

DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.10

УДК 330.43:336.763

Р.В. Гарафутдинов

Пермский государственный национальный
исследовательский университет, Пермь, Россия

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДОХОДНОСТИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Настоящая статья продолжает исследования в рамках научного направления по экономфизике на кафедре информационных систем и математических методов в экономике экономического факультета ПГНИУ.

Описывается способ формирования инвестиционных портфелей из четырех активов на основе прогнозных доходностей, полученных с применением эконометрических моделей с длинной памятью, и проверяется гипотеза о том, что оптимизация структуры портфеля по прогнозным доходностям, полученным с помощью таких моделей (на примере ARFIMA), позволяет улучшать характеристики портфеля в сравнении с оптимизацией по историческим доходностям. Для апробации способа и проверки гипотез сформированы различные варианты портфелей из четырех финансовых инструментов.

В ходе исследования получены следующие результаты. Параметры портфелей при оптимизации по прогнозным данным в среднем не ухудшаются и в ряде случаев улучшаются, потому что оптимизатор чаще определяет наиболее доходные активы и придает им больший вес. Определение наиболее доходных активов на основе прогнозных доходностей оптимизатору удается лучше, чем наименее рискованных, потому что авторегрессионные модели предсказывают тенденцию развития показателя, а не его волатильность.

Сформулированы возможные направления дальнейших исследований: усовершенствование методики, а именно: выполнение предпрогнозного фрактального анализа рядов, наложение более жестких ограничений по риску, применение других прогнозирующих моделей, ребалансировка портфеля; проведение исследований на данных фондового рынка США, заведомо более развитого в сравнении с российским; использование в качестве бенчмарка для оценки эффективности портфелей фондовых индексов.

Ключевые слова: российский фондовый рынок, инвестиционный портфель, современная портфельная теория, прогнозирование доходности, волатильность, фрактальный анализ, модели с длинной памятью, ARFIMA, задача оптимизации, Python, R.

R.V. Garafutdinov

Perm State University, Perm, Russian Federation

APPLICATION OF THE LONG MEMORY MODELS FOR RETURNS FORECASTING IN THE FORMATION OF INVESTMENT PORTFOLIOS

This paper continues research within the framework of the scientific direction in econophysics at the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics of the faculty of Economics of PSU.

This paper describes the method of formation investment portfolios of four assets based on forecasted returns obtained using long memory econometric models and tests the hypotheses that the optimization of portfolio structure by forecasted returns obtained using such models (by the example of ARFIMA) allows to improve portfolio characteristics in comparison to the optimization by historical returns. Different variants of portfolios of four financial instruments were formed to test the method and test the hypotheses.

The study obtained the following results. Portfolio parameters do not deteriorate, on average, when optimized by forecasted data and, in some cases, they improve because the optimizer identifies the most profitable assets more often and gives them more weight. The optimizer is better at identifying the most profitable assets based on the forecasted returns than the least risky ones because the autoregressive models predict the trend of the index rather than its volatility.

Finally in the paper there are formulated the possible directions for further research: improving the methodology, namely, performing preliminary fractal analysis of series, imposing stricter restrictions on risk, using other forecasting models, rebalancing the portfolio; conducting research on data from the U.S. stock market, which is certainly more developed in comparison with Russia; using stock indices as a benchmark for assessing the effectiveness of portfolios.

Keywords: russian stock market, investment portfolio, modern portfolio theory, return forecasting, volatility, fractal analysis, long memory models, ARFIMA, optimization problem, Python, R.

Введение

Одним из важнейших способов получения дохода в условиях рыночной экономики является инвестирование, которое подразумевает отказ от текущего потребления с целью получения прибыли в будущем. Слабая (относительно западных) развитость российского фондового рынка, несбалансированность его структуры в пользу нефтегазового сектора, металлургии и финансов и недоверие частных инвесторов к небанковским финансовым посредникам ограничивают возможности экономики по привлечению свободных средств. При этом «стратегия портфельного инвестирования ... показывает свою эффективность и на российском рынке: составленные на ее основе простейшие портфели демонстрируют показатели доходности, превосходящие доходность большинства входящих в них классов активов, при этом риски портфелей могут быть достаточно низкими» [1, с. 75]. В современных условиях важную роль приобретает разработка инновационных методов формирования портфелей, способных предоставить более точный прогноз финансового результата.

Несмотря на свой солидный возраст, широко применяемой до сих пор остается теория инвестиционного портфеля за авторством Г. Марковица, развитая У. Шарпом, Дж. Тобином, Ф. Блэком и другими, основанная на максимизации доходности инвестиций при минимизации риска. Ожидаемая величина доходности выражается математическим ожиданием исторических значений доходности, а величина риска – стандартным отклонением доходности [2]. Можно выделить две важнейшие задачи, стоящие перед портфельным инвестором: 1)

отбор слабосвязанных между собой активов с перспективами роста; 2) подбор такой структуры портфеля, которая максимизирует его предполагаемые характеристики в зависимости от целей инвестора (максимальная доходность при заданном уровне риска или минимальный риск при заданном уровне доходности). Решение первой задачи является сложным процессом и основано на изучении конъюнктуры рынка, диверсификации эмитентов ценных бумаг по отраслям экономики, предпочтениях инвестора, его интуиции и других не всегда строго формализуемых моментах. Выбор же структуры портфеля достигается применением математических методов оптимизации, в результате чего подбираются доли активов в портфеле, обеспечивающие наилучшие значения его показателей, рассчитанных по прошлым (историческим) доходностям активов. При этом предполагается, что в будущем вероятностные характеристики цен этих активов (математическое ожидание, стандартное отклонение) останутся неизменными, цены будут вести себя похожим образом.

Однако инвесторов интересует не прошлая доходность, а будущая. Практически, оптимизированный по историческим значениям цен портфель окажется оптимальным лишь в том случае, если будущая динамика доходностей будет представлять собой константу. Конечно, в реальной жизни, в условиях нестабильной экономики, динамично меняющихся рыночных условий, финансовых кризисов такая предпосылка невыполнима. Известно, что финансовые ряды нестационарны, ряды их доходностей обладают свойством кластеризации волатильности, наличием длинной памяти, распределением с «тяжелыми хвостами», масштабной инвариантностью [3]. За прошедшие более чем полвека с открытия Марковица, во-первых, произошли существенные изменения в экономике промышленно развитых стран, возник единый международный рынок, к традиционному набору финансовых инструментов (акции, облигации, валюта) добавились новые, такие как производные инструменты (фьючерсы, опционы, депозитарные расписки) и криптовалюты. Во-вторых, сама экономическая наука, в том числе ее раздел, посвященный исследованию финансовых рынков, шагнула далеко вперед, были накоплены гигантские массивы эмпирических данных, что обусловлено переходом торгов на финансовых рынках в электронную форму, выявлены новые закономерности в поведении финансовых процессов, выдвинута теория рынка, основанная на положениях фрактальной геометрии. При этом в области портфельного инвестирования по-прежнему широко распространены идеи прошлого века, характери-

зующиеся консервативным взглядом на природу и специфику поведения финансовых рынков.

Нами было выдвинуто предположение, что если экстраполировать ряды доходностей активов, входящих в портфель, и при оптимизации вычислять целевой функционал не по историческим доходностям, а по прогнозным, используя для предсказания фрактальные эконометрические модели (на примере модификации интегрированной модели авторегрессии – скользящего среднего с длинной памятью, ARFIMA), то полученные портфели должны обладать более привлекательными характеристиками (большей доходностью при меньшем риске), чем при применении классической модели средней дисперсии. Таким образом, целями исследования являются разработка и апробация методики формирования инвестиционных портфелей на базе прогнозных доходностей и сравнение портфелей, полученных таким способом, с портфелями, оптимизированными по историческим данным. В рамках исследования предполагается проверить гипотезу о том, что оптимизация портфеля по прогнозным доходностям, полученным с помощью моделей с длинной памятью (на примере ARFIMA), улучшает их характеристики (доходность, риск).

Прежде чем приступить к изложению методики исследования, следует начать с теоретического обзора, включающего анализ результатов предыдущих исследований и описание примененных в настоящем исследовании методов.

1. Теоретический обзор

Вопросами применения и развития теории портфельного инвестирования занимались многие исследователи. В работе Д.Д. Буркальцевой и И.Л. Ногас [4] формируются портфели на основе моделей Г. Марковица и У. Шарпа, делается вывод о большей эффективности и меньшей трудоемкости последней. Также в качестве недостатка моделей указывается то, что они основываются на исторических данных деятельности рынка и могут приводить к погрешностям в условиях нестабильности и кризиса. А.А. Халяпин и другие в статье [5] применяют модель Дж. Тобина для формирования портфеля ценных бумаг компаний, специализирующихся на сырьевой добыче. В качестве критерия отбора активов в портфель авторами использована информация о выплатах дивидендов эмитентами, что, с нашей точки зрения, является достаточно ненадежным способом отбора инвестиционно привлекательных

тельных активов, потому что для российских компаний существует высокий риск невыплаты дивидендов по решению акционеров. W. Chun и другие в статье [6] расширяют модель средней дисперсии за счет использования детрендированного кросс-корреляционного анализа (DCCA). Делается вывод, что модель портфеля Mean-DCCA более благоприятна для инвесторов в условиях фрактального рынка. В рассмотренных работах портфели неизменно формируются на основе информации об исторических доходностях активов. Есть исследования, основанные на неклассических подходах к формированию портфеля. Так, в статье И.Ю. Выгодчиковой и группы авторов [7] предложена модель формирования инвестиционного портфеля с использованием минимаксного критерия, которая может использоваться, когда традиционные модели портфельного инвестирования неприменимы ввиду отсутствия требуемых для построения модели динамических рядов оцениваемых показателей доходности. В.Н. Михно предложена модель максимальной энтропии для формирования портфеля, предъявляющая более низкие по сравнению с известными подходами требования к исходным данным; в качестве доступной информации модель использует лишь диапазоны возможных значений целевого показателя (дисперсии, математического ожидания) для каждого рассматриваемого актива [8]. Ряд работ [9–11] посвящен подходу к решению задачи выбора активов, «согласно которому в портфель включаются активы, обладающие наиболее стабильной и предсказуемой динамикой среди прочих, а индикатором стабильности являются фрактальные показатели» [11, с. 80]. Результаты исследований этой гипотезе не противоречат; как утверждается в последней из упомянутых статье, фрактальная размерность ценовых рядов активов может служить более надежным критерием отбора, чем корреляция и диверсифицированность по отраслям экономики. Таким образом, существует многообразие методик формирования портфеля, в том числе и основанных на применении сложных математических методов, при этом проведенный анализ литературы показал, что оптимизация структуры портфеля по экстраполированным с помощью фрактальных моделей рядам доходности не применяется.

Для прогнозирования динамики курсов финансовых инструментов используется множество методов. Согласно мнению некоторых авторов, наиболее адекватный математический аппарат для исследования сложного поведения финансовых показателей был разработан на основе фрактальной теории [12, с. 147]. Существуют расширения широко используемых эконометрических моделей (таких как линейная

ARIMA, нелинейная GARCH), учитывающие фрактальные свойства рыночных временных рядов. Исследования показали более высокую эффективность таких моделей в сравнении с классическими [13; 14]. Применению фрактального анализа для прогнозирования финансовых рядов уделяется не так много внимания. Данной проблемой занимались G. Sarogale и другие [15], S. Zhelyazkova [16], П.М. Симонов и Р.В. Гарафутдинов [13]. В данных работах показано, что финансовые ряды обладают длинной памятью и могут хорошо описываться различными фрактальными модификациями эконометрических моделей. В последней из перечисленных работ на большом массиве данных продемонстрированы преимущества таких моделей перед классическими в точности получаемых прогнозов. Ввиду этого, с нашей точки зрения, их применение для прогнозирования рядов доходностей активов в портфеле выглядит оправданным.

Прежде чем переходить к методике исследования, кратко опишем модель оптимального инвестиционного портфеля Г. Марковица, модифицированную для использования прогнозных доходностей, и прогнозирующую модель ARFIMA.

2. Модель портфеля с применением прогнозных доходностей

Классическая модель Марковица [2] широко известна и многократно описана в научной литературе. Согласно ей основными числовыми характеристиками доходности актива являются его математическое ожидание r и стандартное отклонение σ . Обозначим доходность портфеля как r_p , стандартное отклонение портфеля как σ_p . Существует еще один показатель качества портфеля – коэффициент Шарпа [17]. Он рассчитывается как отношение премии за риск к величине риска. В данном исследовании при его расчете мы не вычитали безрисковую ставку доходности, потому что наличие дополнительной константы в формуле показателя не дает преимуществ при решении задачи оптимизации и сравнении портфелей. В этом случае коэффициент Шарпа показывает долю доходности, приходящуюся на единицу риска, и его формула имеет вид

$$\text{Sh}_p = \frac{r_p}{\sigma_p}. \quad (1)$$

В нашем случае постановку задачи оптимизации портфеля можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} r_p \rightarrow \max; \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1; \\ \sigma_p \leq \sigma_{\max}; \\ w_i \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где n – количество активов в портфеле; w_i – доли активов; σ_{\max} – предельно допустимое значение риска портфеля. В классическом варианте модели в качестве доходностей r_t , $t = \overline{1, T}$, где T – количество рассматриваемых периодов, используются исторические доходности актива, известные на момент формирования портфеля. Величину исторической доходности актива обозначим r_{hist} , историческую доходность портфеля $r_{p \text{ hist}}$, исторический риск актива σ_{hist} , исторический риск портфеля $\sigma_{p \text{ hist}}$. В нашем исследовании оптимизация структуры портфеля осуществляется по прогнозным данным. Прогнозная доходность актива вычисляется по формуле

$$r_{\text{pred}} = \frac{1}{U} \sum_{t=T+1}^{T+U} r_{\text{pred } t}, \quad (3)$$

где U – длина прогнозного интервала; $r_{\text{pred } t}$ – предсказанная доходность в момент времени t . Прогнозная доходность портфеля определяется равенством

$$r_{p \text{ pred}} = \sum_{i=1}^n w_i r_{\text{pred } i}. \quad (4)$$

Прогнозный риск актива (ввиду относительно небольшого объема выборок используется несмещенная оценка стандартного отклонения)

$$\sigma_{\text{pred}} = \sqrt{\frac{1}{T+U-1} \sum_{t=1}^{T+U} \left(r_t - \left[\frac{T}{T+U} r_{\text{hist}} + \frac{U}{T+U} r_{\text{pred}} \right] \right)^2}, \quad (5)$$

где

$$r_t = \begin{cases} r_{\text{hist } t}, & t = \overline{1, T} \\ r_{\text{pred } t}, & t = \overline{T+1, T+U} \end{cases}. \quad (6)$$

В данном случае учитываются не только предсказанные значения доходности, но и совокупный ряд, включающий как исторические, так и предсказанные значения. Причина такого подхода состоит в том, что глубина прогноза может составлять один шаг, а стандартное отклонение по единственному наблюдению оценить невозможно. Прогнозный риск портфеля можно вычислить по формуле

$$\sigma_{p \text{ pred}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{\text{pred } i, j} w_i w_j \sigma_{\text{pred } i} \sigma_{\text{pred } j}}, \quad (7)$$

где $R_{\text{pred } i, j}$ – парный коэффициент корреляции Пирсона между доходностями i -го и j -го активов на интервале $\overline{1, T+U}$, т.е. между совокупными рядами доходностей активов, включающими как исторические, так и прогнозные значения.

Чтобы оценить качество сформированных портфелей, следует сравнивать их между собой по фактическим (реализованным) значениям доходности и риска. Эти величины рассчитываются по формулам (3)–(7) на тех же временных интервалах, но прогнозные значения заменены фактическими.

3. Модель с длинной памятью ARFIMA

Методика моделирования и прогнозирования с использованием данной модели описана в работе [13]. ARFIMA(p, d, q), или дробно-интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего порядков p, d, q является обобщением модели ARIMA (p, d, q). Ее вид:

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t, \quad (8)$$

где X_t – исследуемый процесс (временной ряд); L – оператор сдвига; $\Phi(L)$ – полином степени p от L ; $\Theta(L)$ – полином степени q от L ; d – порядок интегрирования процесса X_t . Параметры p, q могут принимать целые неотрицательные значения, d может принимать также дробные значения. Этот параметр аппроксимируется следующим рядом:

$$(1-L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)} L^k, \quad (9)$$

где Γ – гамма-функция. Параметры p , q модели позволяют моделировать эффекты короткой памяти, а параметр d – длинной. Он же позволяет учитывать фрактальные свойства моделируемого процесса.

Далее следует описать входные данные и изложить методику исследования.

4. Данные и методика исследования

В качестве инструментальных средств исследования использовался язык программирования Python 3.9 с набором библиотек для инженерных и научных расчетов `scipy`, `statsmodels`, `scikit-learn` и других, а также табличный процессор Microsoft Excel.

Исходными данными послужили котировки акций компаний, входящих в базу расчета индекса МосБиржи, – те же, что в работе [11]. Рассматривалась динамика цен активов с декабря 2008 г. по декабрь 2019 г. Было решено ограничиться 2019 г., чтобы не затрагивать период пандемии COVID-19, вызвавшей существенные структурные изменения мировой экономики. Количество активов с достаточной ценовой историей составило 21. Среди них обыкновенные и привилегированные акции российских компаний со следующими тикерами: AFLT, CHMF, FEES, GAZP, GMKN, LKOH, MAGN, MGNT, MTSS, NLMK, NVTK, PIKK, PLZL, ROSN, RTKM, SNGS, SNGSP, TATN, TATNP, TRNFP, UPRO. В качестве оптимизируемого показателя портфеля было принято значение его годовой доходности $r_{p \text{ year}}$. Источником данных о котировках финансовых инструментов послужил сайт «Финам.ру»¹. Данный веб-ресурс не дает возможности экспортировать данные о ценах активов с периодичностью год, поэтому были использованы месячные цены, по которым были вычислены месячные доходности активов по формуле

$$r_{\text{month}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (10)$$

где P_t – цена закрытия актива на начало месяца; P_{t-1} – цена закрытия актива на начало предыдущего месяца. Годовые доходности были восстановлены на основе месячных по формуле

$$r_{\text{year}} = \prod_{t=1}^{12} (1 + r_{\text{month } t}) - 1. \quad (11)$$

¹ Финам.ру – Экспорт котировок [Электронный ресурс]. URL: <https://www.finam.ru/profile/moex-akcii/gazprom/export> (дата обращения: 01.06.2021).

Интервал исторических годовых доходностей составил 10 наблюдений с декабря 2009 г. по декабрь 2018 г. включительно. Глубина прогноза была принята в размере одного шага, прогнозная и фактическая доходности определялись на декабрь 2019 г.

Для построения моделей ARFIMA использовалась функция `arfima()` из пакета `arfima` языка программирования R (выполнение программного кода R в среде Python было достигнуто с помощью библиотеки `gry2`). Максимальным значением p и q при подборе моделей было взято 2 (более высокие порядки не рассматривались по причине того, что «такие модели имеют склонность к переобучению» [14, с. 94]). Величина порядка интегрирования d выбиралась алгоритмом. Были использованы месячные доходности, потому что для идентификации параметров авторегрессионной модели требуется не менее нескольких десятков значений, в особенности это условие актуально для моделей с длинной памятью. Правая граница интервала наблюдений, по которым осуществлялась аппроксимация моделей, – декабрь 2018 г. Левая граница подбиралась таким образом, чтобы полученные модели прошли проверки на адекватность: 1) в остатках модели не должно быть автокорреляции на уровне значимости 0,05 (проверялось с помощью теста Льюнга – Бокса, число лагов – 10); 2) остатки модели должны быть нормально распределены на уровне значимости 0,05 (проверялось с помощью теста Шапиро – Уилка). Как только удавалось получить модель, удовлетворяющую всем условиям, осуществлялось прогнозирование месячных доходностей на 12 шагов вперед, и по ряду прогнозных месячных доходностей вычислялась прогнозная годовая доходность.

Следует отметить, что в первоначальные цели исследования входила также проверка гипотезы о преимуществах моделей с длинной памятью (на примере ARFIMA) относительно моделей с короткой памятью (на примере ARIMA) при формировании портфелей. Однако множественные вычислительные эксперименты показали, что в большинстве случаев для динамики доходностей активов не удается построить адекватные модели ARIMA, не являющиеся моделями белого шума (сумма порядков авторегрессии p и скользящего среднего q которых составляет не меньше единицы). В этой связи от идеи такого сравнения пришлось отказаться.

После получения прогнозных доходностей следует заняться формированием оптимальных портфелей. Было решено включать в портфель по четыре актива. Выбор такого количества активов обусловлен тем, что это позволит достичь достаточно высокой степени диверси-

фикации рисков при сохранении умеренной вычислительной трудоемкости эксперимента. Портфели формировались из каждой комбинации активов, количество которых было определено по формуле числа сочетаний

$C_{21}^4 = \frac{21!}{(21-4)!4!}$ и составило 5985. Для решения задачи оптимизации использовалась функция `optimize.minimize()` из пакета `scipy`. Параметры оптимизатора: точность (допустимая величина ошибки) – $1e-10$, алгоритм – SLSQP (последовательное квадратичное программирование с ограничениями). Для каждой комбинации активов были сформированы различные портфели, при этом выполнялись следующие шаги:

1. Определялось предельное значение риска портфеля, оптимизированного по историческим доходностям, $\sigma_{\max}^{\text{hist}}$ как величина стандартного отклонения тривиально сбалансированного портфеля из четырех активов, взятых в равных долях.

2. Формировался портфель с целевым функционалом $r_{p \text{ hist}} \rightarrow \max$ и ограничением $\sigma_{p \text{ hist}} \leq \sigma_{\max}^{\text{hist}}$.

3. Предельное значение риска портфеля, оптимизированного по прогнозным доходностям, $\sigma_{\max}^{\text{pred}}$ принималось равным $\sigma_{p \text{ hist}}$.

4. Формировались портфели с целевым функционалом $r_{p \text{ pred}} \rightarrow \max$ и ограничением $\sigma_{p \text{ pred}} \leq \sigma_{\max}^{\text{pred}}$.

В качестве критериев сравнения портфелей применены: фактическая (реализованная) доходность $r_{p \text{ fact}}$ (выше – лучше), фактический (реализованный) риск $\sigma_{p \text{ fact}}$ (ниже – лучше), фактический (реализованный) коэффициент Шарпа $Sh_{p \text{ fact}}$ (выше – лучше).

После описания методики исследования и определения критериев сравнения портфелей следует изложить и проанализировать полученные в ходе апробации данной методики результаты.

5. Результаты и их обсуждение

На рисунке представлена гистограмма прогнозных и фактических доходностей каждого из активов. В качестве прогнозов приведены также средние значения, вычисленные по рядам исторических доходностей.

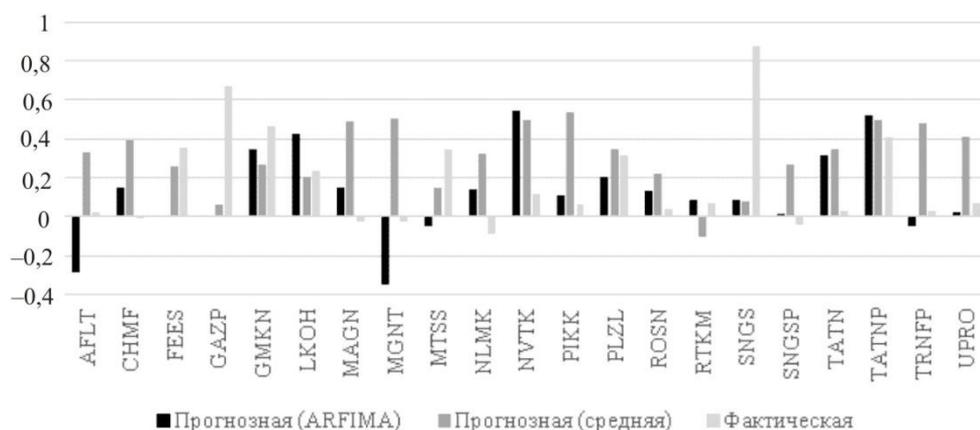


Рис. Прогнозные и фактические доходности активов

Абсолютная ошибка прогноза ARFIMA-модели оказалась ниже, чем у модели, прогнозирующей среднее, в 13 случаях из 21. Усредненная по всем активам абсолютная ошибка (MAE) ARFIMA-модели также оказалась ниже и составила 0,2375 против 0,3271 у модели среднего. Можно констатировать, что ARFIMA генерирует значительно более точные прогнозы. Тем не менее в рамках данного исследования стоит задача выяснить, проявляется ли это преимущество при подборе структуры инвестиционного портфеля.

После множественных вычислений был получен набор результирующих данных, фрагмент которого представлен в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики сформированных портфелей (фрагмент)

Активы				σ_{\max}	$r_{p \text{ fact}}$	$\sigma_{p \text{ fact}}$	$Sh_{p \text{ fact}}$	w_1	w_2	w_3	w_4
1	2	3	4								
Оптимизация по историческим доходностям											
$r_{p \text{ hist}} \rightarrow \max, \sigma_{p \text{ hist}} \leq \sigma_{\max}$											
MGNT	NLMK	PIKK	PLZL	0,79	0,16	0,76	0,21	0,17	0,00	0,40	0,43
MGNT	NVTK	PIKK	PLZL	0,81	0,11	0,78	0,14	0,00	0,82	0,18	0,00
MTSS	NLMK	NVTK	PIKK	0,69	0,16	0,66	0,24	0,19	0,00	0,81	0,00
MTSS	NLMK	NVTK	PLZL	0,54	0,24	0,51	0,48	0,26	0,00	0,39	0,35

Окончание табл. 1

Активы				σ_{\max}	$r_{p \text{ fact}}$	$\sigma_{p \text{ fact}}$	$Sh_{p \text{ fact}}$	w_1	w_2	w_3	w_4
1	2	3	4								
MTSS	NLMK	PIKK	PLZL	0,61	0,22	0,58	0,38	0,14	0,11	0,21	0,55
MTSS	NVTK	PIKK	PLZL	0,62	0,21	0,59	0,35	0,03	0,55	0,00	0,41
NLMK	NVTK	PIKK	PLZL	0,71	0,15	0,68	0,21	0,00	0,84	0,00	0,16
Оптимизация по прогнозным доходностям $r_{p \text{ pred}} \rightarrow \max, \sigma_{p \text{ pred}} \leq \sigma_{\max}$											
MGNT	NLMK	PIKK	PLZL	0,76	0,32	0,65	0,49	0,00	0,00	0,00	1,00
MGNT	NVTK	PIKK	PLZL	0,78	0,11	0,75	0,15	0,00	1,00	0,00	0,00
MTSS	NLMK	NVTK	PIKK	0,66	0,16	0,66	0,24	0,18	0,00	0,82	0,00
MTSS	NLMK	NVTK	PLZL	0,51	0,24	0,51	0,46	0,29	0,00	0,43	0,27
MTSS	NLMK	PIKK	PLZL	0,58	0,21	0,58	0,36	0,00	0,26	0,00	0,74
MTSS	NVTK	PIKK	PLZL	0,59	0,20	0,59	0,33	0,08	0,61	0,00	0,32
NLMK	NVTK	PIKK	PLZL	0,68	0,14	0,68	0,21	0,00	0,86	0,00	0,14

Как можно заметить, предельное значение риска, характерное для тривиально сбалансированного портфеля, как правило, оказывается очень высоким (в рассмотренном примере $\sigma_{\max}^{\text{hist}} \in [0,54; 0,81]$), и вряд ли на практике найдется инвестор с такой степенью толерантности к риску. Причиной столь высоких значений стандартного отклонения доходности является случайный выбор активов, продиктованный исключительно техническими моментами (наличие достаточной предыстории котировок, успех построения адекватной модели). Поскольку целью данного исследования является не поиск стратегии инвестирования, позволяющей получить портфель с наилучшими характеристиками, а сравнение способов оптимизации структуры портфеля на примере произвольных активов, высокое предельное значение риска выглядит допустимым. Следует отметить, что в некоторых случаях оптимизатор помещает в портфель единственный актив. Причиной этого также является высокое предельное значение риска, что позволяет включить в портфель только наиболее доходный актив.

Чтобы сравнить между собой портфели, оптимизированные по прогнозным и историческим доходностям (обозначим их соответ-

венно «ARFIMA-портфель» и «исторический портфель»), была составлена следующая сводная табл. 2.

При сравнении доходности доля случаев безусловного преимущества оптимизации по историческим данным оказалась на 37 % меньше, чем процент случаев преимущества ARFIMA-портфеля. По всей видимости, это связано с большей достоверностью прогнозных данных в сравнении с простым математическим ожиданием (см. рисунок). В случае сравнения по риску преимущество прогнозных портфелей сокращается, оно составило только 11,6 %. Стандартное отклонение авторегрессионными моделями предсказывается хуже, что выглядит закономерным, учитывая склонность их прогнозов к усреднению значения показателя, они прогнозируют тенденцию, а не волатильность (скачки) [18]. Наконец, по коэффициенту Шарпа (отношение доходности к риску) ARFIMA-портфели оказались лучше исторических в 42,6 % раз чаще.

Таблица 2

Статистика качества сформированных портфелей

Наблюдаемый результат	Количество прецедентов	Доля от общего числа прецедентов (комбинаций активов 5985)
Сравнение по доходности $r_{p \text{ fact}}$		
ARFIMA-портфель лучше	3805	63,58 %
Исторический портфель лучше	1586	26,50 %
Сравнение по риску $\sigma_{p \text{ fact}}$		
ARFIMA-портфель лучше	2776	46,38 %
Исторический портфель лучше	2081	34,77 %
Сравнение по коэффициенту Шарпа $Sh_{p \text{ fact}}$		
ARFIMA-портфель лучше	4068	67,97 %
Исторический портфель лучше	1518	25,36 %

Следует отметить, что к ограничениям примененной методики сравнения портфелей можно отнести то, что не задавалась минимальная величина разницы между показателями доходности и риска, при недостижении которой отличие можно считать существенным и говорить о явном преимуществе того или иного портфеля по данному показателю. Например, доходность одного из портфелей может превышать доходность другого на десятитысячную долю процента, что на практике делает данные портфели равнодоходными, однако в нашем случае именно первый портфель учтен как обладающий преимуществом по доходности.

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Гипотеза о том, что оптимизация портфеля по прогнозным доходностям с применением ARFIMA-модели улучшает их характеристики, не отвергается. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что параметры портфелей как минимум не ухудшаются в сравнении с оптимизацией по историческим данным, а в значительной части случаев оказываются лучшими. Причиной этого является то, что величина предсказанных доходностей зачастую оказывается ближе к фактической, чем обычное математическое ожидание, что позволяет оптимизатору чаще определять наиболее доходные активы и придавать им больший вес. Стоит отметить, что результаты, демонстрирующие столь убедительное превосходство прогнозных портфелей, получены при очень высокой степени толерантности к риску, и, возможно, следует повторить эксперимент на более низкорисковых активах. Однако, по нашему мнению, нет оснований предполагать, что характер результатов подобного исследования будет принципиально иным.

2. Определение наиболее доходных активов на основе прогнозных доходностей оптимизатору удастся лучше, чем наименее рискованных, предположительно это вызвано особенностью авторегрессионных моделей, которые предсказывают тенденцию развития показателя, а не его волатильность.

В заключении определим ограничения использованной методики исследования и очертим возможные направления дальнейшей работы.

Заключение

По итогам исследования можно сказать, что использование для оптимизации структуры портфеля моделей с длинной памятью проде-

монстрировало преимущества в сравнении с классической моделью средней дисперсии, так как в некоторых условиях, предположительно связанных с фрактальными свойствами моделируемых рядов, данный подход позволил сформировать более инвестиционно привлекательные портфели. По нашему мнению, апробированный способ формирования портфелей заслуживает внимания. Моделирование ожидаемой динамики доходности портфеля при помощи современных математических методов и теории фракталов взамен применения в качестве прогнозной доходности простейшего математического ожидания в ряде случаев позволяет более адекватно описывать реальные рыночные процессы и, как следствие, формировать более доходные и менее рискованные портфели. Примененный способ можно обсуждать как возможное приращение фрактального подхода к прогнозированию финансовых рядов.

При этом методика данного исследования обладает рядом ограничений. Так, для прогнозирования доходностей были использованы модели с длинной памятью ARFIMA, но не был выполнен предпрогнозный анализ фрактальных свойств ценовых рядов активов, подтверждающий наличие в них длинной памяти. Другим моментом, который сложно назвать положительным, явилось то, что была выбрана очень высокая степень толерантности к риску формируемых портфелей.

Направлениями будущих исследований могут стать следующие:

- выполнение предпрогнозного анализа рядов и применение других прогнозирующих моделей (например, фрактальных модификаций GARCH);
- наложение более жестких ограничений по величине риска на портфель;
- обращение к фондовому рынку США, как значительно более развитому, обладающему большим многообразием эмитентов и богатством данных, доступных для анализа;
- использование в качестве бенчмарка для оценки эффективности портфелей фондовых индексов;
- расширение методики возможностью оперативной ребалансировки портфеля, основанной на многократном повторном моделировании и получении новых прогнозов доходности с учетом новейших данных, в соответствии с которыми корректируется структура портфеля.

Рассмотренный способ определения оптимальной структуры портфеля может стать одним из пунктов методики формирования ин-

вестиционных портфелей с применением эконометрических моделей и фрактального анализа, разрабатываемой в рамках исследований, проводимых на кафедре ИСММЭ ПГНИУ.

Благодарность

Автор выражает благодарность кандидату экономических наук, доценту кафедры финансов, кредита и биржевого дела ПГНИУ Константину Александровичу Шубину за ценные консультации по портфельной теории.

Список литературы

1. Шубин К.А. Преимущества международной диверсификации инвестиционного портфеля частного инвестора // Пермский финансовый журнал. – 2018. – № 2 (19). – С. 75–98.
2. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. – No. 7. – P. 77–91.
3. Росси Э. Одномерные GARCH-модели: обзор // Квантиль: международный эконометрический журнал на русском языке. – 2010. – № 8. – С. 1–67.
4. Буркальцева Д.Д., Ногас И.Л. Формирование портфеля финансовых инвестиций на принципах современной портфельной теории // Друкерровский вестник. – 2016. – № 1 (9). – С. 98–105. DOI: 10.17213/2312-6469-2016-1-98-105
5. Халяпин А.А., Воронин В.С., Позднякова А.А. Формирование сбалансированного инвестиционного портфеля // Colloquium-journal. – 2019. – № 24 (48). – С. 25–28.
6. Chun W., Li H., Wu X. Portfolio model under fractal market based on Mean-DCCA. Fractals. – 2020. – Vol. 28, no. 07. – Art. 2050142. DOI: 10.1142/S0218348X2050142X
7. Выгодчикова И.Ю., Гусятников В.Н., Акимова С.А. Модель формирования инвестиционного портфеля с использованием минимаксного критерия // Вестник СГСЭУ. – 2018. – № 3 (72). – С. 170–174.
8. Михно В.Н. Модель максимальной энтропии для формирования инвестиционного портфеля // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. – 2017. – № 1. – С. 45–55. DOI: 10.26456/vtprmk122
9. Бронштейн Е.М., Янчушка З.И. Фрактальный подход к формированию портфелей ценных бумаг // Финансы и кредит. – 2007. – № 12 (252). – С. 26–29.
10. Коноплева Ю.А. Методика моделирования инвестиционного портфеля с учетом особенностей регионального рынка ценных бумаг // Управление

ние экономическими системами: электрон. научн. журн. – 2015. – № 6 (40). – URL: <http://uecs.ru/uecs-78-782015/item/3605-2015-06-25-08-41-16> (дата обращения: 01.06.2021).

11. Гарафутдинов Р.В., Гурова Е.П. Об одном подходе к формированию инвестиционного портфеля Марковица с применением фрактального анализа // *Финансы и бизнес*. – 2021. – № 1. – С. 77–93. DOI: 10.31085/1814-4802-2021-17-1-77-93

12. Мансуров А.К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа // *Проблемы прогнозирования*. – 2008. – № 1. – С. 145–158.

13. Симонов П.М., Гарафутдинов Р.В. Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // *Вестник Пермского университета. Серия «Экономика» = Perm University Herald. Economy*. – 2019. – Т. 14, № 2. – С. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288

14. Балагула Ю.М. Прогнозирование суточных цен на ОПЭМ РФ с помощью модели ARFIMA // *Прикладная эконометрика*. – 2020. – Т. 57. – С. 89–101. DOI: 10.22394/1993-7601-2020-57-89-101

15. Caporale G., Škare M. Long memory in UK real GDP, 1851–2013: An ARFIMA-FIGARCH analysis // *DIW Berlin Discussion Paper No. 1395*. Berlin, German Institute for Economic Research. – 2014. – 19 p. – URL: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2459806 (accessed 01 May 2021).

16. Zhelyazkova S. ARFIMA-FIGARCH, HYGARCH and FIAPARCH Models of Exchange Rates // *Izvestia Journal of the Union of Scientists – Varna. Economic Sciences Series*. – 2018. – No. 7 (2). – P. 142–153.

17. Sharpe W.F. The Sharpe ratio // *The Journal of Portfolio Management*. – 1994. – No. 21 (1). – P. 49–58. DOI: 10.3905/jpm.1994.409501

18. Симонов П.М., Ахуньянова С.А. Сравнительный анализ методик AR-GARCH и p -адического прогнозирования волатильности финансового рынка // *Вестник Пермского университета. Серия «Экономика» = Perm University Herald. Economy*. – 2019. – Т. 14, № 1. – С. 69–92. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-1-69-92

References

1. Shubin K.A. Advantages of international diversification of investment portfolio of a private investor. *Perm Financial Review*, 2018, no. 2 (19), pp. 75–98 (in Russian)

2. Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, no. 7, pp. 77–91.

3. Rossi E. Odnomernye GARCH-modeli: obzor [Univariate GARCH models: a survey]. *Quantile*, 2010, no. 8, pp. 1–67 (in Russian)

4. Burkaltseva D.D., Nogas I.L. Formirovanie portfelja finansovyh investicij na principah sovremennoj portfel'noj teorii [Formation of a portfolio of financial investments on principles modern portfolio theory]. *Drukerovskij vestnik*, 2016, no. 1 (9), pp. 98–105. DOI: 10.17213/2312-6469-2016-1-98-105 (in Russian)

5. Khalyapin A.A., Voronin V.S., Pozdnjakova A.A. Formirovanie sbalansirovannogo investicionnogo portfelja [Formation of a balanced investment portfolio]. *Colloquium-journal*, 2019, no. 24 (48), pp. 25–28 (in Russian)

6. Chun W., Li H., Wu X. Portfolio model under fractal market based on Mean-DCCA. *Fractals*, 2020, vol. 28, no. 07, art. 2050142. DOI: 10.1142/S0218348X2050142X

7. Vygodchikova I.Yu., Gusyatinov V.N., Akimova S.A. Model' formirovanija investicionnogo portfelja s ispol'zovaniem minimaksnogo kriterija [Model for building an investment portfolio with the help of minimax criteria]. *Vestnik of Saratov State Socio-Economic University*, 2018, no. 3 (72), pp. 170–174 (in Russian)

8. Mikhno V.N. Model' maksimal'noj jentropii dlja formirovanija investicionnogo portfelja [Maximum entropy model for forming an investment portfolio]. *Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 45–55. DOI: 10.26456/vtpmk122 (in Russian)

9. Bronshtejn E.M., Janchushka Z.I. Fraktal'nyj podhod k formirovaniju portfelej cennyh bumag [Fractal approach to securities portfolio formation]. *Finance and Credit*, 2007, no. 12 (252), pp. 26–29 (in Russian)

10. Konopleva Ju.A. Metodika modelirovanija investicionnogo portfelja s uchetom osobennostej regional'nogo rynka cennyh bumag [Methods of investment portfolio modeling taking into account peculiarities of regional securities market]. *Management of Economic Systems: Scientific Electronic Journal*, 2015, no. 6 (40), available at: <http://uecs.ru/uecs-78-782015/item/3605-2015-06-25-08-41-16> (accessed 1 June 2021) (in Russian)

11. Garafutdinov R.V., Gurova E.P. On One Approach to the Formation of Markowitz's Investment Portfolio Using Fractal Analysis. *Finance and Business*, 2021, no. 1, pp. 77–93. DOI: 10.31085/1814-4802-2021-17-1-77-93 (in Russian)

12. Mansurov A.K. Prognozirovanie valjutnyh krizisov s pomoshh'ju metodov fraktal'nogo analiza [Forecasting currency crises by fractal analysis techniques]. *Forecasting Problems*, 2008, no. 1, pp. 145–158 (in Russian)

13. Simonov P.M., Garafutdinov R.V. Modelirovanie i prognozirovanie dinamiki kursov finansovykh instrumentov s primeneniem ekonometricheskikh modelei i fraktal'nogo analiza [Modeling and forecasting of financial instruments dynamics using econometrics models and fractal analysis]. *Perm University Herald. ECONOMY*, 2019, vol. 14, no. 2, pp. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288 (in Russian)

14. Balagula Yu.M. Forecasting daily spot prices in the Russian electricity market with the ARFIMA model. *Applied Econometrics*, 2020, vol. 57, pp. 89–101. DOI: 10.22394/1993-7601-2020-57-89-101 (in Russian)

15. Caporale G., Škare M. Long memory in UK real GDP, 1851–2013: An ARFIMA-FIGARCH analysis. *DIW Berlin Discussion Paper*, no. 1395, Berlin: German Institute for Economic Research, 2014. 19 p. available at: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2459806 (accessed 01 May 2021).

16. Zhelyazkova S. ARFIMA-FIGARCH, HYGARCH and FIAPARCH Models of Exchange Rates. *Izvestia Journal of the Union of Scientists. Varna. Economic Sciences Series*, 2018, no. 7 (2), pp. 142–153.

17. Sharpe W.F. The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 1994, no. 21 (1), pp. 49–58. DOI: 10.3905/jpm.1994.409501

18. Simonov P.M., Akhunyanova S.A. Sravnitel'nyi analiz metodik AR-GARCH i p -adicheskogo prognozirovaniia volatil'nosti finansovogo rynka [Comparative analysis of AR-GARCH and p -adic methods of the prediction of the financial market volatility]. *Perm University Herald. Economy*, 2019, vol. 14, no. 1, pp. 69–92. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-1-69-92 (in Russian)

Статья получена: 03.05.2021

Статья принята: 17.06.2021

Сведения об авторе

Гарафутдинов Роберт Викторович (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: rvgarafutdinov@gmail.com).

About the author

Robert V. Garafutdinov (Perm, Russian Federation) – Postgraduate Student, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (15, Bukireva st., Perm, 614990, e-mail: rvgarafutdinov@gmail.com).

**Библиографическое описание статьи
согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:**

Гарафутдинов, Р.В. Применение моделей с длинной памятью для прогнозирования доходности при формировании инвестиционных портфелей / Р. В. Гарафутдинов. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.10 // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2021. – № 2. – С. 163–183.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Гарафутдинов, Р.В. Применение моделей с длинной памятью для прогнозирования доходности при формировании инвестиционных портфелей // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – № 2. – С. 163–183. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.10

Цитирование статьи в references и международных изданиях

Cite this article as:

Garafutdinov R.V. Application of the long memory models for returns forecasting in the formation of investment portfolios. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2021, no. 2, pp. 163–183. DOI: 10.15593/2499-9873/2021.2.10 (in Russian)