

DOI: 10.15593/2499-9873/2020.4.03

УДК 531.12

**И.П. Попов**

Курганский государственный университет, Курган, Россия

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУММИРОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ**

Средствами прикладной математики решаются задачи, относящиеся к области автоматизации и управления технологическими процессами, а именно аналитическое описание суперпозиций вращений, имеющих место при работе многочисленных механизмов. Практический аспект темы определяется тем, что в таких механизмах, как планетарные передачи, приводы фрез в машинах для очистки труб больших диаметров, и тому подобных реализуется суммирование вращательных движений и форма годографа является полезной информацией при проектировании подобных устройств. Предпосылкой рассмотрения является принцип суммирования прямолинейных равномерных движений. Целью работы является определение того, как в подобной ситуации обстоит дело при сложении вращательных синхронных движений. Установлено, что подобно тому, как результатом сложения двух равномерных прямолинейных механических движений является также равномерное прямолинейное движение, результатом сложения двух равномерных однонаправленных круговых движений является также равномерное круговое движение. Годографом при сложении двух равномерных противоположно направленных круговых движений является эллипс. В частном случае эллипс может вырождаться в отрезок прямой линии. При сложении двух несинхронных вращений возможны годографы в виде улитки, имеющей сходство с улиткой Паскаля.

**Ключевые слова:** координаты, вращение, синхронный, кратный, суперпозиция, вектор, годограф, эллипс, окружность, улитка.

**I.P. Popov**

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

## **A MATHEMATICAL MODEL FOR SUMMING ROTARY MOTIONS**

In this work, using the means of applied mathematics, problems are solved related to the field of automation and control of technological processes, namely, the analytical description of superpositions of rotations that occur during the operation of numerous mechanisms. The practical aspect of the topic is determined by the fact that in mechanisms such as planetary gears, cutter drives in machines for cleaning pipes of large diameters, etc. summation of rotational motions is realized, and the shape of the hodograph is useful information in the design of such devices. The prerequisite for consideration is the principle of summation of rectilinear uniform movements. The aim of the work is to determine how things are in a similar situation when adding rotational synchronous movements. It was found that just as the result of the addition of two uniform rectilinear mechanical movements is also a uniform rectilinear movement, the result of the addition of two uniform unidirectional circular movements is also a uniform circular movement. The hodograph when two uniform oppositely directed circular motions are added is an ellipse. In a particular case, the ellipse can degenerate into a straight line segment. When two asynchronous rotations are added, hodographs in the form of a cochlea are possible, which is similar to Pascal's cochlea.

**Keywords:** coordinates, rotation, synchronous, multiple, superposition, vector, hodograph, ellipse, circle, snail.

## Введение

В настоящей работе средствами прикладной математики решаются задачи, относящиеся к области автоматизации и управления технологическими процессами, а именно аналитическое описание суперпозиций вращений, имеющих место при работе многочисленных механизмов.

Практический аспект темы определяется тем, что в таких механизмах, как мультиинертный осциллятор [1, 2], планетарные передачи [3], приводы фрез в машинах для очистки труб больших диаметров [4], и тому подобных реализуется суммирование вращательных движений и форма годографа является полезной информацией при проектировании подобных устройств [5–7].

Если система отсчета  $x'0'y'$  движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_1$  в неподвижной системе отсчета  $x0y$  (рис. 1) и точка  $a$  движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_2$  в системе отсчета  $x'0'y'$ , то в соответствии с принципом относительности Галилея точка  $a$  движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $v_3$  в системе отсчета  $x0y$ , а годографом вектора  $A$ , соединяющего точки  $0$  и  $a$ , является прямая линия [8].

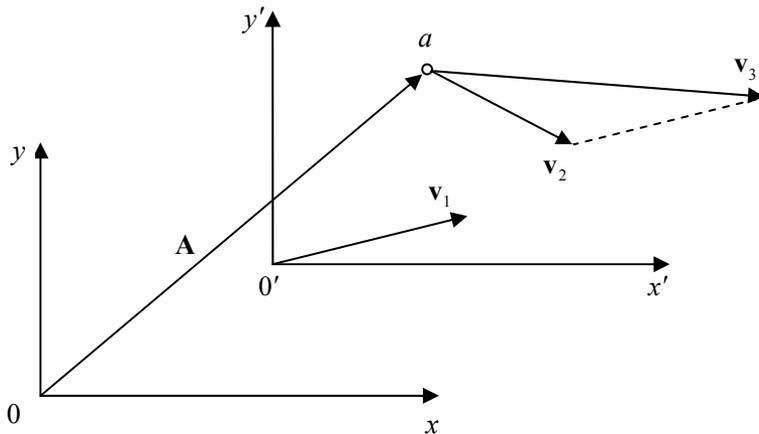


Рис. 1. Сложение движений

Цель работы – установить, как в подобной ситуации обстоит дело при сложении *вращательных* синхронных движений [9–11].

Пусть точка  $O'$  вращается вокруг точки  $O$  в системе отсчета  $xOy$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Расстояние  $\rho_1$  между точками не меняется. Координатные оси обеих систем отсчета всегда попарно параллельны. Точка  $a$  вращается вокруг точки  $O'$  в системе отсчета  $x'O'y'$  с постоянной угловой скоростью  $-\omega$  или  $+\omega$ . Расстояние  $\rho_2$  между точками не меняется.

### 1. Разнонаправленное вращение

**Теорема 1.** При разнонаправленном вращении точек  $a$  и  $O'$  графиком вектора  $\mathbf{A}$  является эллипс.

*Доказательство:*

Координаты точки  $O'$  в системе  $xOy$

$$x_1 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y_1 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (1)$$

Координаты точки  $a$  в системе  $x'O'y'$

$$x_2 = \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2).$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  – начальные углы.

Координаты вектора  $\mathbf{A}$  в системе  $xOy$ :

$$x = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2);$$

$$y = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2);$$

$$x = \cos \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - \sin \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2);$$

$$y = \sin \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2).$$

Отсюда следует

$$\sin \omega t = \frac{y(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - x(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2};$$

$$\cos \omega t = \frac{x(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) + y(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2};$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1;$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{y^2 (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + x^2 (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \\
 & - \frac{2xy (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\
 & + \frac{x^2 (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + y^2 (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\
 & + \frac{2xy (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1; \\
 & \frac{x^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \\
 & + \frac{y^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Это уравнение эллипса.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Большая и малая полуоси эллипса (2) соответственно равны  $(\rho_1 + \rho_2)$  и  $|\rho_1 - \rho_2|$ .

*Доказательство:*

Обратным отсчетом времени можно добиться, чтобы  $\varphi_1 = \varphi_2$ , а поворотом координатных осей – чтобы  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Тогда уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \frac{y^2 (\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1; \\
 & \frac{x^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{y^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1 \text{ (канонический вид)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** При  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  эллипс (2) вырождается в отрезок прямой линии длиной  $4\rho$ .

**Следствие 2.** Корни характеристического уравнения эллипса

$$\lambda_1 = (\rho_1 + \rho_2)^2, \lambda_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2.$$

**Следствие 3.** Эксцентриситет эллипса равен отношению среднегеометрического значения величин  $\rho_1$  и  $\rho_2$  к их среднеарифметическому значению:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)/2}.$$

**Следствие 4.** Фокусы эллипса (для канонической формулы (3))

$$f_{1,2} = (\pm 2\sqrt{\rho_1 \rho_2}, 0).$$

**Теорема 3.** Оси эллиптического годографа повернуты на угол  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$  в системе отсчета  $xOy$ .

*Доказательство:*

При повороте координатных осей на угол  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$  выражение (3) принимает вид

$$\frac{\left(x \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{\left(-x \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1;$$

$$\frac{x^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{y^2 [\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy \rho_1 \rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1,$$

что совпадает с эллипсом (2).

Теорема доказана.

На рис. 2  $\varphi_1 = 120^\circ$ ,  $\varphi_2 = -30^\circ$ , следовательно, оси эллипса повернуты на  $45^\circ$ .

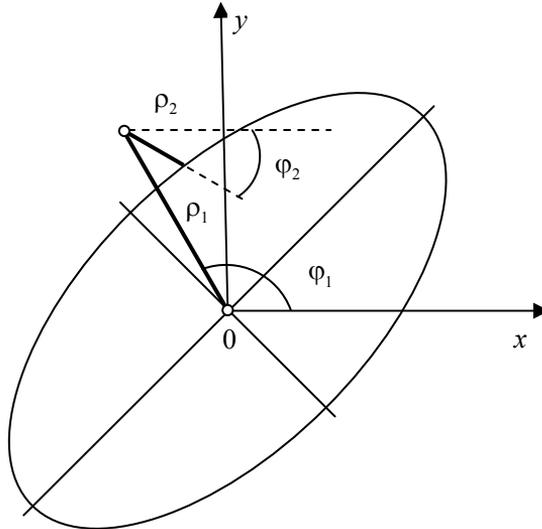


Рис. 2. Эллиптический годограф

Обратным ходом рассуждений доказывается следующая теорема

**Теорема 4.** Если годографом вектора  $\mathbf{A}$  является эллипс с полуосями  $(\rho_1 + \rho_2)$  и  $|\rho_1 - \rho_2|$ , то точка  $a$  вращается вокруг точки  $O'$  с постоянной угловой скоростью  $-\omega$  в системе отсчета  $x'O'y'$ .

## 2. Однонаправленное вращение

**Теорема 5.** При однонаправленном вращении точек  $a$  и  $O'$  годографом вектора  $\mathbf{A}$  является окружность с центром в точке  $O$ .

*Доказательство:*

Координаты точки  $O'$  в системе  $xOy$  определяются выражением (1).

Координаты точки  $a$  в системе  $x'O'y'$

$$x_2 = \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Координаты вектора  $\mathbf{A}$  в системе  $xOy$

$$x_A = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2);$$

$$y_A = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Квадрат вектора  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= x_{\mathbf{A}}^2 + y_{\mathbf{A}}^2 = \\ &= \rho_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ \rho_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) + 2\rho_1\rho_2 \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &\dots \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Длина вектора  $\mathbf{A}$  неизменна, следовательно, его годографом является окружность.

Теорема доказана.

**Следствие.** Вектор  $\mathbf{A}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  в системе отсчета  $xOy$ .

Это вытекает из того, что форма треугольника  $OO'a$  неизменна, а его сторона  $OO'$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

Обратным ходом рассуждений доказывается следующая теорема.

**Теорема 6.** Если годографом вектора  $\mathbf{A}$  является окружность, то точка  $a$  вращается вокруг точки  $O'$  с постоянной угловой скоростью  $+\omega$  в системе отсчета  $x'O'y'$ .

**Теорема 7.** Если точка  $a$  неподвижна в системе отсчета  $x'O'y'$ , то годографом вектора  $\mathbf{A}$  является окружность радиусом  $\rho_1$ , координаты центра которой в системе отсчета  $xOy$   $x_{p1} = \rho_2 \cos \varphi_2$ ,  $y_{p1} = \rho_2 \sin \varphi_2$ .

*Доказательство:*

Координаты точки  $O'$  в системе  $xOy$  определяются выражением (1).

Координаты точки  $a$  в системе  $x'O'y'$

$$x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

Координаты вектора  $\mathbf{A}$  в системе  $xOy$

$$x_{\mathbf{A}} = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos \varphi_2;$$

$$y_{\mathbf{A}} = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin \varphi_2;$$

$$x_{\mathbf{A}} - \rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1);$$

$$y_{\mathbf{A}} - \rho_2 \sin \varphi_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$(x_A - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (y_A - \rho_2 \sin \varphi_2)^2 = \rho_1^2.$$

Теорема доказана.

### 3. Пример сложения кратных вращений

Пусть точка  $a$  вращается вокруг точки  $O'$  в системе отсчета  $x'O'y'$  с постоянной угловой скоростью  $+2\omega$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ .

Координаты точки  $O'$  в системе  $xOy$

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega t, \quad y_1 = \rho_1 \sin \omega t.$$

Координаты точки  $a$  в системе  $x'O'y'$

$$x_2 = \rho_2 \cos 2\omega t, \quad y_2 = \rho_2 \sin 2\omega t.$$

Координаты вектора  $\mathbf{A}$  в системе  $xOy$

$$x_A = \rho_1 \cos \omega t + \rho_2 \cos 2\omega t,$$

$$y_A = \rho_1 \sin \omega t + \rho_2 \sin 2\omega t.$$

Годограф вектора  $\mathbf{A}$  (улитка) при  $\rho_1 = \rho_2$  изображен на рис. 3.

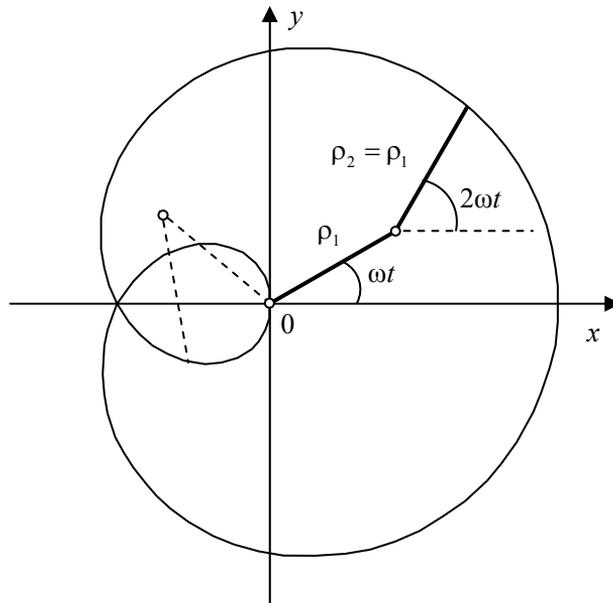


Рис. 3. Улиточный годограф

Уравнение этой улитки в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \rho_1 \sqrt{2 + 2 \cos \frac{2}{3} \varphi}.$$

Для сравнения формула улитки Паскаля, имеющей заметное внешнее сходство:

$$\rho = b + a \cos \varphi.$$

Условием возникновения петли улиточного годографа является неравенство

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 \sin 2\omega t;$$

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 2 \sin \omega t \cos \omega t;$$

$$\rho_1 < 2\rho_2 \cos \omega t.$$

При  $\rho_1 \geq 2\rho_2$  петля не возникает (рис. 4).

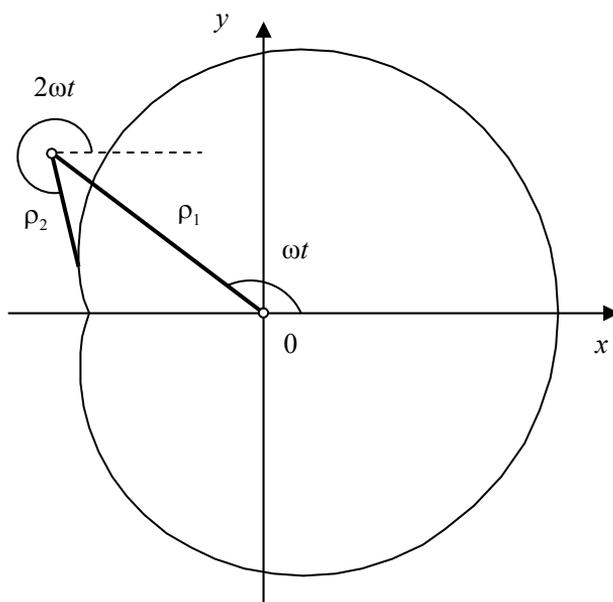


Рис. 4. Улиточный годограф без петли

#### 4. Пример практического применения

На рис. 5 представлен годограф кромок планок мотовила [12–15]. В соответствии с теоремой 7, центр окружности 1, описываемой кромками планок, смещен относительно центра окружности 2, описываемой лучами мотовила.

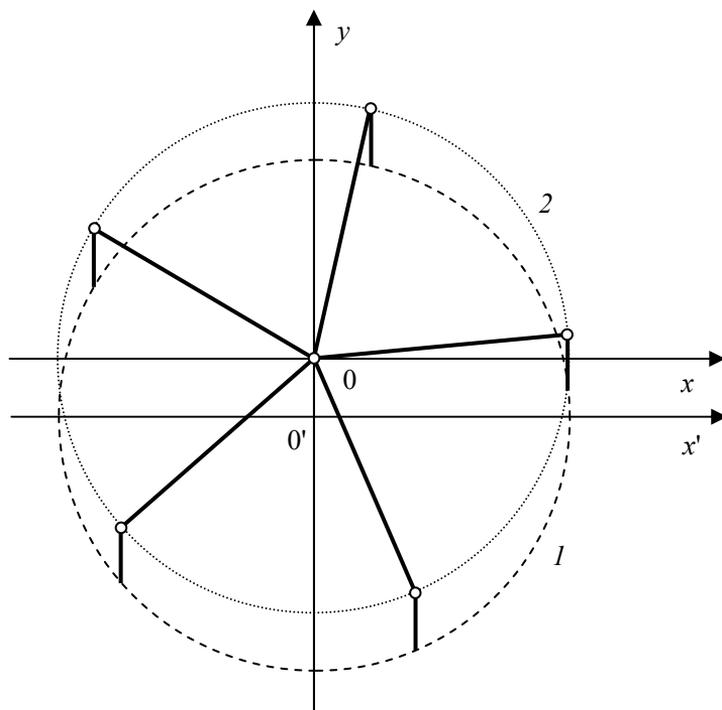


Рис. 5. Годограф кромки планок мотовила

### Заключение

Подобно тому, как результатом сложения двух равномерных прямолинейных движений является также равномерное прямолинейное движение, результатом сложения двух равномерных однонаправленных круговых движений является также равномерное круговое движение.

Годографом при сложении двух равномерных противоположно направленных круговых движений является эллипс.

При сложении двух несинхронных вращений возможны годографы в виде улитки.

### Список литературы

1. Попов И.П. Теория мультиинертного осциллятора // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2020. – № 1. – С. 88–91.
2. Попов И.П. Моделирование триинертного осциллятора // Прикладная математика и вопросы управления. – 2018. – № 4. – С. 73–79. DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.04

3. Приходько А.А., Смелягин А.И. Создание и исследование планетарных механизмов прерывистого движения с эллиптическими зубчатыми колесами // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2019. – № 6 (129). – С. 77–88. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-6-77-88

4. Матасова Е.Ю., Виноградов Д.В. Корректировка подачи при фрезеровании криволинейных поверхностей // Известия вузов. Машиностроение. – 2019. – № 10 (715). – С. 14–24. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-10-14-24

5. Волошинов Д.В., Казначеева Е.С., Хайбрахманова Е.С. Преобразование инверсии в задачах проектирования поверхностей // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 1. – С. 14–26.

6. Кокарева Я.А. Аналитическая модель поверхностей на основе координации пространства винтовыми и эллиптическими линиями // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 1. – С. 27–36.

7. Носов К.Г. Когнитивный подход к решению задач моделирования и проектирования в САПР // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 1. – С. 73–85.

8. Маркеев А.П. О динамике спутника, несущего подвижную относительно него точечную массу // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – № 6. – С. 3–16.

9. Сумбатов А.С. О качении тяжелого диска по поверхности вращения отрицательной кривизны // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, вып. 2. – С. 234–248.

10. Бранец В.Н. Об изоморфизме математических описаний операции вращения // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – № 2. – С. 136–143.

11. Бычков Ю.П. О катании тела с ротором по подвижной опорной сфере // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, вып. 1. – С. 99–111.

12. Капустин В.П., Кунаков С.А. Выбор параметров мотовила жатки // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2006. – Т. 12, № 1. – С. 162–169.

13. Гутров М.А. Расчет областей допустимых значений технологических параметров зерноуборочной жатки жвп-9.1 на основе математического моделирования взаимодействия мотовила с убираемым растением // АПК России. – 2019. – Т. 26, № 4. – С. 523–534.

14. Мякин В.Н. Анализ работы мотовила и режущего аппарата жатки // Известия Оренбургского государственного аграрного университета. – 2010. – № 1 (25). – С. 69–71.

15. Торопов О.Ю. Повышение эффективности мотовила жатки комбайна при уборке зерновых // Научно-образовательный потенциал молодежи в решении актуальных проблем XXI века. – 2017. – № 9. – С. 211–212.

## References

1. Popov I.P. Teoriya mul'tiinertnogo ostsillyatora [Multi-inert oscillator theory]. *Mechanical engineering and automation problems*, 2020, no. 1, pp. 88–91.
2. Popov I.P. Modelirovaniye triinertnogo ostsillyatora [Modeling a triinertial oscillator]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2018, no. 4, pp. 73–79. DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.04
3. Prikhod'ko A.A., Smelyagin A.I. Sozdaniye i issledovaniye planetarnykh mekhanizmov preryvistogo dvizheniya s ellipticheskimi zubchatymi kolesami [Creation and research of planetary mechanisms of intermittent motion with elliptical gears]. *Bulletin of the Moscow State Technical University. N.E. Bauman. Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 6 (129), pp. 77-88. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-6-77-88
4. Matasova Ye.YU., Vinogradov D.V. Korrektirovka podachi pri frezerovanii krivolinyenykh poverkhnostey [Correction of feed when milling curved surfaces]. *Proceedings of higher educational institutions. Mechanical engineering*, 2019, no. 10 (715), pp. 14-24. DOI: 10.18698/0536-1044-2019-10-14-24
5. Voloshinov D.V., Kaznacheyeva Ye.S., Khaybrakhmanova Ye.S. Preobrazovaniye inversii v zadachakh proyektirovaniya poverkhnostey [Inversion transformation in surface design problems]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, no. 1, pp. 14–26.
6. Kokareva YA.A. Analiticheskaya model' poverkhnostey na osnove koordinatsii prostranstva vintovymi i ellipticheskimi liniyami [Analytical model of surfaces based on the coordination of space by helical and elliptical lines]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, no. 1, pp. 27–36.
7. Nosov K.G. Kognitivnyy podkhod k resheniyu zadach modelirovaniya i proyektirovaniya v SAPR [Cognitive approach to solving modeling and design problems in CAD]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2015, no. 1, pp. 73–85.
8. Markeyev A.P. O dinamike sputnika, nesushchego podvizhnuyu otноситel'no nego tochechnuyu massu [On the dynamics of a satellite carrying a point mass moving relative to it]. *Mechanics of Solids*, 2015, no. 6, pp. 3-16.
9. Sumbatov A.S. O kachenii tyazhelogo diska po poverkhnosti vrashcheniya otritsatel'noy krivizny [Rolling of a heavy disk on a surface of revolution of negative curvature]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 83, iss. 2, pp. 234-248.
10. Branets V.N. Ob izomorfizme matematicheskikh opisaniy operatsii vrashcheniya [Isomorphism of mathematical descriptions of the rotation operation]. *Mechanics of Solids*, 2018, no. 2, pp. 136-143.
11. Bychkov YU.P. O katanii tela s rotorom po podvizhnoy opornoy sfere [About rolling a body with a rotor on a movable support sphere]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, iss. 1, pp. 99-111.

12. Kapustin V.P., Kunakov S.A. Vybor parametrov motovila zhatki [Choice of parameters of the reel of the header]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 12, no. 1, pp. 162-169.

13. Gutrov M.A. Raschet oblastey dopustimykh znacheniy tekhnologicheskikh parametrov zernouborochnoy zhatki zhvp-9.1 na osnove matematicheskogo modelirovaniya vzaimodeystviya motovila s ubirayemym rasteniyem [Calculation of the areas of admissible values of the technological parameters of the ZHVP-9.1 grain header on the basis of mathematical modeling of the interaction of the reel with the harvested plant]. *APK Rossii*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 523-534.

14. Myakin V.N. Analiz raboty motovila i rezhushchego apparata zhatki [Analysis of the work of the reel and the cutting device of the header]. *Izvestiya Orenburgskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*, 2010, no. 1 (25), pp. 69-71.

15. Toropov O.YU. Povysheniye effektivnosti motovila zhatki kombayna pri uborke zernovykh [Improving the efficiency of the reel of the harvester header when harvesting grain]. *Nauchno-obrazovatel'nyy potentsial molodezhi v reshenii aktual'nykh problem XXI veka*, 2017, no. 9, pp. 211-212.

Статья получена: 14.08.2020

Статья принята: 16.11.2020

### **Сведения об авторе**

**Попов Игорь Павлович** (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет (640020, Курган, Советская ул., 63/4, e-mail: ip.popov@yandex.ru).

### **About the author**

**Igor' P. Popov** (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (63/4, Sovetskaja st., Kurgan, 640020, e-mail: ip.popov@yandex.ru).

**Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:**

**Попов, И.П.** Математическая модель суммирования вращательных движений / И.П. Попов. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.4.03. – Текст: непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 4. – С. 32–45.

**Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:**

Попов И.П. Математическая модель суммирования вращательных движений // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 4. – С. 32–45. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.4.03

**Цитирование статьи в references и международных изданиях:**

**Cite this article as:**

Popov I.P. A mathematical model for summing rotary motions. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 4, pp. 32-45. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.4.03 (in Russian)