

DOI: 10.15593/2499-9873/2021.02.01

УДК536.2.01

А.С. Степашкина

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

**МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
ТВЕРДОГО ТЕЛА АСИМПТОТИЧЕСКИМ
МЕТОДОМ**

Для решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье применяют метод разделения переменных, с учетом граничных условий сводят решение проблемы к задаче Штурма – Лиувилля. Хорошо также известен операторный метод, решение уравнения теплопроводности помощью функции Грина. Предложен метод решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье асимптотическим методом с помощью преобразования Лапласа и применения в дальнейшем для образа функции разложения в ряд Лорана для твердотельной сплошной пластины. Получена теоретическая зависимость изменения температуры от времени, на которой можно выделить два участка: начальный – линейный, на больших значениях времени – нелинейный. С использованием асимптотического разложения предложены выражения для определения коэффициента теплопроводности твердого тела и коэффициента теплоотдачи твердого тела окружающей среде, а также методика определения термодинамических параметров твердого тела.

Проведен эксперимент, в котором предварительно нагретое твердое тело погружают в калориметрическую камеру, заполненную водой меньшей температуры. Нагретое твердое тело отдает теплоту воде. С помощью термодатчиков получают зависимость температуры воды от времени, определяют линейный и нелинейные участки изменения температуры. Далее по полученным теоретическим выражениям находят значения коэффициента теплопроводности твердого тела и коэффициент теплоотдачи твердого тела воде. Показано, что по модели, предложенной в работе, экспериментально определенные значения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости для медной пластины близки к известным табличным значениям. При этом расчетные и табличные значения коэффициента теплоотдачи меди воде имеют существенную разницу, что требует дополнительных исследований.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье, коэффициент теплопроводности, коэффициент теплоотдачи, теплоемкость, ряд Лорана, преобразование Лапласа, твердое тело, тепловой поток, нестационарный процесс, асимптотический метод.

A.S. Stepashkina

State University of Aerospace Instrumentation,
Saint-Petersburg, Russian Federation

MODELING OF THERMODYNAMIC PARAMETERS OF SOLIDS BY THE ASYMPTOTIC METHOD

In this work to solve the differential equation of heat conduction we use the separation method taking into account the boundary conditions. The solution of the problem is reduced to the Sturm-Liouville theory. There are other well-known methods for solving the differential equation of heat conduction: the operator method, the solution of the heat equation using the Green's function. We propose a method for solving the differential equation of heat conduction by the asymptotic method using the Laplace transform and further Laurent expansion of a function for a solid plate. A theoretical dependence of the temperature on time is obtained which has two sections: the initial one is linear and at large times it is nonlinear. Using the asymptotic expansion we propose expressions for determining the coefficient of thermal conductivity of a solid and the coefficient of heat transfer of a solid to the environment as well as a method for determining the thermodynamic parameters of a solid.

An experiment was carried out where a preheated solid is immersed in a calorimetric chamber filled with water of lower temperature. The heated solid gives off heat to the water. With the help of thermocouples the dependence of water temperature on time is obtained, linear and nonlinear sections of temperature changes are determined. Further using the obtained theoretical expression the values of the thermal conductivity coefficient of a solid and the heat transfer coefficient of a solid to water are found. It is shown that, according to the model proposed in the work, the experimentally determined values of the thermal conductivity coefficient and specific heat capacity for a copper plate are close to the known tabular values. At the same time, the calculated and tabulated values of the heat transfer coefficient of copper to water have a significant difference, which requires additional research.

Keywords: differential heat equation, thermal conductivity coefficient, heat transfer coefficient, heat capacity, Laurent series, Laplace transform, solid state, heat flow, nonstationary process, asymptotic method.

Введение

Классически уравнение теплопроводности Фурье [1] широко используется для описания процессов теплопереноса в различных сферах [2–4]. Традиционным методом решения уравнения является метод разделения переменных, с представлением искомой функции в виде произведения двух функций: функции координат и функции времени. Задачу сводят к решению двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. С учетом граничных условий получают задачу Штурма – Лиувилля [5]. В основе решения многих задач моделирования и прогнозирования процесса теплопереноса лежит решение дифференциального уравнения Фурье, найденное с помощью именно такого метода [6, 7].

Для решения неоднородной краевой задачи используют функцию Грина, представляющую собой линейный дифференциальный оператор, действующий на обобщенную функцию в евклидовом пространстве [8]. С помощью операторного исчисления также находят решение краевых задач [9].

Закон Фурье хорошо описывает многие практические задачи теплопроводности на макроскопическом уровне, однако зачастую использование закона Фурье на микро- и наномасштабе [10, 11], в случае быстропротекающих процессов [12], для материалов композиционных [13], со сложной структурой [14, 15] затруднительно. Существуют различные современные методы описания теплопроводности вне закона Фурье: модели с задержкой, фоновые модели, термомассовые модели [16, 17]. В самом простом случае при предварительном анализе достаточно ограничиться нулевым приближением, а именно решением уравнения теплопроводности Фурье для нахождения реальных физических параметров объектов.

Цель работы – описать экспресс-метод определения коэффициента теплопроводности неизвестного материала и коэффициента теплоотдачи в классическом уравнении Фурье. Обычно для определения указанной величины используют дорогостоящее и громоздкое оборудование.

В работе приведено решение уравнения теплопроводности асимптотическим методом на базе преобразования Лапласа и разложения полученной функции в ряд Лорана, что позволяет рассмотреть почленно процесс остывания тела.

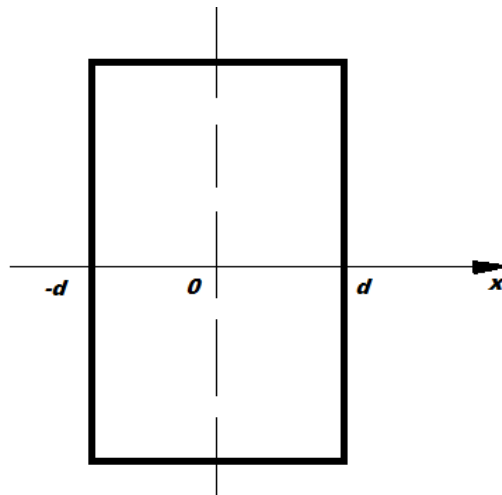


Рис. 1. Плоское тело, помещенное в жидкую среду

Рассмотрим классическую задачу остывания (нагрева) тела в некоторой термоизолированной среде, например жидкости в калориметрической камере (сосуде Дюара), с общей теплоемкостью C_p , в которой помещено исследуемое однородное твердое тело толщиной $2d$ и площадью боковой поверхности $2A$, причем $d^2 \ll A$ (рис. 1), с объемной плотностью изобарной теплоемкости $c = c_p \rho$, нагретое в печи до температуры T_0 . Предварительная температура среды Θ_0 . После опускания тела в данную среду температура среды $\Theta(t)$ будет меняться, пока окончательно не установится до значения

$$\Theta_{\text{кон}} = \frac{c_T T_0 + c_p \Theta_0}{c_T + c_p}, \quad (1)$$

где $C_T = 2cAd$.

1. Решение дифференциального уравнения теплопроводности Фурье

Рассмотрим одномерную плоскую задачу. Пусть тепловой поток распространяется в одном направлении оси Ox твердотельной пластины шириной $2d$, находящейся в однородной среде. Соответственно, для описания теплового потока достаточно решить следующую одномерную симметричную задачу теплопроводности:

$$\frac{dT(t, x)}{dt} = a \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$T|_{t=0} = T_0$$

и граничными условиями в силу симметрии

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

где a – коэффициент температуропроводности; T_0 – начальное значение температуры.

Задачу решим с использованием преобразования Лапласа [1] следующего вида:

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} e^{-st} T(t, x) dt,$$

где s – параметр Лапласа.

С учетом преобразования из уравнения (2) получаем

$$a\bar{T}_{xx}'' - (s\bar{T} - T_0) = 0. \quad (3)$$

Примем $\aleph^2 = \frac{s}{a}$. Таким образом, выражение (3) принимает вид

$$\bar{T}_{xx}'' - \aleph^2 \bar{T} = -\frac{T_0}{a}. \quad (4)$$

Решением полученного уравнения является следующая функция:

$$\bar{T}_d(x) = \frac{T_0}{s} + C_1 e^{-\aleph x} + C_2 e^{\aleph x}.$$

В силу граничных условий на границе $C_1 = C_2 = B(s)$, тогда

$$\bar{T}_d = \frac{T_0}{s} + B(e^{\aleph d} + e^{-\aleph d}).$$

Из стационарного уравнения Фурье имеем

$$\bar{q}_d = -\lambda \left. \frac{\partial \bar{T}_d}{\partial x} \right|_{x=d} = -\lambda B \aleph (e^{\aleph d} - e^{-\aleph d}).$$

С учетом непрерывности теплового потока

$$\bar{q}_d = \alpha(\bar{\theta} - \bar{T}_d),$$

где α – коэффициент теплоотдачи от твердотельной пластины окружающей среде; θ – температура однородной окружающей среды.

Количество теплоты Q , полученное окружающей средой от нагретого тела,

$$\begin{cases} dQ = C_p d\theta; \\ dQ = 2A\bar{q}dt, \end{cases} \quad (5)$$

где \bar{q} – поток на поверхности; A – площадь поверхности пластины; C_p – теплоемкость окружающей среды; θ – температура.

Из системы (5) получаем

$$C_p d\theta = 2Aq_d dt;$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{Aq_d}{c_p}.$$

Применив преобразование Лапласа, получаем

$$s\bar{\theta} - \theta_0 = 2 \frac{A\bar{q}_d}{C_p} = -2 \frac{A}{C_p} - \lambda B \aleph (e^{\aleph d} - e^{-\aleph d}).$$

Запишем систему уравнений на внутренней границе $d=0$ тела:

$$\begin{cases} \bar{q}_d = -\lambda B \aleph (e^{-\aleph d} - e^{\aleph d}); \\ \bar{T}_d = \frac{T_0}{s} + B(e^{-\aleph d} + e^{\aleph d}). \end{cases} \quad (6)$$

Определим из системы (6)

$$\bar{T}_d - \frac{T_0}{s} = -\frac{\text{cth}(\aleph d)}{\lambda \aleph}.$$

Удостоверимся с помощью теории о предельных значениях, что при $t \rightarrow \infty$ предельное значение температуры будет соответствовать известному соотношению (1). Решая совместно систему уравнений (6) и уравнения теплового баланса (5), окончательно определим лапласово изображение температуры окружающей среды $\bar{\Theta}(s)$ в предположении ее изотермичности в виде

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta_0 + \frac{\Theta_0 \alpha}{\lambda \aleph} \text{cth}(\aleph d) + \frac{T_0}{s} \frac{2A\alpha}{C_p}}{s + \frac{2A\alpha}{C_p} + \frac{as}{\lambda \aleph} \text{cth}(\aleph d)}, \quad (7)$$

причем $a = \frac{\lambda}{c}$.

Представим выражение (7) в виде

$$\bar{\Theta}(s) = \frac{\Theta_0}{s} + \Delta T \varphi(s), \quad (8)$$

где ΔT – разница начальных значений температуры, $\Delta T = T_0 - \Theta_0$.

При этом $\varphi(s)$ имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{C_p s}{2A\alpha} + \frac{C_p s}{2A\aleph\lambda} \operatorname{cth}(\aleph d))}.$$

Запишем оригинал в виде ряда Лорана [4]:

$$\varphi(s) = \frac{\Phi_0}{s} + \frac{\Phi_1}{s^2} - \frac{\Phi_2}{s^{5/2}} + \dots$$

Перейдя обратно к оригиналам, имеем следующее асимптотическое представление для температуры (8) окружающей среды в виде

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \varphi_1 t \Delta T - \frac{4}{3} \varphi_2 \frac{\alpha}{\sqrt{l\lambda\pi}} t^{3/2} \Delta T,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{2A\alpha}{C_p}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \frac{\alpha d}{\sqrt{c_p \lambda}}, \quad (9)$$

где C_p – теплоемкость окружающей среды; d – толщина образца.

Из уравнений (9) найдем значение коэффициента теплоотдачи от твердого тела окружающей среде:

$$\alpha = \frac{\varphi_1 C_p}{2A}, \quad (10)$$

и теплопроводности:

$$\lambda = \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right)^2 \frac{\alpha^2 d^2}{c_p}. \quad (11)$$

2. Практическое определение термодинамических параметров твердого тела асимптотическим методом

Применим результаты решения задачи, выражения (10) и (11), на практике для определения коэффициента теплоотдачи от твердого тела окружающей среде и коэффициента теплопроводности твердого тела. Для этого воспользуемся установкой, состоящей из калориметрической

камеры 1 с герметичной крышкой 2 и термопарами 5, схема установки представлена на рис. 2. Исследуем теплофизические свойства твердотельной медной пластины (медь марки М00), образца 3, с площадью поверхности $A = 0,3 \text{ м}^2$. Предварительно нагреем пластину до температуры $T^* = 373 \text{ К}$ в тепловой камере в течение 30 мин.

В качестве примера рассмотрим калориметрическую камеру 1, заполненную водой температурой $\Theta_0 = 294 \text{ К}$. Вода будет играть роль внешней среды, в которой осуществляется процесс распространения теплоты. В воду поместим предварительно нагретое твердое тело. Закроем калориметрическую камеру герметичной крышкой с тремя термопарами и крыльчаткой, которая медленно перемешивает жидкость, что способствует равномерному распределению температуры в объеме. Термопары измеряют температуру воды в зависимости от времени в трех точках. Полученная информация передается на цифровое устройство 6, на экране которого выводится график зависимости температуры от времени. Измерения проводят до достижения постоянного значения температуры воды $T^{**} = 305 \text{ К}$.

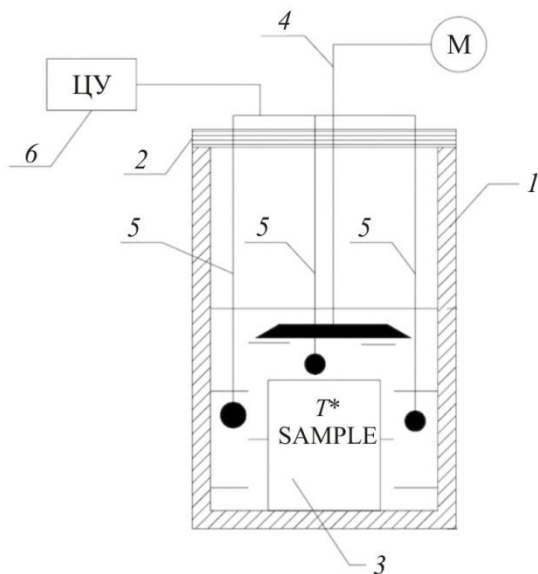


Рис. 2. Установка для определения термодинамических параметров асимптотическим методом: 1 – калориметрическая камера; 2 – герметичная крышка; 3 – исследуемый образец; предварительно нагретый до температуры T^* ; 4 – крыльчатка; 5 – термопары; 6 – цифровое устройство

Полученный график зависимости температуры от времени (рис. 3) имеет два участка:

- линейный $T_1 = 7 \text{ К}$, $t_1 = 150 \text{ с}$ ($\varphi_1 = 0,006 \text{ 1/с}$);
- нелинейный $T_2 = 7 \text{ К}$, $t_2 = 1200 \text{ с}$ ($\varphi_2 = 0,0008 \text{ 1/с}$).

Аппроксимация линейного отрезка кривой осуществляется с помощью функции $y = kx + b$. По двум первым ближайшим точкам определяются коэффициенты k и b , построение прямой ведется до тех пор, пока кривая соответствует линейной с точностью до целых. На рис. 3 синей линией отмечен линейный участок зависимости.

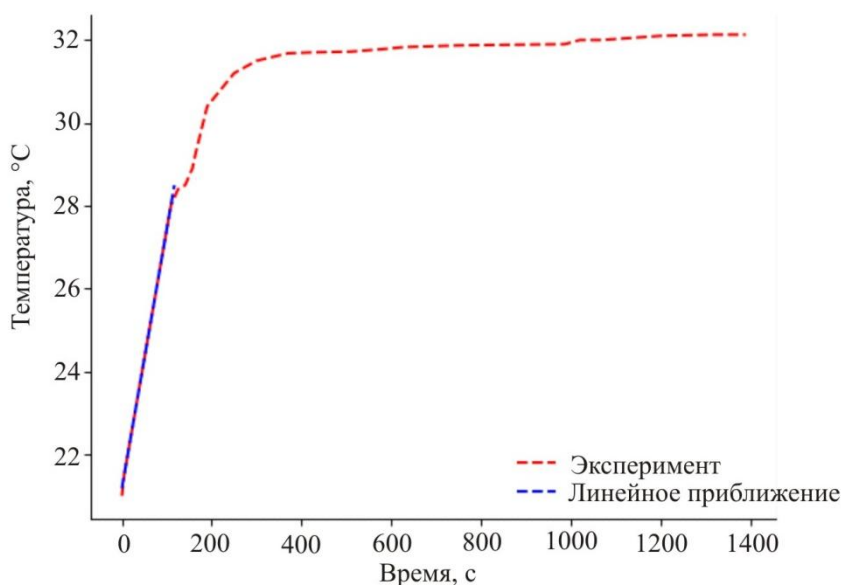


Рис. 3. График зависимости температуры от времени для медной пластины (медь марки М00)

Коэффициент теплоотдачи от медной пластины воде рассчитываем в соответствии с выражением (10).

Известно, что количество теплоты, отданное телом воде при охлаждении, равно количеству теплоты, полученному водой. Получаем

$$Cm(T^* - T^{**}) = C_w m_w (\Theta_0 - T^{**}), \quad (12)$$

где C_w – теплоемкость воды, $C_w = 4183 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Из выражения (12) находим значение теплоемкости твердого тела по формуле

$$C = \left| \frac{4183m_w (\Theta_0 - T^{**})}{m(T^* - T^{**})} \right|.$$

Коэффициент теплопроводности находим в соответствии с выражением (11). Полученные значения теплопроводности и теплоемкости близки табличным значениям (таблица). При этом расчетное и табличные значения коэффициента теплоотдачи меди воде имеют существенную разницу, что требует дополнительных исследований.

Сравнение экспериментально полученных значений для меди с известными табличными величинами

| Параметр | Табличные значения для меди марки М00 [18] | Значения параметров, полученные асимптотическим методом |
|---|--|---|
| Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К) | 394 | 392 |
| Коэффициент теплоотдачи меди воде, Вт/(м ² ·К) | 12 | 40 |
| Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К) | 386 | 370 |

Заключение

В работе решено уравнение теплопроводности Фурье с граничными условиями третьего рода для двухмерной твердотельной сплошной пластины асимптотически с помощью преобразования Лапласа. Образ функции разложен в ряд Лорана. В результате преобразований получены выражения для термодинамических параметров: теплопроводности и теплоотдачи от твердого тела окружающей среде. Таким образом, полученное решение дифференциального уравнения Фурье может быть использовано в качестве тестового метода для проверки более сложных нестационарных моделей.

Практическим результатом работы является предложенный экспериментальный метод, позволяющий одновременное измерение теплоемкости, теплопроводности и теплоотдачи твердого тела в разных температурных условиях. Нагретое твердое тело опускают в калориметрическую камеру, заполненную водой меньшей температуры. Контролируют изменение температуры в калориметрической камере во

времени, информация записывается на цифровое устройство. Далее экспериментально определяют линейный и нелинейные участки изменения температуры. По теоретическим выражениям, являющимся результатом асимптотического разложения, находят значения термодинамических параметров. Полученные значения термодинамических параметров, в частности коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости для медной пластины, близки заявленным.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
2. A generalized heat conduction model of higher-order time derivatives and three-phase-lags for non-simple thermoelastic materials / A.E. Abouelregal, K.M. Khalil, F.A. Mohammed [et al.] // *Scientific Reports*. – 2020. – Vol. 10. – Art. 1362. DOI: 10.1038/s41598-020-70388-1
3. Tsapko Yu.V., Tsapko A.Yu., Bondarenko O.P. Modeling of thermal conductivity of reed products // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 907. – URL: <https://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/907/1> (accessed 18 January 2021).
4. Ginzburg V.V., Yang J. Modeling the thermal conductivity of polymer-inorganic nanocomposites // *Springer Series in Materials Science [Theory and Modeling of Polymer Nanocomposites]*. – 2021. – Vol. 310. – P. 235–257. DOI: 10.1007/978-3-030-60443-1_9
5. Кирсанов Ю.А. Некоторые проблемы явления теплопроводности // *Известия РАН. Энергетика*. – 2005. – № 6. – С. 51–58.
6. Белова О.В., Корнеева М.А., Мустафина Д.А. Численное моделирование процессов теплообмена в твердотельном термостатирующем устройстве // *НТВ СПбГУ ИТМО*. – 2008. – № 57. – С. 3–12.
7. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплообмена // *Теплофизика высоких температур*. – 2019. – Т. 57, № 5. – С. 695–701.
8. Карташов Э.М., Кротов Г.С. Функция Грина в задаче нестационарной теплопроводности в области с границей, движущейся по корневой зависимости // *Известия РАН. Энергетика*. – 2006. – № 4. – С. 134–150.
9. Global solution and exponential stability for a laminated beam with fourier thermal law / C. Paposo, C. Nonato, O. Villagrano, J. Chuaiipoma // *Journal of Partial Differential Equations*. – 2020. – Vol. 33, no. 2. – P. 142–155.
10. Nanoscale thermal transport / D.G. Cahill, W.K. Ford, K.E. Goodson, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, R. Merlin, S.R. Phillpot // *Journal of Applied Physics*. – 2003. – Vol. 93, iss. 2. – P. 793–818. DOI: 10.1063/1.1524305

11. Хвесьюк В.И., Скрыбин А.С. Теплопроводность наноструктур // Теплофизика высоких температур. – 2017. – Т. 55, № 3. – С. 447–471.
12. Temperature distribution in different materials due to short pulse laser irradiation / A. Bannerjee, A.A. Ogale, C. Das, K. Mitra, C. Subranian // Heat Transfer Engineering. – 2005. – Vol. 26, no 8. – P. 41–46.
13. Thermal conductivity modeling for composite polypropylene / vapor grown carbon fibers / A.S. Stepashkina, E.S. Tsobkallo, O.A. Moskalyuk, M.Yu. Egorov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 643. – Art. 012042. – 6 p. DOI: 10.1088/1757-899X/643/1/012042
14. Grassman A., Peters F. Experimental investigation of heat conduction in wet sand // Heat Mass Transfer. – 1999. – Vol. 35. – P. 289–294.
15. Alvarez F.X., Cimmelli V.A., Sellitto A. Mesoscopic description of boundary effects in nanoscale heat transport // Nanoscale Systems. – 2012. – No. 1. – P. 112–142.
16. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. – 1997. – Т. 167, № 10. – С. 1095–1106.
17. Жмакин А.И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // Журнал технической физики. – 2021. – Т. 21, вып. 1. – С. 5–25.
18. Коршунова Т.Е. Медь и медные сплавы. – М.: Инфра-Инженерия, 2020. – 156 с.

References

1. Tikhonov A.N., Savarskiy A.A. *Equation of Mathematical Physics*. 1999, 799 p.
2. Abouelregal A.E., Khalil K.M., Mohammed F.A., et al. A generalized heat conduction model of higher-order time derivatives and three-phase-lags for non-simple thermoelastic materials. *Scientific Reports*, 2020, vol. 10, DOI: 10.1038/s41598-020-70388-1.
3. Tsapko Yu.V., Tsapko A.Yu., Bondarenko O.P. Modeling of thermal conductivity of reed products. *IOP Publishing Ltd IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 907, available at: <https://iopscience.iop.org/issue/1757-899X/907/1> (accessed 18 January 2021).
4. Ginzburg V.V., Yang J. Modeling the Thermal Conductivity of Polymer-Inorganic Nanocomposites. Springer Series in Materials Science [Theory and Modeling of Polymer Nanocomposites], 2021, vol. 310, pp. 235–257. DOI: 10.1007/978-3-030-60443-1_9
5. Kirsanov A.Yu. Some Problems of the phenomenon of thermal conductivity. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Energy*, 2005, no. 6, pp. 51–58.
6. Belova O.V., Korneeva M.A., Mustafina D.A. Numerical Modeling of Heat Transfer Processes in a Solid State Thermostatic Device. *Scientific and tech-*

nicol newsletter of St.Petersburg State University of Informational Technologies, Mechanics and Optics, 2008, no. 57, p. 3–12.

7. Kartashov E.M. Thermal conductivity with a variable heat transfer coefficient. *Thermal physics of high temperatures*, 2019, vol. 57, no. 5, p. 695–701.

8. Kartashov E.M. Krotov G.S. Green's function in the problem of nonstationary heat conduction in a domain with a boundary moving along the root dependence. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Energy*, 2006, no. 4, p. 134–150.

9. Paposo C., Nonato C., Villagrano O. Chuauipoma J. Global Solution and Exponential stability for a Laminated Beam with Fourier Thermal Law. *Journal of Partial Differential Equations*, 2020, vol. 33, no. 2, p. 142–155.

10. Cahill D.G., Ford W.K., Goodson K.E., et al. Nanoscale thermal transport. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, iss. 2, pp. 793–818. DOI 10.1063/1.1524305.

11. Khvesyuk V.I., Skryabin A.S. Thermal conductivity of nanostructures. *Thermal physics of high temperatures*, 2017, vol. 55, no. 3, pp. 447–471.

12. Bannerjee A., Ogale A.A., Das C., Mitra K., Subranian C. Temperature distribution in different materials due to short pulse laser irradiation. *Heat Transfer Engineering*, 2005, vol. 26, no. 8, pp. 41–46.

13. Stepashkina A.S., Tsobkallo E.S., Moskalyuk O.A., Egorov M.Yu. Thermal conductivity modeling for composite polypropylene / vapor grown carbon fibers. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, Vol. 643, art. 012042. 6 p. DOI: 10.1088/1757-899X/643/1/012042

14. Grassman A., Peters F. Experimental investigation of heat conduction in wet sand. *Heat Mass Transfer*, 1999, vol. 35, p. 289–294.

15. Alvarez F.X., Cimmelli V.A., Sellitto A. Mesoscopic description of boundary effects in nanoscale heat transport. *Nanoscale Systems*, 2012, no. 1, pp. 112–142.

16. Sobolev S.L. Locally nonequilibrium models of transport processes. *Physics-Uspekhi*, 1997, vol. 67, no. 10, p. 1095–1106.

17. Zhmakin A.I. Thermal conductivity beyond the limits of Fourier's law. *Journal of technical physics*, 2021, vol. 21, no. 1, p. 5–25.

18. Korshunova T.E. *Copper and copper alloys*, 2020, 156 p.

Статья получена: 18.01.2021

Статья принята: 02.06.2021

Сведения об авторе

Степашкина Анна Сергеевна (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Метрологическое обеспечение инноваци-

онных технологий и промышленной безопасности», Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, e-mail: stepashkina.anna@yandex.ru).

About the author

Anna S. Stepashkina (Saint Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Department of Metrological Support of Innovation Technologies and Industrial Security, State University of Aerospace Instrumentation (67, Bolshaya Morskaya st., Saint Petersburg, 190000, e-mail: stepashkina.anna@yandex.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Степашкина, А.С. Методика определения и моделирования термодинамических параметров твердого тела асимптотическим методом / А.С. Степашкина. – текст: непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.01 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2021. – № 2. – С. 9–22.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Степашкина А.С. Методика определения и моделирования термодинамических параметров твердого тела асимптотическим методом // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – № 2. – С. 9–22. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Stepashkina A.S. Modeling of thermodynamic parameters of solids by the asymptotic method. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2021, no. 2, pp. 9–22. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.01 (in Russian)