-алгебраические системы. II. Относительная управляемость // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 6. – С. 14–28.

12. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Об управляемости линейных функционально-дифференциальных систем в пространствах (*D*, *L*). – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 15 с.

13. Култышев С.Ю. Об управляемости линейных функционально-дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 8. – С. 1355–1360.

14. Култышев С.Ю., Максимов В.П. Управляемость нелинейных функционально-дифференциальных систем // Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр. – Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1982. – С. 12–18.

15. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и нтегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М: Наука, 1984. – 752 с.

17. Култышев С.Ю. Об управляемости линейных функционально-дифференциальных систем // Функционально-дифференциальные уравнения и краевые задачи математической физики. – Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1978. – С. 174–178.

References

1. Kalman R.E., Arbib M.A., Falb P.L., Topics in mathematical system theory. New York: McGraw-Hill, 1969. 358 p.

2. Krasovskii N.N. Teoriia upravleniia dvizheniem [Theory of motion control]. Moscow: Nauka, 1968. 476 p.

3. Gabasov R.F., Kirillova F.M. Kachestvennaia teoriia optimal'nykh protsessov [Qualitative theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1971. 508 p.

4. Kirillova F.M., Churakova S.V. Relative controllability of linear dynamic systems with lag. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 748-751.

5. Azbelev N.V., Berezansky L.M., Rakhmatullina L.F. O lineinom funktsional'no-differentsial'nom uravnenii evoliutsionnogo tipa [A linear functional-differential equation of evolution type]. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 11, pp. 1915-1925.

6. Maksimov V.P. O formule Koshi dlia funktsional'no-differentsial'nogo uravneniia [Cauchy formula for a functional-differential equation]. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 601-606.

7. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Vvedenie v teoriiu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii [Introduction to the theory of functional-differential equations]. Moscow: Nauka, 1991. 280 p.

8. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniia [Elements of the modern theory of functional-differential equations. Methods and applications]. Moscow: Institute for Computer Research, 2002. 384 p.

9. Maksimov V.P. Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii [Questions of general theory of functional-differential equation]. Perm: Perm State University Publ., 2003. 306 p.

10. Kultyshev S.Iu., Tonkov E.L. Upravliaemost' lineinoi nestatsionarnoi sistemy [Controllability of linear non-stationary system]. *Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1206-1216.

11. Marchenko V.M., Poddubnaya O.N. Linear stationary differential-algebraic systems: II. Relative controllability. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006, vol. 45, no. 6, pp. 858-871.

12. Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M. Ob upravliaemosti lineinykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem v prostranstvakh (D,L) [On the controllability of linear functional-differential systems in space (D,L)]. Perm: Perm State Technical University Publ., 2008. 15 p.

13. Kultyshev S.Iu. Ob upravliaemosti lineinykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem [The controllability of linear functional-differential systems]. *Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 8, pp. 1355-1360.

14. Kultyshev S.Iu., Maksimov V.P. Upravliaemost' nelineinykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem [Controllability of non-linear functional-differential systems]. *Kraevye zadachi, mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov* (Boundary value problems (intercollegiate proceedings). Perm: Perm Polytechnic Institute Publ., 1982, pp. 12-18.

15. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. New York: Dover Publication, 1959. 226 p.

16. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyi analiz [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1984. 752 p.

17. Kultyshev S.Iu. Ob upravliaemosti lineinykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem [On the controllability of linear functional-differential systems]. *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniia i kraevye zadachi matematicheskoi fiziki: sbornik* (*Functional-differential equations and boundery value problems of mathematical physics (intercollegiate collection)*. Perm: Perm Polytechnic Institute Publ., 1978, pp. 174-178.

Статья получена: 20.04.2021

Статья принята: 30.09.2021

Сведения об авторах

Култышев Сергей Юрьевич (Пермь, Россия) – старший научный сотрудник научно-исследовательского центра функционально-дифференциальных уравнений, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kultyshev.su@yandex.ru).

Култышева Людмила Михайловна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kultysheva.lm@yandex.ru).

About the authors

Sergei Iu. Kultyshev (Perm, Russian Federation) – Senior Researcher, Science Research Centre "Functional-Differential Equations", Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, e-mail: kultyshev.su@yandex.ru).

Liudmila M. Kultysheva (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, e-mail: kultysheva.lm@yandex.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Култышев, С.Ю. Об управляемости линейных эволюционных функционально-дифференциальных систем / С.Ю. Култышев, Л.М. Култышева. – текст: непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.02 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2021. – № 3. – С. 35–59.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Об управляемости линейных эволюционных функционально-дифференциальных систем // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – № 3. – С. 35–59. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.02

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M. On the controllability of linear evolutionary functional-differential systems. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2021, no. 3, pp. 35-59. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.3.02