

DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.02

УДК 531/534:[57+61]

А.А. Киченко

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТАЦИИ ГУБЧАТОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБОЧЕЛЮСТНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

Костная ткань в различных отделах скелета подчиняется закону Вольфа: стремится стать оптимальной для действующей на соответствующую кость нагрузки, перестраивая себя посредством механизмов остеосинтеза и резорбции. Современные задачи биомеханики требуют изучения истории формирования костных структур во времени как при физиологических, так и при патологических нагрузках. Постоянно изменяющиеся нагрузки различной природы оказывают влияние на развитие и функционирование трабекулярной костной ткани. Одной из наиболее подверженных внешнему и внутреннему изменению костей является нижняя челюсть. Очень часто приходится сталкиваться с патологическими изменениями, вызванными неправильным нагружением различных участков костной ткани вследствие дисфункции зубного ряда, височно-нижнечелюстного сустава и т.п. Например, синдром Попова – Годона, связанный с потерей зуба, сопровождается патологической перестройкой окружающих костных тканей. Таким образом, математическое моделирование поведения губчатой костной ткани в зубочелюстной системе человека является одной из наиболее актуальных задач биомеханики и медицины. Трабекулярная костная ткань является неоднородным пористым анизотропным материалом. Неоднородность пористых материалов может быть описана методами количественной стереологии; при этом структурные особенности трабекулярной кости можно описать при помощи тензора структуры. Это возможно реализовать, имея как определяющее соотношение, связывающее тензор напряжений с тензорами структуры и деформации, так и кинетические уравнения, описывающие эволюцию тензора структуры и плотности костной ткани. Осуществлена постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани. Разработаны эффективные численные алгоритмы ее решения, реализованные в виде пакетов проблемно-ориентированных программ, проведена верификация модели и идентификация параметров модели. Все численные расчеты выполнялись с использованием программного продукта ANSYS. На ряде примеров показана эволюция губчатой костной ткани при изменении напряженно-деформированного состояния. Результаты показывают различный характер влияния изменения нагрузки на процесс формирования структуры и соответствуют закону Вольфа.

Ключевые слова: трабекулярная (губчатая) костная ткань, закон Вольфа, тензор структуры, адаптация трабекулярной кости, перестройка костной ткани, математическое моделирование, определяющие соотношения, кинетические уравнения, начально-краевая задача о перестройке трабекулярной костной ткани, зубочелюстная система, нижняя челюсть, ветвь нижней челюсти.

A.A. Kichenko

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

**MATHEMATICAL MODELING OF CANCELLOUS
BONE TISSUE ADAPTATION APPLIED
TO THE HUMAN MAXILLODENTAL SYSTEM**

The bone tissue in different parts of the skeleton conforms to Wolff's law: it aims to become optimal for the loading which acts on the corresponding bone; the bone is remodelling by means of osteosynthesis and resorption mechanisms. The modern problems of biomechanics demand research on the history of formation of bone structures in the course of time at both physiological and pathological loadings. Ever changing loadings of different nature have influence on development and functioning of the trabecular bone tissue. The mandible is one of the most liable to external and internal changes bones. Very often one has to deal with pathological changes caused by incorrect loading of different regions of bone tissue due to dysfunction of a dentition, a temporomandibular joint and so on. For example, the Popov-Godon's syndrome which connects with tooth loss is accompanied by pathological remodelling of the surrounding bone tissue. Thus, the mathematical modeling of the cancellous bone tissue behavior in the human maxillo dental system is one of the most topical problems of biomechanics and medicine. Trabecular bone tissue is a heterogeneous, porous, anisotropic material. Heterogeneity of spongy structure can be described by methods of quantitative stereology. At the same time, structural features of the trabecular bone can be described by means of the fabric tensor. This is possible to implement if there is both a constitutive relation which connects the stress tensor, the fabric tensor, and the strain tensor, and kinetic equations which describe the evolution of the fabric tensor and bone density. An initial boundary value problem on the trabecular bone tissue remodelling is stated. The effective numerical algorithm allowing to solve the problem is developed. This algorithm is implemented as a complex of problem-oriented programs. Verification of the model and identification of its parameters are carried out. All numerical calculations are performed using the ANSYS software. Trabecular bone tissue evolution is demonstrated on the set of model examples when the stress-strain state is changed. The results demonstrate different character of influence of changes of loading conditions on process of structure formation which follows from Wolff's law.

Keywords: trabecular (cancellous) bone tissue, Wolff's law, fabric tensor, trabecular bone adaptation, bone tissue remodelling, mathematical modelling, constitutive relation, evolution equation, initial boundary value problem on the trabecular bone tissue remodelling, maxillo dental system, mandible, ramus of mandible.

Введение

На развитие и функционирование опорно-двигательной системы человека влияют постоянно изменяющиеся нагрузки, имеющие как физиологическую, так и патологическую природу (например, такое изменение может происходить из-за врачебного вмешательства). Известно [1–14], что подобные изменения нагрузки имеют отдаленные во времени последствия и в первую очередь отражаются на организации структуры костной ткани [4].

Губчатая костная ткань является неоднородным пористым анизотропным материалом, механические свойства которого во многом определяются его внутренней архитектурой и подчиняются тем же прин-

ципам, что и инженерные конструкции [4, 6, 9, 12]. В кости непрерывно происходят различные адаптационные процессы, в частности под действием новой нагрузки в структуре трабекулярной костной ткани могут начаться адаптационные изменения, которые затем окажут влияние на кортикальную костную ткань.

Известно, что адаптационные процессы, протекающие в организме человека, подчиняются закону Вольфа (Wolff's law) [9]. Применительно к костной ткани закон Вольфа гласит, что архитектура губчатой кости в локальной области структурно приспосабливается к местному напряженному состоянию костной ткани [2, 4, 6, 9, 10]. При этом трабекулы в процессе перестройки выстраиваются вдоль главных направлений тензора напряжений [4, 6, 9, 10].

Несмотря на существующие в настоящее время методы, позволяющие получать изображения губчатой костной ткани *in vivo* [15], их применение в клинической практике ограничено возможно и практически не обладает прогностической функцией. Таким образом, возникает необходимость в прогнозировании долговременного отклика структуры на внешнее вмешательство методами математического моделирования.

Ранее автором была предложена и рассмотрена модель перестройки губчатой костной ткани с учетом взаимовлияния напряженно-деформированного состояния и структурных изменений, позволяющая спрогнозировать долговременный отклик структуры на внешнее вмешательство методами математического моделирования [2–4, 7]. Данная модель может быть использована для решения прикладных задач о перестройке губчатой костной ткани в различных отделах скелета человека [2–4, 7] в прогностических целях, при этом особый интерес представляет моделирование структуры в нижней челюсти человека.

1. Материалы и методы

Существует ряд математических моделей, описывающих адаптационные изменения в трабекулярной костной ткани, подчиняющихся закону Вольфа [2–4, 6–14]. В данной работе рассматривается процесс перестройки губчатой кости как упругого анизотропного тела, обладающего структурой согласно эволюционным соотношениям, впервые предложенным в работе [8] и примененным при практических расчетах в серии исследований [2–4, 6].

На мезо- и макроуровнях математически удобнее описывать губчатую структуру посредством тензора, пренебрегая свойствами отдельных трабекул [14]. Известно, что одним из наиболее удачных способов описания локальной структуры многих пористых и композиционных материалов является симметричный, положительно определенный тензор второго ранга, названный тензором структуры \tilde{N} [2–4, 6–9].

Тензор структуры, построенный в соответствии с ранее рассмотренной процедурой [4, 9], позволяет компактно описать неоднородность костной структуры; данный тензор также позволяет сформулировать соотношения, способные количественно описать свойства материала с учетом его строения и адаптационные изменения, происходящие в его микроструктуре [6, 9].

В предыдущих работах [2, 4, 9, 10] было показано, что существует определяющее соотношение, включающее в себя тензор структуры и связывающее напряженно-деформированное состояние в губчатой костной ткани с ее строением. А именно:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = (g_1 + g_2 e)(\text{tr } \tilde{\epsilon})\tilde{E} + (g_3 + g_4 e)\tilde{\epsilon} + g_5 (\tilde{\epsilon}\tilde{K} + \tilde{K}\tilde{\epsilon}) + \\ + g_6 (\text{tr}(\tilde{K}\tilde{\epsilon})\tilde{E} + (\text{tr } \tilde{\epsilon})\tilde{K}), \end{aligned} \quad (1)$$

где \tilde{K} – девиатор тензора структуры, нормированный таким образом, что $\text{tr } \tilde{K} = 0$ [8]; e – изменение доли твердого объема кости; g_1 – g_6 – константы [2, 9], имеющие размерность [ГПа]. Эти константы были определены в работе [13] после серии экспериментов на различных образцах губчатых костей человека и крупного рогатого скота.

Также на основе закона Вольфа [2, 6, 9] был описан предполагаемый механизм перестройки трабекулярной микроструктуры, происходящий вследствие адаптационных процессов и подробно рассмотренный в работах [2, 4, 8, 9]. Были получены следующие кинетические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}}{dt} = (h_1 + h_3 e)(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0) + h_4 \text{tr}(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0)\tilde{K} + \\ + h_2 \left((\text{tr}(\tilde{K}(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0)))\tilde{E} - \frac{3}{2}(\tilde{K}(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0) + (\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0)\tilde{K}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$\frac{de}{dt} = (f_1 + f_2 e)(\text{tr } \tilde{\epsilon} - \text{tr } \tilde{\epsilon}^0) + f_3 (\text{tr } (\tilde{K}(\tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^0))), \quad (3)$$

где h_1-h_4 и f_1-f_3 – константы [2, 9], имеющие размерность [сут⁻¹], определяемые эмпирически так, чтобы перестройка костной ткани происходила за время адаптации губчатой кости к новым нагрузкам, т.е. примерно за 160 дней [3, 4, 6, 8, 9].

Для соотношений (1)–(3) была представлена постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани [2, 4]. Данная постановка может быть использована для решения вопросов об исследовании напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани и протекающих в ней процессов адаптации [3, 4, 7].

2. Результаты

Для представленной математической модели перестройки губчатой костной ткани был разработан и протестирован численный алгоритм ее решения. Данный алгоритм был реализован в виде комплексов проблемно-ориентированных программ [3, 4, 7], в серии вычислительных экспериментов была осуществлена идентификация и верификация параметров модели и на ряде примеров [3, 4, 7] показана эволюция губчатой костной ткани при изменении напряженно-деформированного состояния.

Для верификации разработанного алгоритма была решена классическая задача [8, 9], подробно разобранный в работе [3]. Результаты, полученные по истечении 160 сут, свидетельствуют, что в результате адаптационных процессов для нового напряженно-деформированного состояния была получена новая костная микроструктура [3], при этом время и характер сходимости, полученные из решения, совпадают с известными [8, 9] результатами. Заметим, что представленный пример является комплексным: действующее на трабекулярную микроструктуру давление, изначально являясь неоднородным, изменяется как по величине, так и по направлению. Данный пример сложен для детального анализа и необходим лишь для сравнения с результатами работы [8] и верификации представленного решения. Серия примеров [3, 4, 7], рассмотренная автором, показала хорошую работоспособность модели.

Далее рассмотрим задачу о формировании губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти человека и дальнейшей ее адаптации к испытываемым нагрузкам. Известно, что трабекулы в альвеолярном отростке и

ветви нижней челюсти выстраиваются вдоль линий главных напряжений, т.е. вдоль главных направлений тензора напряжений и образуют арочную архитектуру в ветви нижней челюсти [1, 5] (рис. 1, 2).

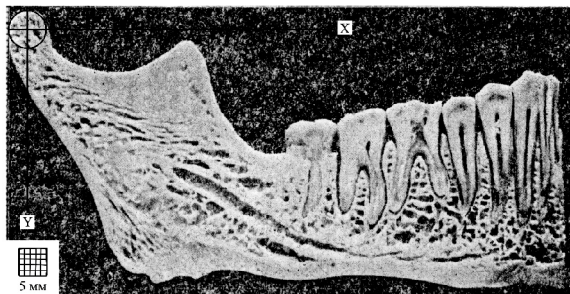


Рис. 1. Губчатая костная ткань нижней челюсти [5]

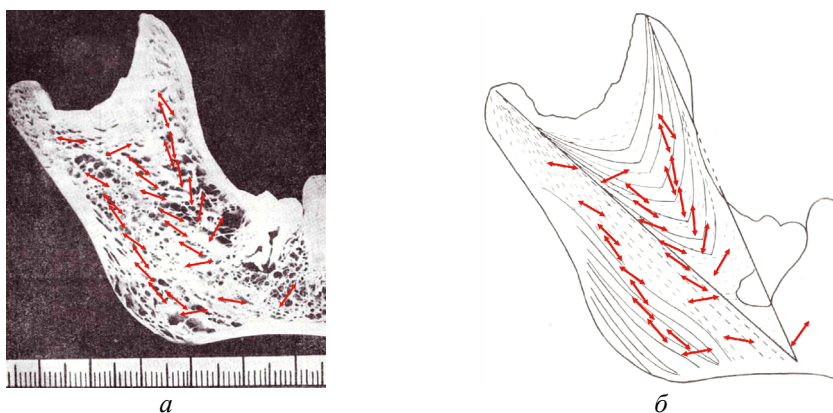


Рис. 2. Структура ветви нижней челюсти (а) [1], траектории ветви нижней челюсти (б) [1] и главные направления тензора структуры (а и б) [4]

Ранее было показано [4, 6, 7], что тензор структуры с достаточной степенью точности может описывать структуру в ветви нижней челюсти, при этом главные оси тензора структуры совпадали с траекториями трабекул, полученными в работе [1], и траекториями напряжений, полученными в работе [16] методом фотоупругости. Таким образом, представленная модель может описать особенности формирующейся под воздействием изменяющегося биомеханического давления структуры костной ткани в различных отделах зубочелюстной системы.

Общая постановка данной задачи может быть представлена в следующем виде (рис. 3):

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} = 0, \quad \bar{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C}(\tilde{K}, e)\tilde{\epsilon}, \quad \bar{x} \in V \cup S, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{K}}{dt} = \tilde{f}_1(\tilde{\epsilon}, \tilde{K}, e), \quad \text{tr } \tilde{K} = 0, \quad \bar{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (6)$$

$$\frac{de}{dt} = f_2(\tilde{\epsilon}, \tilde{K}, e), \quad \bar{x} \in V, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}), \quad \bar{x} \in V \cup S, \quad t \geq 0; \quad (8)$$

$$\vec{n} \cdot \tilde{\sigma}|_{S_{\sigma k}} = \vec{P}_k, \quad t \geq 0, \quad k=1,2,3; \quad (9)$$

$$\vec{n} \cdot \tilde{\sigma}|_{S_{\sigma 4}} = 0, \quad t \geq 0; \quad (10)$$

$$\vec{u}|_{S_u} = 0, \quad t \geq 0; \quad (11)$$

$$t=0: \quad \tilde{K} = \tilde{K}^0, \quad e = e^0, \quad \bar{x} \in V; \quad (12)$$

$$t=0: \quad \vec{P}_k = \vec{P}_k^0, \quad \bar{x} \in S_{\sigma k}, \quad k=1,2,3; \quad \vec{u} = 0, \quad \bar{x} \in S_u. \quad (13)$$

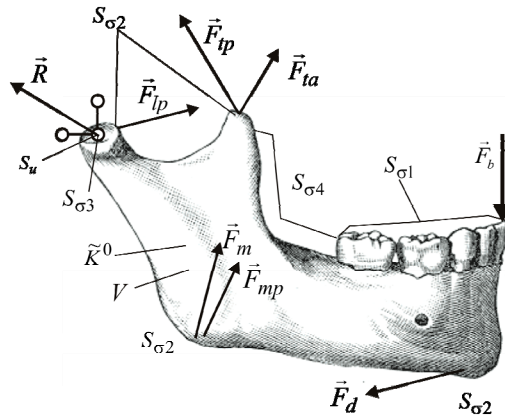


Рис. 3. Постановка задачи о перестройке губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти человека

В начальный момент времени структура губчатой костной ткани в ветви нижней челюсти считалась однородной и была задана нормированным шаровым тензором структуры. Такая структура может соответствовать ситуации, когда на нижнюю челюсть не оказывали влияния никакие нагрузки, т.е. челюсти новорожденного ребенка. В дальнейшем при приложении нагрузок структура нижней челюсти должна приобрести характерный вид (см. рис. 2, б).

Расчет напряженно-деформированного состояния производился с помощью метода конечных элементов в пакете ANSYS, определение параметров структуры (доли твердого объема кости и девиатора тензора структуры) осуществлялось в MATLAB [4, 7]. Была построена двумерная конечно-элементная модель нижней челюсти [4, 7, 17], показанная на рис. 4. Для ее задания использовался двумерный конечный элемент Plane182. Численное интегрирование кинетических уравнений осуществлялось методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

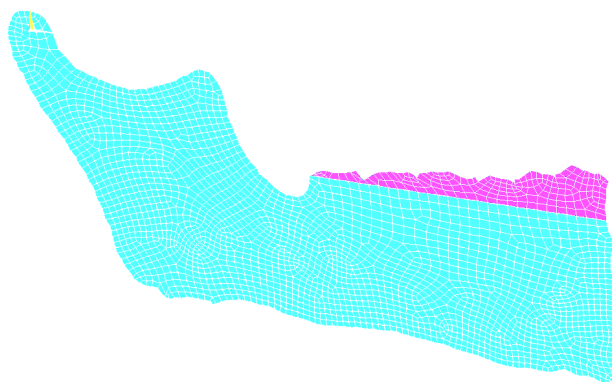


Рис. 4. Конечно-элементная модель нижней челюсти

Были рассмотрены различные варианты приложения нагрузки в начальный момент времени [4, 17]. Необходимо отметить, что наиболее наглядно начальное напряженное состояние позволял представить вариант области без учета зубного ряда. В результате получилось, что показанная на рис. 5 интенсивность напряжений в ветви нижней челюсти качественно совпадает с траекториями напряжений, полученными в работах [4, 16]. Результаты также совпадают с результатами из работы [17] для данной области без учета параметров структуры.

Что касается распределения трабекул в ветви нижней челюсти, то, как показали вычислительные эксперименты, отведенных 160 дней недостаточно для того, чтобы главные оси девиатора тензора структуры стали соосными с главными осями тензора напряжений. Вероятно, структуре требуется больше времени для ее адаптации к физиологическому напряженному состоянию. Это соответствует известным фактам: полностью трабекулярная структура формируется лишь к 16–18 годам [5].

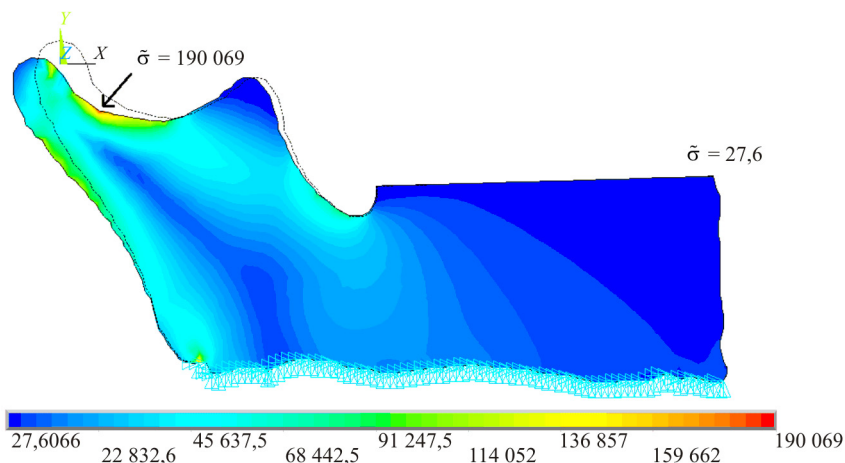


Рис. 5. Интенсивность напряжений по Мизесу

Однако же по истечении 200 дней в ветви нижней челюсти можно наблюдать стремление тензора структуры ориентироваться таким образом, чтобы сформировать структуру, показанную на рис. 2, *а*. По истечении 300 дней можно заметить формирование характерной для данной области арочной структуры (рис. 6, *а*). Для удобства представления главные направления девиатора тензора структуры показаны интегрально и наложены на картину интенсивности напряжений, наблюдаемой в ветви нижней челюсти.

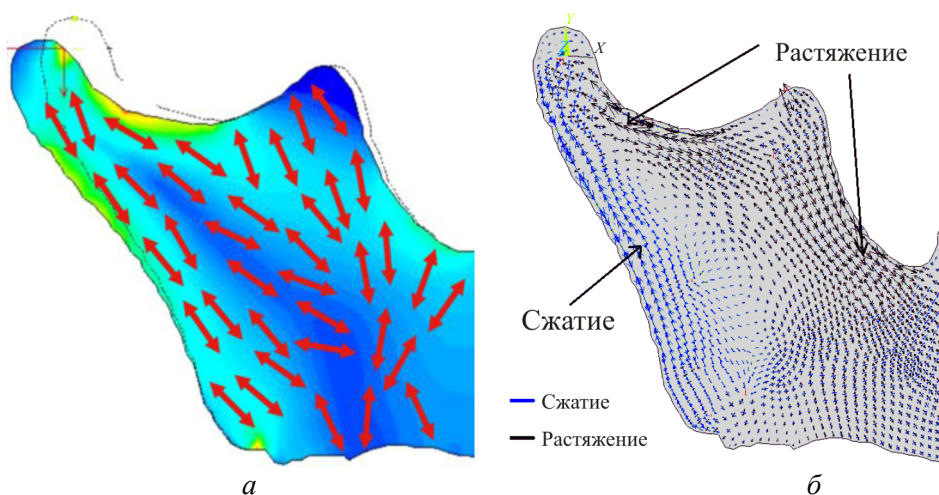


Рис. 6. Главные направления девиатора тензора структуры в ветви нижней челюсти (*а*) и упрощенное представление распределения напряжений: главные направления, полученные в ANSYS [7] (*б*)

Можно заметить также, что ориентация главных направлений тензора структуры в ветви нижней челюсти, которые показывают, как ориентированы трабекулы внутри костной ткани, качественно совпадает с главными направлениями тензора напряжений (рис. 6, а, б).

Более точное определение параметров модели и характерного времени перестройки является предметом нашего дальнейшего исследования.

Полученная по истечении 160 сут доля твердого объема кости была подробно рассмотрена в работах [4, 7] и в данной работе не приводится. Отметим, что для заданных условий нагружения результаты распределения плотности костного вещества качественно совпадают с распределением пористости, которое было показано на рис. 1.

Заключение

В работе рассмотрена модель перестройки губчатой костной ткани с учетом определяющего соотношения и кинетических уравнений феноменологической теории [4, 9], описывающих изменения трабекулярной архитектуры на мезоуровне с помощью тензора структуры. Осуществлена постановка задачи о перестройке губчатой костной ткани и рассмотрена перестройка костной ткани в ветви нижней челюсти. Полученные результаты достаточно схожи с траекториями напряжений и структуры, известными из литературы. Таким образом, представленная модель отражает закономерности формирования костной ткани в различных отделах скелета человека и может быть использована, например, для описания отклика зубочелюстной системы на изменяющееся биомеханическое давление.

В частности, представляет интерес моделирование поведения костной ткани в районе вживления имплантата, например при синдроме Попова – Годона [5] или какой-либо функциональной травме [1, 6], с последующим замещением дефектов зубного ряда. Одной из важнейших проблем современной стоматологии является атрофия челюстных костей при частичной или полной вторичной адентии. Потеря постоянных зубов и отсутствие своевременного восстановительного лечения являются основными этиологическими факторами развития «патологического» типа атрофии альвеолярного отростка.

Решение подобных задач в дальнейшем позволит планировать лечение различных заболеваний зубочелюстной системы и глубже по-

нять механизмы ее функционирования. Появляется возможность прогнозировать результаты отдаленного врачебного вмешательства при индивидуальном подходе к каждому пациенту.

Благодарности

Автор выражает благодарность д-ру техн. наук, профессору кафедры ВММБ ПНИПУ Юрию Ивановичу Няшину, канд. техн. наук, доценту кафедры ВММБ Виктору Моисеевичу Тверье и аспиранту кафедры ВММБ Татьяне Николаевне Чиковой за оказанную помощь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края.

Список литературы

1. Бусыгин А.Т. Возрастные особенности строения восходящей ветви нижней челюсти. – Ташкент: Гос. мед. изд-во Министерства здравоохранения УзССР, 1961. – 171 с.
2. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 53–72.
3. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 4. – С. 36–52.
4. Киченко А.А. Перестройка структуры губчатой костной ткани: математическое моделирование // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 336–358.
5. Курляндский В.Ю. Ортодонтия, травматология, челюстное и лицевое протезирование: атлас. – М.: Издательство треста Медучпособие, 1970. – Т. II. – 404 с.
6. Няшин Ю.И., Подгаец Р.М. Экспериментальные методы в биомеханике. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 400 с.
7. Моделирование перестройки трабекулярной костной ткани в ветви нижней челюсти человека / Т.Н. Чикова, А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 292–300.
8. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture // Journal of Biomechanical Engineering. – 1992. – Vol. 114. – P. 129–136.
9. Cowin S.C. Bone mechanics handbook. – Second ed. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.

10. Cowin S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion // *Mechanics of Materials*. – 1986. – Vol. 5. – P. 251–260.
11. Cowin S.C. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium // *Journal of Biomechanical Engineering*. – 1986. – Vol. 108. – P. 83–88.
12. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. *Skeletal tissue mechanics*. – Second ed. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
13. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone / C.H. Turner, S.C. Cowen, J.Y. Rho, R.B. Ashman, J.C. Rice // *J. Biomechanics*. – 1990. – Vol. 23. – P. 549–561.
14. Zysset P.K., Curnier A. An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensor // *Mechanics of Materials*. – 1995. – Vol. 21. – P. 243–250.
15. Diagnostic imaging of trabecular bone microstructure for oral implants: a literature review / N. Ibrahim, A. Parsa, B. Hassan, P. van der Stelt, D. Wismeijer // *Dentomaxillofacial Radiology*. – 2013. – Vol. 42. – P. 160–169.
16. Photoelastic analysis of bone deformation in the region of the mandibular condyle during mastication / C. Meyer, J. Kahn, P. Boutemi, A. Wilk // *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery*. – 2002. – Vol. 30. – P. 160–169.
17. Никитин В.Н. Реализация методики коррекции прикуса человека // *Российский журнал биомеханики*. – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 48–57.

References

1. Busygin A.T. *Vozrastnyye osobennosti stroyeniya voskhodyashchey vetvi nizhney chelyusti* [Age features of the structure of the ascending mandible ramus]. Tashkent: Gos. med. izd-vo Ministerstva zdravookhraneniya UzSSR, 1961, 171 p.
2. On application of the theory of trabecular bone tissue remodelling / A.A. Kichenko, V.M. Tverier, Y.I. Nyashin, V.A. Lokhov. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 53–72.
3. Statement of initial boundary value problem on the trabecular bone tissue remodelling / A.A. Kichenko, V.M. Tverier, Y.I. Nyashin, V.A. Lokhov. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 36–52.
4. Kichenko A.A. Cancellous bone tissue remodelling: mathematical modelling. *Russian Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 336–358.
5. Kurlyandskiy V.Y. *Ortodontiya, travmatologiya, chelyustnoye i litsevoe protezirovaniye; atlas. T. II* [Orthodontics, traumatology, maxillary and facial prosthetics; atlas. Vol. II]. M.: Izdatbyuro tresta Meduchposobie, 1970, 404 p.
6. Nyashin Y.I., Podgaets R.M. *Eksperimentalnye metody v biomekhanike* [Experimental methods in biomechanics]. Perm: Permskiy Gos. Tekhnich. Univ., 2008, 400 p.
7. Modelling of cancellous bone tissue adaptation in the ramus of human mandible / T.N. Chikova, A.A. Kichenko, V.M. Tverier, Y.I. Nyashin. *Russian Journal of Biomechanics*, 2018, vol. 22, no. 3, pp. 292–300.

8. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1992, vol. 114, pp. 129–136.
9. Cowin S.C. Bone mechanics handbook. Second edition. New York: CRC Press, 2001, 1136 p.
10. Cowin S.C. Fabric dependence of an anisotropic strength criterion. *Mechanics of Materials*, 1986, vol. 5, pp. 251–260.
11. Cowin S.C. Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1986, vol. 108, pp. 83–88.
12. Martin R.B., Burr D.B., Sharkey N.A. Skeletal tissue mechanics. Second edition. New York: Springer-Verlag, 1998, 392 p.
13. Turner C.H., Cowen S.C., Rho J.Y., Ashman R.B., Rice J.C. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 1990, vol. 23, pp. 549–561.
14. Zysset P.K., Curnier A. An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensor. *Mechanics of Materials*, 1995, vol. 21, pp. 243–250.
15. Ibrahim N., Parsa A., Hassan B., van der Stelt P., Wismeijer D. Diagnostic imaging of trabecular bone microstructure for oral implants: a literature review. *Dentomaxillofacial Radiology*, 2013, vol. 42, pp. 160–169.
16. Meyer C., Kahn J., Boutemi P., Wilk A. Photoelastic analysis of bone deformation in the region of the mandibular condyle during mastication. *Journal of Cranio-Maxillofacial Surgery*, 2002, vol. 30, pp. 160–169.
17. Nikitin V.N. Realization of procedure of occlusion correction of the human. *Russian Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 48–57.

Статья получена: 10.06.2020

Статья принята: 11.09.2020

Сведения об авторе

Киченко Александр Александрович (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru).

About the author

Alexander A. Kichenko (Perm, Russian Federation) – Senior Research Scientist, Department of Computational Mathematics, Mechanics, and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolskii av., 29, e-mail: kichenko.alex@inbox.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Киченко, А. А. Математическое моделирование адаптации губчатой костной ткани применительно к зубочелюстной системе человека / А. А. Киченко. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.3.02. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 3. – С. 35–48.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Киченко А.А. Математическое моделирование адаптации губчатой костной ткани применительно к зубочелюстной системе человека // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 3. – С. 35–48. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.02

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Kichenko A.A. Mathematical modeling of cancellous bone tissue adaptation applied to the human maxillofacial system. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 3, pp. 35–48. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.02 (*in Russian*)