DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.01
УДК 517.929

В.В. Малыгина, К.М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ КОШИ АВТОНОМНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Исследуются вопросы устойчивости линейного автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в явном виде с помощью интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения. Показано, что определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости можно без потери общности формулировать в терминах соответствующих свойств функции Коши. Сделан вывод о зависимости устойчивости относительно начальных данных от того, какому функциональному пространству принадлежат начальные данные, и, как следствие, о необходимости указывать это пространство в определении устойчивости. Показано, что наряду с понятием асимптотической устойчивости требуется ввести более сильное свойство, которое получило название сильной асимптотической устойчивости.

Основное исследование посвящено устойчивости по начальной функции из пространств суммируемых функций. Особое внимание уделено изучению асимптотической и экспоненциальной устойчивости. Используются следующие известные свойства функции Коши уравнения нейтрального типа: эта функция является кусочно-непрерывной, а ее скачки определяются задачей Коши для линейного разностного уравнения. Установлено, что сильная асимптотическая устойчивость исследуемого уравнения при начальных данных из пространства L_1 равносильна экспоненциальной оценке функции Коши; более того, показано, что эти свойства равносильны экспоненциальной устойчивости по начальным данным из пространств L_p для любого p от единицы до бесконечности включительно. При этом отмечено, что сильная асимптотическая устойчивость по начальным данным из пространства L_p для p, больших единицы, может не совпадать с экспоненциальной устойчивостью.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, уравнение нейтрального типа, фундаментальное решение, функция Коши, формула представления решения, разностное уравнение, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, область устойчивости.

V.V. Malygina, K.M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE CAUCHY FUNCTION FOR AUTONOMOUS FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION OF NEUTRAL TYPE

We investigate stability of a linear autonomous functional differential equation of neutral type. The basis of the study is the well-known explicit solution representation formula including an integral operator, the kernel of which is called the Cauchy function of the equation under study. It is shown that the definitions of Lyapunov, asymptotic and exponential stabilities can be formulated without loss of generality in terms of the corresponding properties of the Cauchy function. The conclusion is drawn that stability with respect to initial data depends on the functional space which the initial function belongs to, and, as a consequence, that there is the need to indicate this space in the definition of stability. It is shown that, along with the concept of asymptotic stability, a certain stronger property should be introduced, which we call strong asymptotic stability.

The main study is devoted to stability with respect to initial function from spaces of integrable functions. Special attention is paid to the study of asymptotic and exponential stability. We use the following known properties of the Cauchy function of an equation of neutral type: this function is piecewise continuous, and its jumps are determined by a Cauchy problem for a linear difference equation. We obtain that the strong asymptotic stability of the equation under consideration for initial data from the space L_1 is equivalent to an exponential estimate of the Cauchy function and; moreover, we show that these properties are equivalent to the exponential stability with respect to initial data from the spaces L_p for all p from 1 to infinity inclusive. However, we show that strong asymptotic stability with respect to the initial data from the space L_p for p greater than one may not coincide with exponential stability.

Keywords: functional differential equation, neutral equation, the fundamental solution, the Cauchy function, solution representation formula, difference equation, Lyapunov stability, asymptotic stability, exponential stability, stability domain.

Введение

Для автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа выделяются два качественно различающихся вида устойчивости относительно начальных данных: устойчивость по Ляпунову, являющаяся равномерно непрерывной зависимостью решения от начальной функции, и асимптотическая устойчивость, для которой изменение решения при малом изменении начальных данных нивелируется с неограниченным ростом независимой переменной. Асимптотическая устойчивость может быть только экспоненциальной [1, 2], и это существенно упрощает изучение асимптотического поведения решений для уравнений запаздывающего типа [1–4].

Для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа ситуация качественно иная: в работах [5, 6] представлены автономные уравнения, которые являются асимптотически устойчивыми, не являясь при этом экспоненциально устойчивыми. Настоящая работа посвящена нескольким принципиальным вопросам устойчивости уравнений нейтрального типа, связанным с указанным эффектом. Мы показываем, что устойчивость относительно начальных данных следует рассматривать как свойство, зависящее от пространства начальных данных. Основным предметом исследования является устойчивость относительно начальной функции из пространств суммируемых функций L_p, $1 \le p \le \infty$. Мы получаем критерии устойчивости в терминах свойств функции Коши исследуемого уравнения, уделяя основное внимание асимптотической устойчивости и выделяя ситуации, когда она равносильна экспоненциальной оценке функции Коши. Полученные результаты складываются в общую картину условий устойчивости линейных автономных уравнений нейтрального типа.

1. Описание объекта и постановка задач устойчивости

Пусть N, Z и C – множества соответственно натуральных, целых и комплексных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $R = (-\infty, +\infty)$, $R_+ = [0, +\infty)$. Для измеримого множества $E \subset R_+$ обозначим через $L_p(E)$ пространство функций, суммируемых со степенью p $(1 \le p < \infty)$, а через $L_\infty(E)$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций с естественными нормами. Символом I будем обозначать единичный (тождественный) оператор.

Для открытого и замкнутого кругов в C будем использовать обозначения $B(a,r) = \{z \in C : |z-a| < r\}$ и $B[a,r] = \{z \in C : |z-a| \le r\}$ соответственно.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k \dot{x}(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} b_j x(t-jh), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

где $h > 0$, $K \in N$, $J \in N_0$, $a_k, b_j \in R$. Чтобы однозначно определить решение уравнения (1), функции x и $\dot{x}$ при отрицательных значениях аргумента доопределим начальными функциями φ и ψ соответственно. При этом мы не предполагаем обязательной «непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$, которая требуется в работах, где под решением понимается непрерывное продолжение начальной функции (например, работы [1–3]). Не предполагаем мы и выполнения налагаемого в таких работах условия $\psi = \dot{\varphi}$.

Обозначим через S_h оператор сдвига, действующий в пространствах функций, заданных на полуоси R_+, и определяемый условиями

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \ge 0, \\ 0, & t-h < 0. \end{cases}$$

Введем операторы S и T равенствами $Sy = \sum_{k=1}^{K} a_k (S_h^k y)$, $Ty = \sum_{j=0}^{J} b_j (S_h^j y)$ и наряду с уравнением (1) рассмотрим неоднородное операторное уравнение

$$\left(I-S\right)\dot{x}=Tx+f \tag{2}$$

относительно абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке функции $x: R_+ \to R$ с суммируемым на каждом конечном отрезке внешним возмущением $f: R_+ \to R.$

Обозначим $\omega = \max\{Kh, Jh\}$.

Уравнение (1) с заданными функциями φ и ψ можно переписать в виде уравнения (2), если в качестве f взять функцию

$$f(t)=\sigma(t)=\sum_{k=1}^{K}a_k\psi(t-kh)\chi_k(t)+\sum_{j=1}^{J}b_j\varphi(t-jh)\chi_j(t), \quad t\in R_+, \tag{3}$$

где $\chi_n(t)$ – характеристическая функция множества $(-\infty, nh)$. В соответствии с определением уравнения (2) начальные функции φ и ψ уравнения (1) предполагаются суммируемыми, а решением уравнения (1) полагается локально абсолютно непрерывная функция $x: R_+ \to R,$ удовлетворяющая равенству (1) почти всюду на R_+.

Как известно [7, с. 84], уравнение (2) с произвольными значениями $x(0)\in R$ и локально суммируемым внешним возмущением f однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t Y(t-s)f(s)\,ds, \quad t\in R_+, \tag{4}$$

где функция $X: R\to R$ называется *фундаментальным решением*, а $Y: R\to R$ – *функцией Коши* уравнения (2). На отрицательной полуоси фундаментальное решение X и функцию Коши Y доопределим нулем.

Фундаментальное решение и его производная посредством введенных выше операторов S и T выражаются через функцию Коши [8]:

$$X(t)=(I-S)Y(t), \quad \dot{X}(t)=(TY)(t). \tag{5}$$

Из формул (5) следует, что такие свойства функций X и $\dot{X}$, как ограниченность, существование предела на бесконечности, экспоненциальные оценки, следуют из аналогичных свойств функции Коши. Таким образом, при исследовании асимптотических свойств уравнения (2) функция Коши оказывается центральным объектом, а изучение ее свойств – основной задачей.

В отличие от фундаментального решения функция Коши уравнения (2) не является непрерывной. В работе [8] показано, что она однозначно определяется как решение $y = Y(t)$ уравнения

$$y(t) = 1 + (Sy)(t) + T\left(\int_0^t y(s)\,ds\right), \quad t \ge 0.$$

Функция Y абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[nh, nh+h)$, $n \in N_0$, и имеет в точках $t = nh$ конечные скачки H_n, определяемые рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} &H_n = \sum_{k=1}^{K} a_k H_{n-k}, \quad n \in N, \\ &H_0 = 1; \quad H_n = 0, \quad n < 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В работе [8] также найдены необходимые и достаточные условия, при которых функции X и Y имеют экспоненциальные оценки. Эти условия выражены в терминах расположения нулей некоторых функций комплексного переменного.

Теорема 1. *Для того чтобы функция Коши уравнения* (2) *имела при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку*

$$|Y(t)| \le Ne^{-\gamma t}, \quad t \in R_+, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнений

$$1 - \sum_{k=1}^{K} a_k z^k = 0, \tag{8}$$

$$1 - z\exp\left\{\frac{h\sum_{j=0}^{J} b_j z^j}{1 - \sum_{k=1}^{K} a_k z^k}\right\} = 0 \tag{9}$$

лежали вне круга $B[0,1]$.

Теорема 2. *Для того чтобы фундаментальное решение уравнения* (2) *имело при некоторых* $N, \gamma > 0$ *оценку* $|X(t)| \le Ne^{-\gamma t}$, $t \in R_+$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения* (9) *лежали вне круга* $B[0,1]$.

2. Устойчивость по начальной функции из заданного пространства

Введем определения устойчивости для уравнения (1). Подчеркнем, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений начальные условия для уравнения (1) задаются не в одной точке $t = 0$, а на множестве $[-\omega, 0]$. Функции φ и ψ входят в пространство $L_1[-\omega, 0]$, но могут быть заданы в более узком линейном пространстве, снабженном собственной нормой. Это означает выбор аналогичного подпространства пространства $L_1[0, \omega]$ применительно к введенной выше функции σ. Таким образом, свойства устойчивости решения уравнения (1) *связаны с выбором множества начальных функций на промежутке* $[0, \omega]$, и этот факт должен найти отражение в определениях устойчивости. Такие определения приводятся ниже в явном виде, по-видимому, впервые.

Пусть $X \subseteq L_1[0, \omega]$ – нормированное пространство измеримых на промежутке $[0, \omega]$ функций. Согласно формулам (3) и (4) решение однозначно определяется начальной функцией $\sigma \in X$ и начальным значением $x(0) \in R$. Эти начальные данные могут быть выбраны независимо, поэтому устойчивость определяется как непрерывная зависимость решения от них обоих.

Определение 1. Уравнение (1) называется *X-устойчивым* (*по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при любых начальных данных $\sigma \in X$, $x(0) \in R$, таких, что $|x(0)| < \delta$ и $\|\sigma\|_X < \delta$, справедлива оценка $\sup\limits_{t \ge 0} |x(t)| < \varepsilon$.

Определение 2. Уравнение (1) называется *асимптотически X-устойчивым*, если оно *X*-устойчиво и при любых начальных данных $\sigma \in X$ и $x(0) \in R$ решение уравнения (1) обладает свойством $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Определение 3. Уравнение (1) называется *экспоненциально X-устойчивым*, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что при любых начальных данных $\sigma \in X$ и $x(0) \in R$ для решения уравнения (1) справедлива оценка $|x(t)| \le N e^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_X \right)$, $t \in R_+$.

Выбор пространства $X \subseteq L_1[0,\omega]$ произволен. В большинстве работ [2–4] полагают $X = C[0,\omega]$. В работах [5, 9], где используется техника гильбертовых пространств, полагается $X = L_2[0,\omega]$. В работе [10] $X = L_1[0,\omega]$, в работе [6] рассматривались случаи $X = L_p[0,\omega]$ при всех $p \geq 1$.

Получая формулировки определений 1–3, мы опирались на представление всех его решений в виде уравнения (4) через функции X и Y. Более того, определения 1–3 показывают, что устойчивость уравнения (1) можно рассматривать как свойство его фундаментального решения и функции Коши. Естественно сделать следующий шаг и определить устойчивость через эти функции явно.

Определим семейство $\{K_t\}_{t\geq 0}$ линейных непрерывных на пространстве X функционалов формулой

$$K_t(\sigma) = \int_0^t Y(t-s)\sigma(s)\,ds, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (1) *X-устойчиво*;

2) *существует такое* $N > 0$, *что для всех* $\sigma \in X$, $x(0) \in R_+$ *и* $t \geq 0$ *справедлива оценка* $|x(t)| \leq N\left(|x(0)| + \|\sigma\|_X\right)$;

3) $\sup\limits_{t\geq 0}|X(t)| < \infty$ и $\sup\limits_{t\geq 0}\|K_t\| < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим семейство линейных функций $\{X_t : R_+ \to R\}_{t\geq 0}$, определенных равенством $X_t(\alpha) = X(t)\alpha$, и семейство функционалов $\{K_t\}_{t\geq 0}$. Формулу (4) можно записать в виде

$$x(t) = x(t) = X_t(x(0)) + K_t(\sigma). \tag{11}$$

Доказательство проведем по цепочке $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$. В силу определения 1 линейные функционалы X_t и K_t ограничены равномерно по t. Остается применить формулу (11).

$2) \Rightarrow 3)$. Полагая в формуле (3) $\sigma = 0$, получаем $|x(t)| = |X(t)x(0)| \leq N|x(0)|$ для всех $t \geq 0$, откуда следует, что $\sup\limits_{t\geq 0}|X(t)| \leq N$. Аналогично, полагая в формуле (11) $x(0) = 0$, получаем для семейства функционалов (10) оценку $|K_t(\sigma)| \le N\|\sigma\|_X$ для всех $t \ge 0$, откуда $\sup\limits_{t\ge 0}\|K_t\| \le N$.

$3) \Rightarrow 1)$. Следует из формулы (11) непосредственно.

Обратимся к асимптотической устойчивости.

В классическом определении [11, с. 68] предполагается, что асимптотически устойчивое решение устойчиво по Ляпунову, и это требование существенно, поскольку есть уравнения, имеющие решения, стремящиеся к нулю, но не являющиеся устойчивыми по Ляпунову. Однако для линейных уравнений ситуация упрощается: в частности, для обыкновенных дифференциальных уравнений из стремления решений к нулю следует устойчивость по Ляпунову. Разберем этот вопрос для уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть* X *– банахово пространство. Если при любых* $\sigma \in X$ и $x(0) \in R$ *решение уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, *то уравнение* (1) *X-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (4) вытекает, что условие $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ для всех решений уравнения (1) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t(\sigma) = 0$ при любом $\sigma \in X$. В таком случае $\sup\limits_{t\ge 0}|X(t)| < \infty$, а также $\sup\limits_{t\ge 0}|K_t(\sigma)| < \infty$ при любом $\sigma \in X$. Применяя теорему Банаха – Штейнхауса [12, с. 116], получаем, что $\sup\limits_{t\ge 0}\|K_t\| < \infty$. Ссылка на пп. 1) и 3) теоремы 3 завершает доказательство.

Теорема 5. *Пусть* X *– банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (1) *асимптотически X-устойчиво;*

2) *при любых* $x(0) \in R$ *и* $\sigma \in X$ *решение уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t(\sigma) = 0$ *при любом* $\sigma \in X$.

Доказательство теоремы 5, как и теоремы 3, нетрудно провести в последовательности $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$. Обратим внимание на переход $2) \Rightarrow 3)$. Из условия 2) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)x(0) = 0$ для любого $x(0) \in R$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t(\sigma) = 0$ для любого $\sigma \in X$. Первое равносильно тому, что $\lim_{t\to+\infty} X(t)=0$, однако второе не равносильно тому, что $\lim_{t\to+\infty}\|K_t\|=0$: указанная в условии 3) *поточечная* сходимость в пространстве линейных, ограниченных на X функционалов слабее сходимости по операторной норме $\|K_t\|$ – *равномерной* сходимости, для которой требуется общая для любых начальных функций σ скорость стремления значений $K_t(\sigma)$ к нулю. Далее, исследуя асимптотическую устойчивость уравнения (1), будем иметь в виду оба вида сходимости функционалов K_t – и поточечную, и равномерную. Для разделения этих случаев введем.

Определение 4. Назовем уравнение (1) *сильно асимптотически X-устойчивым*, если $\lim_{t\to\infty} X(t)=0$ и $\lim_{t\to\infty}\|K_t\|=0$.

Определение экспоненциальной устойчивости тоже переформулируем в терминах оценок на фундаментальное решение и норму функционала (10).

Теорема 6. *Уравнение* (1) *экспоненциально X-устойчиво, если и только если существуют такие* $N,\gamma>0$, *что для всех* $t\ge 0$ *справедливы оценки* $|X(t)|\le Ne^{-\gamma t}$ и $\|K_t\|\le Ne^{-\gamma t}$.

Доказательство проводится с помощью формулы (11) аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 1. Для устойчивости по Ляпунову и экспоненциальной устойчивости можно, как и для асимптотической устойчивости, разделить понятия устойчивости и сильной устойчивости. Однако в случае, когда пространство X – банахово, эти понятия совпадают в силу теоремы Банаха – Штейнхауса.

3. L_p - устойчивость по Ляпунову

В этом и последующих подразделах мы изучаем *X*-устойчивость по начальной функции из банаховых пространств суммируемых функций $L_p[0,\omega]$.

Отметим, что из интегральной ограниченности функции Коши следует не только интегральная, но и «поточечная» ограниченность фундаментального решения. Именно, справедлива

Лемма 1. *Если* $\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+\omega}|Y(s)|\,ds<\infty$, *то* $\sup_{t\ge 0}|X(t)|<\infty$.

Доказательство. Из равенств (5) и определений операторов S и T следует, что в условиях леммы справедливы соотношения

$$\sup_{t\ge 0}\int_t^{t+\omega}\left|X(s)\right|ds = N_1 < \infty, \quad \sup_{t\ge 0}\int_t^{t+\omega}\left|\dot X(s)\right|ds = N_2 < \infty. \tag{12}$$

Предположим, что $\sup\limits_{t\ge 0}\left|X(t)\right| = \infty$. Тогда найдется $t_0 \in R_+$ такое, что $\left|X(t_0)\right| > \dfrac{N_1}{\omega} + N_2$. Пусть $t \in [t_0, t_0+\omega]$. Тогда

$$\left|X(t) - X(t_0)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left|\dot X(s)\right|ds \le \int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|\dot X(s)\right|ds \le N_2,$$

значит, для любого $t \in [t_0, t_0+\omega]$ верна оценка $\left|X(t)\right| > \dfrac{N_1}{\omega}$, следовательно, $\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega}\left|X(s)\right|ds > N_1$, что противоречит первому из соотношений (12).

Теорема 7. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Уравнение* (1) L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{t\ge 0}\int\limits_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|^q ds < \infty$, *где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Доказательство. Рассмотрим семейство функционалов K_t, определяемых формулой (9) на пространстве $L_p[0,\omega]$. При каждом фиксированном $t \in R_+$ норма K_t определяется формулой [12, с. 153]

$$\left\|K_t\right\| = \left(\int_0^{\omega}\left|Y(t-s)\right|^q ds\right)^{1/q} = \left(\int_t^{t+\omega}\left|Y(s)\right|^q ds\right)^{1/q}. \tag{13}$$

Отсюда в силу теоремы 3 доказательство в части необходимости следует непосредственно, а в части достаточности – с учетом неравенства Гельдера и леммы 1.

Вопрос об устойчивости по Ляпунову для случая $p=1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 8. *Уравнение* (1) L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{t\ge 0}\left|Y(t)\right| < \infty$.

Доказательство. При каждом фиксированном $t \in R_+$ норма функционала K_t, заданного в пространстве $L_1[0,\omega]$, определяется формулой [12, с. 154]

$$\|K_t\| = \operatorname{ess}\sup_{s\in[0,\omega]} |Y(t-s)|. \tag{14}$$

Поскольку функция Y на каждом конечном отрезке кусочно-непрерывна и имеет конечное число скачков, $\operatorname{ess}\sup\limits_{s\in[0,\omega]} |Y(t-s)| = \sup\limits_{s\in[0,\omega]} |Y(t-s)|$. Следовательно, $\sup\limits_{t\ge 0}\|K_t\| < \infty$, если и только если $\sup\limits_{t\ge 0}|Y(t)| < \infty$. Остается заметить, что в силу первого из соотношений (5) из $\sup\limits_{t\ge 0}|Y(t)| < \infty$ следует, что $\sup\limits_{t\ge 0}|X(t)| < \infty$, и сослаться на теорему 3.

Из теорем 7 и 8 следует, что ограниченность функции Коши обеспечивает L_p-устойчивость уравнения (1) при всех $1 \le p \le \infty$, и этот результат сам по себе интересен. Однако сделаем несколько замечаний и о получении точных эффективных признаков ограниченности функции Коши. Это отдельная технически сложная задача, которая связана с расположением корней уравнений (8) и (9) на комплексной плоскости.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1, то функция Y ограничена. Если все корни уравнения (8) лежат вне круга $B[0,1]$, то требования к корням уравнения (9) можно ослабить: для ограниченности функции Y необходимо и достаточно, чтобы в круге $B(0,1)$ уравнение (9) не имело корней, а его корни, лежащие на границе круга, были простыми. Но этими условиями не исчерпываются классы уравнений с ограниченной функцией Коши: в работе [6] приведены примеры уравнений, для которых ограниченность функции Y сохраняется в случае, когда уравнение (8) имеет нули на границе круга $B[0,1]$.

Замечание 3. Неизвестно, существуют ли примеры L_p-устойчивых уравнений, функция Коши которых была бы неограниченна.

Замечание 4. В работе [13] построено семейство уравнений, которые, несмотря на то, что для них все корни уравнения (8) лежат на границе круга $B[0,1]$, имеют неограниченные решения. Однако приведенное построение неконструктивно, и не исключено даже, что начальная функция не попадает в $L_1[0,\omega]$.

4. Асимптотическая L_p- устойчивость

Справедлив следующий аналог леммы 1.

Лемма 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}|Y(s)|\,ds=0,$ *то* $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0.$

Доказательство. Из равенств (5) и определений операторов S и T следует, что в условиях леммы справедливы соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}|X(s)|\,ds=0,\quad \lim_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}|\dot X(s)|\,ds=0. \tag{15}$$

Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)\neq 0.$ Тогда найдутся $\varepsilon>0$ и последовательность $\{t_n\}_{n\in N}$ такие, что $|X(t_n)|\geq\varepsilon.$ По данному ε выберем N так, чтобы при всех $n\geq N$ выполнялось неравенство $\int_{t_n}^{t_n+\omega}|\dot X(s)|\,ds<\varepsilon/2.$

Пусть $t\in[t_n,t_n+\omega]$. Тогда при всех $n\geq N$

$$|X(t)-X(t_n)|\leq\int\limits_{t_n}^{t}|\dot X(s)|\,ds\leq\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega}|\dot X(s)|\,ds<\varepsilon/2,$$

значит, для любого $t\in[t_n,t_n+\omega]$ верна оценка $|X(t)|\geq\varepsilon/2,$ следовательно, $\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega}|X(s)|\,ds\geq\dfrac{\varepsilon\omega}{2}>0$, что противоречит первому из соотношений (15).

Теорема 9. *Пусть* $1<p\leq\infty$. *Уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_t^{t+\omega}|Y(s)|^q\,ds=0,$ *где* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Доказательство. При каждом фиксированном $t\in R_+$ норма функционала $K_t:L_p\to R$ определяется формулой (13), из которой следует, что если $\|K_t\|\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0,$ то и $\int\limits_t^{t+\omega}|Y(s)|^q\,ds\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0,$ что и доказывает теорему в части необходимости. Доказательство достаточности следует из той же формулы (13), леммы 2 и неравенства Гельдера.

Вопрос о сильной асимптотической устойчивости для случая $p = 1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 10. *Уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

Доказательство. При каждом фиксированном $t \in R_+$ норма функционала $K_t : L_1 \to R$ определяется формулой (14), из которой с учетом кусочной непрерывности функции Y следует, что $\|K_t\| \underset{t\to\infty}{\to} 0,$ если и только если $Y(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0.$ Остается заметить, что в силу первого из равенств (5) из $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0.$

Понятия асимптотической L_1- устойчивости и сильной асимптотической L_1- устойчивости неэквивалентны, что показывает проведенное в работе [14] исследование уравнений вида

$$\dot{x}(t) \pm \dot{x}(t-1) = -bx(t) + cx(t-1), \quad t \in R_+. \tag{16}$$

Уравнение (16) асимптотически L_1- устойчиво, если и только если $|c| < b;$ при этом если $1 < p \le \infty,$ то уравнение (16) сильно асимптотически L_p- устойчиво, а при $p = 1$ сильная асимптотическая устойчивость теряется.

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво для всех* $p \ge 1$.

Исследуем, с какими условиями на параметры уравнения (1) связано условие $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0.$ Для этого нам понадобится ряд простых утверждений об асимптотике решений линейных разностных уравнений.

Рассмотрим начальную задачу для линейного неоднородного разностного уравнения K-го порядка с коэффициентами a_k из уравнения (1), дополненного нулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} &y_n = \sum_{k=1}^{K} a_k y_{n-k} + f_n, \quad && n \in N; \\ &y_{-p} = 0, && p = 0, 1, \ \ldots, \ K-1. \end{aligned} \tag{17}$$

Лемма 3. *Решение задачи* (17) *при любых* f_n, $n \in N$, *представимо в виде*

$$y_n = \sum_{m=1}^{n} H_{n-m} f_m, \quad n \in N, \tag{18}$$

где последовательность $\{H_n\}_{n \in N_0}$ *является решением задачи* (6).

Доказательство. Очевидно, задача (17) однозначно разрешима. Подставим выражение (18) в уравнение из задачи (17) и используем свойства последовательности $\{H_n\}_{n \in N_0}$:

$$\sum_{k=1}^{K} a_k y_{n-k} + f_n =$$

$$= a_1 \sum_{m=1}^{n-1} H_{n-m-1} f_m + a_2 \sum_{m=1}^{n-2} H_{n-m-2} f_m + \ldots + a_K \sum_{m=1}^{n-K} H_{n-m-K} f_m + f_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} \left(a_1 H_{n-m-1} + a_2 H_{n-m-2} + \ldots + a_K H_{n-m-K} \right) f_m + f_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} H_{n-m} f_m + H_0 f_n = \sum_{m=1}^{n} H_{n-m} f_m = y_n .$$

Уравнение (17) обратилось в тождество, что и доказывает лемму.

Заметим, что последовательность $\{H_n\}_{n \in N_0}$ по отношению к задаче (17) является не чем иным, как дискретным аналогом функции Коши [15]. Не только решение уравнения из задачи (17) с нулевыми начальными условиями, но и произвольное его решение выражается через $\{H_n\}_{n \in N_0}$ и начальное значение y_0. Используем это.

Рассмотрим соответствующую задаче (17) однородную задачу с произвольными начальными условиями:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{K} a_k u_{n-k}, \quad && n \in N; \\ u_{-p} &= \varphi_p, && p = 0, 1, 2, \ldots, K-1. \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, задача (19) однозначно разрешима. Поставим в соответствие задаче (19) задачу (17), для которой функцию $\{f_n\}$ определим в соответствии с начальными данными $\{\varphi_p\}$:

$$f_n = \begin{cases} \sum_{k=n}^{K} a_k \varphi_{k-n}, & n = 1, \ldots, K, \\ 0 & n = K+1, K+2, \ldots. \end{cases}$$

Легко видеть, что решения задач совпадают, т.е. $u_n = y_n$ при всех $n \in N_0$

Лемма 4. *Если* $\lim_{n\to\infty} H_n = 0,$ *то для решения* $\{u_n\}$ *задачи* (19) *при любом выборе начальных условий имеем* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Доказательство. Перепишем задачу (19) в виде задачи (17) по схеме, приведенной выше. Очевидно, что

$$|f_n| \le \sum_{k=n}^{K} |a_k||\varphi_{k-n}| \le \max_{0\le k\le K-1} |\varphi_k| \sum_{k=0}^{K} |a_k| = A < \infty.$$

Учитываем, что $f_m = 0$ при $m \ge K+1$, и применяем лемму 3:

$$|z_n| \le \sum_{m=1}^{K} |H_{n-m}||f_m| \le A \sum_{m=1}^{K} |H_{n-m}| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теперь, пользуясь леммой 4 и тем, что скачки функции Коши Y уравнения (1) определяются разностным уравнением (6), установим связь между условием $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ и расположением корней уравнения (8).

Лемма 5. *Если* $\lim_{n\to\infty} H_n = 0,$ *то все корни уравнения* (8) *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Доказательство. Предположим, что существует корень z_0 уравнения (8), лежащий в круге $B[0,1]$. Тогда число $1/z_0$ является корнем характеристического многочлена уравнения (19) и представимо в виде $1/z_0 = e^{\alpha + i\beta}$, где $\alpha \ge 0$. Поскольку коэффициенты уравнения (19) вещественны, выбирая в качестве начальных условий $u_{-p} = e^{-\alpha p} \cos\beta p,$ а затем $u_{-p} = -e^{-\alpha p} \sin\beta p,$ $p = 0, 1, 2, \ldots, K-1,$ находим следующие два решения уравнения (19): $v_n = e^{\alpha n} \cos\beta n$ и $w_n = e^{\alpha n} \sin\beta n.$ Из леммы 4 следует, что если $\lim_{n\to\infty} H_n = 0,$ то $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} w_n = 0,$ что невозможно, так как при $\alpha \ge 0$ и $n \in N$ $v_n^2 + w_n^2 = (e^{\alpha n} \cos\beta n)^2 + (e^{\alpha n} \sin\beta n)^2 = e^{2\alpha n} \ge 1$.

Теорема 11. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то все корни уравнения* (8) *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Доказательство. Допустим, что у уравнения (8) есть корни в круге $B[0,1]$. Тогда из леммы 5 получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} H_n \neq 0,$ следовательно, найдутся число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{n_k\}_{k\in N}$ такие, что $\left|H_{n_k}\right| \geq \varepsilon.$ Пусть $t_k = hn_k$ – точка, в которой функция Y имеет скачок величиной H_{n_k}. Тогда $\left|Y(t_k) - \lim\limits_{\delta\to+0} Y(t_k - \delta)\right| = \left|H_{n_k}\right| \geq \varepsilon$, откуда следует, что функция Y не может иметь предела при $t \to +\infty$.

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0,$ *то оператор* $I - S$ *обратим в любом из пространств* $L_p(R_+),\ 1 \leq p \leq \infty.$

Доказательство. В работе [16, следствие 2.2.12] показано, что если оператор $I - S$ обратим в одном из пространств $L_p(R_+),\ 1 \leq p \leq \infty,$ то он обратим и во всех остальных. С другой стороны, в работе [17] показано, что оператор $I - S$ обратим в пространстве $L_\infty(R_+),$ если и только если все корни уравнения (8) лежат вне круга $B[0,1]$. Следовательно, обратимость в $L_\infty(R_+)$ вытекает из теоремы 11.

Итак, в силу теорем 10 и 11, если уравнение (1) сильно асимптотически L_1-устойчиво, то все корни уравнения (8) лежат вне круга $B[0,1].$ Теперь покажем, что́ в этом случае можно добавить о функции Коши к тому, что $Y(t) \to 0$ при $t \to \infty.$

При работе с автономными уравнениями оказывается полезной функция $g(\lambda),\ \lambda \in C,$ которую мы назовем *характеристической*. Она имеет вид

$$g(\lambda) = \lambda(1 - g_S(\lambda)) + g_T(\lambda),$$

где $g_S(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k e^{-\lambda hk}$, а $g_T(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j e^{-\lambda hj}.$

Функция $g(\lambda)$ является аналитической, а соответствующее характеристическое уравнение $g(\lambda) = 0$ имеет в комплексной плоскости счетный набор корней.

Легко видеть, что если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ – корень характеристической функции, то, выбрав в качестве начальных функций для уравнения (1) $\varphi(\xi) = e^{\alpha\xi}\cos\beta\xi,\ \psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi),$ получим, что функция $v(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ есть решение уравнения (1). Аналогично если положить $\varphi(\xi) = e^{\alpha\xi}\sin\beta\xi$, $\psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi),$ то найдем другое решение уравнения (1): $w(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t.$

Теорема 12. *Функция Коши уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$, *если и только если она имеет экспоненциальную оценку* (7).

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только необходимость. В соответствии с теоремой 1, следует убедиться, что уравнения (8) и (9) не имеют корней в круге $B[0,1]$. В силу теоремы 10 для уравнения (8) это верно. Допустим, что уравнение (9) имеет корень z_0, принадлежащий кругу $B[0,1].$ Тогда число $1/z_0$ представимо в виде $1/z_0 = e^{\alpha h + i\beta h}$, где $\alpha \geq 0.$ Обозначим $\lambda_0 = \alpha + i\beta.$ Несложно убедиться, что если z_0 – корень уравнения (9), то характеристическая функция $g(\lambda)$ имеет корень $\lambda_1 = \alpha + i\beta_1$ с такой же вещественной частью α. Следовательно, в силу приведенных выше рассуждений функции $v(t) = e^{\alpha t}\cos\beta_1 t$ и $w(t) = e^{\alpha t}\sin\beta_1 t$ являются решениями уравнения (1).

Из теоремы 10 следует $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0,$ что невозможно, так как из сделанного выше предположения $\alpha \geq 0$ получаем

$$v^2(t) + w^2(t) = (e^{\alpha t}\cos\beta t)^2 + (e^{\alpha t}\sin\beta t)^2 = e^{2\alpha t} \geq 1.$$

Непосредственно из теорем 10 и 12 вытекает также

Следствие 3. *Уравнение* (1) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (7).

Таким образом, для уравнений нейтрального типа сохранилось свойство функции Коши, хорошо известное для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа: если функция Коши стремится к нулю, то только по экспоненциальному закону! Но это не означает полного совпадения асимптотических свойств: для ФДУ запаздывающего типа вместе с функцией Коши *все решения* однородного уравнения стремятся к нулю только по экспоненциальному закону. Для уравнения (1) бесконечно много решений (в том числе фундаментальное решение) могут стремиться к нулю медленнее экспоненты: уже в работе [18] был приведен пример уравнения вида (16), имеющего решения, которые стремятся к нулю как степенная функция.

5. Экспоненциальная L_p - устойчивость

При $X = L_p$ определение экспоненциальной X-устойчивости тоже допускает эквивалентную переформулировку в терминах функции Коши.

Лемма 6. *Если* $\int_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds \le Ne^{-\gamma t}$, *то* $|X(t)| \le Me^{-\gamma t}$.

Доказательство. Из равенств (5) и определений операторов S и T следует, что в условиях леммы при всех $t \in R_+$ справедливы соотношения

$$\int_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds \le M_1 e^{-\gamma t}, \quad \int_t^{t+\omega} |\dot X(s)|\,ds \le M_2 e^{-\gamma t}. \tag{20}$$

Допустим, найдется $t_0 \in R_+$ такое, что

$$\left|X(t_0)e^{\gamma t_0}\right| > e^{\gamma\omega}\left(\gamma M_1 + \frac{M_1}{\omega} + M_2\right).$$

Тогда если $t \in [t_0, t_0+\omega]$, то

$$\left|X(t)e^{\gamma t} - X(t_0)e^{\gamma t_0}\right| = \left|\int_{t_0}^{t}\left(X(s)e^{\gamma s}\right)' ds\right| \le \gamma \int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|X(s)e^{\gamma s}\right| ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|\dot X(s)e^{\gamma s}\right| ds \le \gamma e^{\gamma(t_0+\omega)}\int_{t_0}^{t_0+\omega}|X(s)|\,ds + e^{\gamma(t_0+\omega)}\int_{t_0}^{t_0+\omega}|\dot X(s)|\,ds \le \gamma e^{\gamma\omega}M_1 + e^{\gamma\omega}M_2,$$

значит, для любого $t \in [t_0, t_0+\omega]$ верна оценка $\left|X(t)e^{\gamma t}\right| > \dfrac{M_1 e^{\gamma\omega}}{\omega}$, следовательно, $e^{\gamma(t_0+\omega)}\int_{t_0}^{t_0+\omega}|X(s)|\,ds \ge \int_{t_0}^{t_0+\omega}\left|X(s)e^{\gamma s}\right| ds > M_1 e^{\gamma\omega}$, что противоречит первому из соотношений (20).

Теорема 13. *Пусть* $1 < p \le \infty$. *Уравнение* (1) *экспоненциально* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\int_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds \le Ne^{-\gamma t}$, *где* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. При каждом фиксированном $t \in R_+$ норма функционала $K_t : L_p \to R$ определяется формулой (13), из которой следует утверждение теоремы в части необходимости. Доказательство достаточности следует из той же формулы (13), леммы 6 и неравенства Гельдера.

Вопрос об экспоненциальной устойчивости для случая $p = 1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 14. *Уравнение* (1) *экспоненциально* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (7).

Доказательство. При каждом фиксированном $t \in R_+$ норма функционала $K_t : L_1 \to R$ определяется формулой (14), из которой следует, что $\|K_t\| \le Ne^{-\gamma t}$, если и только если $|Y(t)| \le Ne^{-\gamma t}$. Экспоненциальная оценка на фундаментальное решение следует из формулы (5).

Итак, экспоненциальная L_1- устойчивость в силу теоремы 9 эквивалентна экспоненциальной оценке функции Коши. Поскольку $L_p[0,\omega] \subset L_1[0,\omega]$, $p > 1$, экспоненциальная оценка функции Коши влечет экспоненциальную L_p-устойчивость уравнения (1) для всех $p > 1$. Интересен вопрос: существуют ли экспоненциально L_p-устойчивые уравнения, функция Коши которых не имеет экспоненциальной оценки?

При доказательстве следующей леммы используется схема доказательства леммы 2 из работы [19].

Лемма 7. *Пусть* λ_0 *– корень уравнения* $1 - g_S(\lambda) = 0$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется такой корень* μ_0 *того же уравнения, что* $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = \mathrm{Re}\,\mu_0$, *и в круге* $B(\mu_0, \varepsilon)$ *есть корень функции* $g(\lambda)$.

Доказательство. Поскольку функция $1 - g_S(\lambda)$ аналитическая, ее нули изолированы, поэтому можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы в круге $B(0,\varepsilon)$ функция $\eta(z) = 1 - g_S(\lambda_0 + z)$ имела единственный нуль $z_0 = 0$, а на границе $|z| = \varepsilon$ (которая является компактом) выполнялось неравенство $|1 - g_S(\lambda_0 + z)| \ge m > 0$. Обозначим $\lambda_k = \lambda_0 + \dfrac{2\pi k i}{h}$, где $k \in Z$. Очевидно, что $e^{\lambda_0 h} = e^{\lambda_k h}$, следовательно, $g_S(\lambda_0 + z) = g_S(\lambda_k + z)$.

Далее найдем такое $k_0 \in Z$, что $\left|\lambda_{k_0}\right|$ достаточно велико и при $|z| = \varepsilon$ справедлива оценка

$$\left|\frac{g_T(\lambda_{k_0}+z)}{\lambda_{k_0}+z}\right| \le \frac{\left|\sum_{j=0}^{J} b_j e^{-(\lambda_{k_0}+z)hj}\right|}{\left|\lambda_{k_0}\right|-\varepsilon} \le \frac{\sum_{j=0}^{J}\left|b_j\right| e^{(\varepsilon-\operatorname{Re}\lambda_0)hj}}{\left|\lambda_{k_0}\right|-\varepsilon} < m.$$

Обозначим $\mu_0 = \lambda_{k_0} = \lambda_0 + \dfrac{2\pi k_0 i}{h}$ (очевидно, что $\operatorname{Re}\lambda_0 = \operatorname{Re}\mu_0$) и рассмотрим в круге $B[0,\varepsilon]$ две функции: $\zeta(z) = 1 - g_S(\mu_0 + z)$ и $\xi(z) = \dfrac{g_T(\mu_0+z)}{\mu_0+z}$. С учетом приведенных выше оценок получаем, что при $|z| = \varepsilon$ выполнены неравенства $\left|\zeta(z)\right| \ge m > \left|\xi(z)\right|$. По теореме Руше [20] функции $\zeta(z)$ и $\zeta(z)+\xi(z)$ имеют в круге $B(0,\varepsilon)$ одинаковое количество нулей, а так как в этом круге функция $\zeta(z)$ имеет нуль, то есть нуль и у функции

$$\zeta(z)+\xi(z) = 1 - g_S(\mu_0+z) + \frac{g_T(\mu_0+z)}{\mu_0+z} = \frac{g(\mu_0+z)}{\mu_0+z},$$

а это эквивалентно тому, что функция $\dfrac{g(\lambda)}{\lambda}$, а значит, и функция $g(\lambda)$ имеет нуль в круге $B(\mu_0,\varepsilon)$.

Теорема 15. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Если уравнение* (1) *экспоненциально* L_p*-устойчиво, то все корни уравнения* (8) *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Доказательство. Пусть z_0 – корень уравнения (8) с наименьшим модулем. Допустим, что $z_0 \in B[0,1]$, т.е. $z_0 = e^{-\alpha h - i\beta h}$, где $\alpha \ge 0$. Тогда уравнение $1 - g_S(\lambda) = 0$ имеет корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Выберем $\varepsilon < \alpha + \gamma$, где γ – показатель экспоненты в определении экспоненциальной L_p-устойчивости, и найдем в соответствии с леммой 7 корень μ_0 уравнения $1 - g_S(\lambda) = 0$, такой, что $\operatorname{Re}\mu_0 = \alpha$, а в круге $B(\mu_0,\varepsilon)$ есть корень функции $g(\lambda)$, который обозначим через $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$. По построению, $\left|\alpha_1 - \alpha\right| < \varepsilon < \alpha + \gamma$, следовательно, $\alpha_1 + \gamma > 0$. Корню λ_1 соответствует решение уравнения (1) $x(t) = e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t,$ для которого произведение $|x(t)| e^{\gamma t} = e^{(\gamma+\alpha_1)t} |\cos \beta_1 t|$ есть неограниченная функция. Следовательно, уравнение (1) не является L_p-экспоненциально устойчивым, что противоречит условиям леммы. Значит, у уравнения (8) нет нулей в круге $B[0,1]$.

Теорема 16. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Уравнение* (1) *экспоненциально* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива оценка* (7).

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 14 с учетом того, что $L_p[0, \omega] \subset L_1[0, \omega]$. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1) экспоненциально L_p-устойчиво. Тогда по теореме 15 все корни уравнения (8) лежат вне круга $B(0,1)$. Далее, поскольку фундаментальное решение уравнения (1) имеет экспоненциальную оценку, по теореме 2 все корни уравнения (9) также лежат вне круга $B(0,1)$. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Следствие 4. *Если уравнение* (1) *экспоненциально* L_{p_0}*-устойчиво хотя бы при одном* $p_0 \ge 1$, *то оно экспоненциально* L_p*-устойчиво при всех* $p \ge 1$.

Таким образом, в шкале пространств L_p ($1 \le p \le \infty$) экспоненциальную устойчивость достаточно исследовать при одном p. Наиболее удобными, по-видимому, являются пространства L_1, L_2 или L_∞.

Не менее интересным является результат об эквивалентности любой экспоненциальной L_p-устойчивости оценке (7): в силу теоремы 16 существование оценки (7) можно взять за определение экспоненциальной устойчивости независимо от выбора пространства начальных функций L_p. Особенный эффект дает совмещение этого результата с теоремой 12: определением экспоненциальной устойчивости может служить условие $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = 0$!

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1963. – 548 с.

2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 484 с.

5. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 256, iss.7. – P. 2368–2391.

6. Баландин А.С., Малыгина В.В. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Математические труды. – 2020. – Т. 23, № 2. – С. 3–49.

7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

8. Баландин А.С., Малыгина В.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 7. – С. 17–27.

9. Власов В.В. Спектральные задачи, возникающие в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 69–83.

10. Симонов П.М., Чистяков А.В. Об экспоненциальной устойчивости линейнных дифференциально-разностных систем // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1997. – № 6. – С. 37–49.

11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.

13. Громова П.С., Зверкин А.М. О тригонометрических рядах, суммы которых являются непрерывными неограниченными функциями на вещественной оси – решениях уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4, № 10. – С. 1774–1784.

14. Малыгина В.В., Баландин А.С. Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа // Сибирский математический журнал. В печати.

15. Андрианов Д.Л. Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1993. – № 5. – С. 3–16.

16. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990. – 168 с.

17. Баландин А.С., Малыгина В.В. О разрешимости одного класса разностных уравнений // Вычислительная механика: сб. науч. тр. – 2006. – № 4. – С. 67–72.

18. Hahn W. Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzen-gleichungen mit konstanten Koeffizienten // Mathematische Annalen. – 1956. – Bd. 131. – P. 151–166.

19. Баландин А.С. Редукция дифференциальных уравнений нейтрального типа к уравнениям запаздывающего типа // Динамические системы. – 2020. – Т. 10 (38), № 1. – С. 7–22.

20. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

References

1. Bellman R., Cooke K.L. Differential-difference equations. New York-London, Academic Press, 1963, xvi+462 pp.

2. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Vvedenie v teoriiu differentsial'nykh uravnenii s otkloniaiushchimsia argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. 2nd ed., revised and augmented. Moscow, Nauka, 1971, 296 p.

3. Hale J. Theory of functional differential equations. Second edition. Applied Mathematical Sciences, Vol. 3. New York-Heidelberg, Springer-Verlag, 1977. x+365 pp.

4. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. Ustoichivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeistviem [Stability and periodic modes of controlled systems with aftereffect]. Moscow, Nauka, 1981, 484 p.

5. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation. *Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 256, iss. 7, pp. 2368–2391.

6. Balandin A.S., Malygina V.V. Asimptoticheskie svoistva reshenii odnogo klassa differentsial'nykh uravnenii neitral'nogo tipa [Asymptotic properties of solutions for a class of differential equations of neutral type]. *Siberian Advances in Mathematics*, vol. 43, no. 2, pp. 3-49.

7. Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. Introduction to the theory of linear functional-differential equations. Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3. Atlanta, GA, World Federation Publishers Company, 1995. ii+172 p.

8. Balandin A.S., Malygina V.V. On the exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 2007, vol. 51, no. 7, pp. 15–24.

9. Vlasov V.V. Spektral'nye zadachi, voznikaiushchie v teorii differentsial'nykh uravnenii s zapazdyvaniem [Spectral problems arising in theory of differential equations with delay]. *Sovremennaia matematika. Fundamental'nye napravleniia*, 2003, vol.1, pp. 69–83.

10. Simonov P.M., Chistiakov A.V. On the exponential stability of linear differential-difference systems. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 1997, vol. 41, no. 6, pp. 34-45.

11. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka, 1967. 472 p.

12. Liusternik L.A., Sobolev V.I. Kratkii kurs funktsional'nogo analiza [Short course of functional analysis]. Moscow, Vysshaia shkola, 1982. 271 p.

13. Gromova P.S., Zverkin A.M. O trigonometricheskikh riadakh, summy ko-torykh iavliaiutsia nepreryvnymi neogranichennymi funktsiiami na veshchestvennoi osi – resheniiakh uravnenii s zapazdyvaiushchim argumentom [Trigonometric series whose sum is a continuous unbounded function on the real axis and is a solution of an equation with deviating argument]. *Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 10, pp. 1774–1784.

14. Malygina V.V., Balandin A.S. Asimptoticheskaia ustoichivost' odnogo klassa uravnenii neitral'nogo tipa [Asymptotical stability of a class of equations of neutral type]. *Siberian Mathematical Journal*. In print.

15. Andrianov D.L. Boundary value problems and control problems for linear difference systems with aftereffect. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 1993, vol. 37, no. 5, pp. 1–12.

16. Kurbatov V.G. Lineinye differentsial'no-raznostnye uravneniia [Linear differential-difference equations]. With an English summary. Voronezh, Voronezhskiĭ Gosudarstvennyĭ Universitet, 1990. 168 pp.

17. Balandin A.S., Malygina V.V. O razreshimosti odnogo klassa razno-stnykh uravnenii [On solvability of a class of difference equations]. Vychislitel'naia mekhanika: sb. nauchn. tr., no. 4. Perm, Perm State Technical University, 2006, pp. 67–72.

18. Hahn W. Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzen-gleichungen mit konstanten Koeffizienten. *Mathematische Annalen*, 1956, bd. 131., s. 151–166.

19. Balandin A.S. Reduktsiia differentsial'nykh uravnenii neitral'nogo tipa k uravneniiam zapazdyvaiushchego tipa [Reduction of differential equations of neutral type to equations of a delayed type]. *Dinamicheskie Sistemy*, 2020, vol. 10 (38), no. 1, pp. 7-22.

20. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions in a complex variable]. Fifth edition. Moscow, Nauka, 1987. 688 p.

Статья получена: 16.07.2020

Статья принята: 01.09.2020

Сведения об авторах

Малыгина Вера Владимировна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mavera@list.ru).

Чудинов Кирилл Михайлович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: cyril@list.ru).

About the authors

Vera V. Malygina (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: mavera@list.ru).

Kirill M. Chudinov (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: cyril@list.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Малыгина, В.В. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа / В. В. Малыгина, К. М. Чудинов. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.3.01. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 3. – С. 7–31.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Малыгина В.В., Чудинов К.М. Об асимптотических свойствах функции Коши автономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 3. – С. 7–31. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Malygina V.V., Chudinov K.M. On asymptotic properties of the Cauchy function for autonomous functional differential equation of neutral type. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 3, pp. 7–31. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.01 (*in Russian*)