DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.05
УДК 517.929:517.983:330.4

В.П. Максимов

Пермский государственный национальный
исследовательский университет, Пермь, Россия

О ПОСТРОЕНИИ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДОСТИЖИМЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ С ДИСКРЕТНОЙ ПАМЯТЬЮ

Предлагаются основные конструкции и соотношения, позволяющие строить и программно реализовывать управляющие воздействия, решающие задачу о достижении заданных значений целевых функционалов для непрерывно-дискретной динамической экономико-математической модели с дискретной памятью при наличии полиэдральных ограничений на управляющие воздействия. Форма целевых функционалов, определяющих цель управления, охватывает широко распространенные конкретные виды функционалов, такие как многоточечные, интегральные и их линейные комбинации. Особенностью системы управления является наличие в ней фазовых переменных, одна часть которых зависит от непрерывного времени, другая – от дискретного времени. Эффекты последействия рассматриваемой системы ограничиваются ее дискретной памятью, сосредоточенной на заданной совокупности моментов времени. Полученные результаты базируются на основных положениях общей теории систем с непрерывным и дискретным временем. В конструктивной части исследования основная идея заключается в редукции исходной задачи к обобщенной проблеме моментов с учетом поточечных полиэдральных ограничений. Это позволяет свести описание множества достижимых значений целевых показателей и построение соответствующих программных управлений к решению конечной последовательности задач линейного программирования. Решение каждой такой задачи дает значения компонент управляющего воздействия на частичном промежутке. Из этих значений конструируется программное управление на всем промежутке. Упомянутые процедуры существенно используют оператор Коши рассматриваемой гибридной системы. Свойства такого оператора исследованы в цитированных предыдущих работах.

Полученные результаты представляют инструментальную основу для эффективного исследования и решения актуальных прикладных задач управления при ограниченных ресурсах управления.

Ключевые слова: экономико-математические модели, задачи управления, гибридные системы с последействием, множества достижимости, программные управления, проблема моментов, задачи оптимизации, полиэдральные ограничения, модели с дискретной памятью, управление с ограниченными ресурсами.

V.P. Maksimov

Perm State University, Perm, Russian Federation

ON THE CONSTRUCTION OF PROGRAM CONTROL IN THE PROBLEM ON ATTAINABLE VALUES OF ON-TARGET FUNCTIONALS FOR DYNAMIC ECONOMIC MODELS WITH DISCRETE MEMORY

Main constructions and relationships for program control actions are proposed as applied to the problem on attainable prescribed values of on-target functionals for continuous-discrete dynamic economic mathematical model with discrete memory under given polyhedral constrains with respect to control. The form of on-target functionals covers widely used kinds of functionals such as multipoint, integral ones and linear combinations of those. The feature of the control system under consideration is the presence of two kinds of the state variables, namely, a part of them depends on continues time, whereas others depend on discrete time. Aftereffect of the system is defined by its discrete memory located at a given collection of instants. The results are obtained on the basis of the principal statements from the general theory of continuous-discrete systems. In the constructive part of the research, the basic idea is the reduction of the original problem to a variant of the general moment problem with taking into account pointwise polyhedral constraints on controls. This allows us to construct estimates of the attainability set and to build program controls on the base of solutions to a series of linear programming problems. Every such a problem provides us with values of the program control on a partial segment. All these values are used while constructing the program control as a whole. The mentioned procedures use in essence the Cauchy operator to the hybrid system under consideration. The property of this operator are studied in the cited previous papers.

The obtained results constitute an instrumental basis for efficient studying and constructing solutions to urgent applied problems with constrained resources of control.

Keywords: economic mathematical models, control problems, hybrid systems with aftereffect, attainability sets, program control, moment problem, optimization, polyhedral constraints, models with discrete memory, control with constrained resources.

Введение

В этой статье мы продолжаем исследование задач управления для непрерывно-дискретных (гибридных) динамических моделей с последействием и полиэдральными ограничениями на управление, существенно используя результаты предыдущих работ [1–5]. Для модели, рассмотренной в работе [5], на основе полученного в ней описания множества достижимых значений целевых функционалов предлагаются конструкции и алгоритмы построения управляющих воздействий, позволяющих достигать заданных значений целевых показателей, если они принадлежат множеству достижимости. О роли множеств достижимости в теории управления можно судить по многочисленным публикациям, из которых мы здесь упомянем работы [6–15]. Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ достижимость понимается по отношению к значениям координат фазового вектора в конечный момент времени. Для задач управления моделями экономических систем характерно более широкое понимание целей управления, при котором эти цели задаются с помощью конечной системы целевых показателей, в число которых входят не только локальные, сосредоточенные в отдельных точках, но и интегральные характеристики поведения системы на всем промежутке управления в целом.

Динамика системы управления описывается совокупностью дифференциальных уравнений с запаздыванием и разностных уравнений с дискретным аргументом. Используемое в настоящей работе описание процессов (см. работу [5]) мотивируется наличием взаимодействия переменных, имеющих различный характер изменения – непрерывный (непрерывное производство) и дискретный (финансирование).

Для систем с непрерывным временем и кусочно-постоянным запаздывающим аргументом, определяющим дискретную составляющую памяти входящих в уравнения операторов, подробное обсуждение макроэкономических моделей можно найти в работе [15] и цитированных в ней источниках.

1. Постановка задачи

Напомним кратко данное в работе [5] описание рассматриваемой экономико-математической модели взаимодействия производственной подсистемы, описываемой уравнением

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &\sum_{i:\, t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i:\, t_i < t} B_i(t)z(t_i) + \\ &+ \int_0^t F(t,s)u(s)\,ds + f(t),\, t\in[0,T],\end{aligned} \tag{1}$$

и финансовой подсистемы, описываемой уравнением

$$\begin{aligned}z(t_i) = &\sum_{j<i} D_{ij}\, x(t_j) + \sum_{j<i} H_{ij}\, z(t_j) + \\ &+ \int_0^{t_i} G_i(s)v(s)\,ds + g(t_i),\;\; i = 1,\ldots,\mu.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь фазовая переменная $x\in R^n$ зависит от непрерывного времени $t\in[0,T]$, а фазовая переменная $z\in R^{\nu}$ зависит от дискретного времени $t_i, i = 0,1,\ldots,\mu,$ $t_i > t_{i-1},$ $t_0 = 0,$ $t_\mu = T.$ Конкретный характер взаимодействия определяется заданными матричными коэффициентами $A_j(t), B_j(t), D_{ij}, H_{ij}.$ Управления $u(t),$ $u:[0,T]\to R^{r_1},$ и $v(t),$ $v:[0,T]\to R^{r_2}$, реализуются с помощью интегральных операторов с ядрами $F(t,s)$ и $G_i(s)$ соответственно. Функции $f(t)$ и $g(t_i)$ интерпретируются как внешние воздействия на систему, например непредвиденные потери или возможные погрешности моделирования.

Начальное состояние системы (1)–(2) считается заданным:

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta. \tag{3}$$

Цель управления задается с помощью определенного на компонентах $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ вектор-функционала l:

$$l(x,z) = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \sum_{i=0}^{\mu} \Gamma_i z(t_i), \tag{4}$$

и представляет собой совокупность N равенств

$$l(x,z) = \beta, \ \beta \in R^N, \tag{5}$$

где β – вектор заданных целевых значений. Постоянные $(N \times n)$-матрица Ψ, $(N \times \nu)$-матрицы $\Gamma_i, i = 1,...,\mu$, и $(N \times n)$-матрица $\Phi(s)$ с измеримыми и ограниченными элементами считаются заданными. Общая форма (4) вектор-функционала l со значениями в R^N позволяет охватить разнообразные конкретные случаи целевых условий, возникающих в прикладных задачах. Соответствующие примеры приведены в работе [5].

Задача достижения целей (5) решается в предположении, что управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ стеснены ограничениями

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \le \gamma, \ \gamma \in R^{N_1}, \ t \in [0,T], \tag{6}$$

где Λ – заданная матрица размерностью $N_1 \times (r_1 + r_2)$; предполагается, что множество $V \subset R^{r_1 + r_2}$ решений системы линейных неравенств $\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \le \gamma$ непусто и ограничено.

Цель этой статьи – предложить для задачи (1)–(6) конструкции и алгоритмы построения управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, приводящих к выполнению целевых условий для достижимых значений показателей β.

2. Основные конструкции

Определим основные пространства для траекторий и управлений. Пусть $L^n[0,T]$ – пространство суммируемых функций $y:[0,T] \to R^n$ с нормой $\| y \|_{L^n} = \int_0^T | y(s) | \, ds$ ($|\cdot|$– норма в R^n); $L_2^r[0,T]$ – гильбертово пространство функций $u:[0,T]\to R^r$ с нормой, порожденной скалярным произведением $(u,v)=\int_0^T u'(s)v(s)ds$ ($(\cdot)'$ – символ транспонирования); $AC^n[0,T]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n}=|x(0)|+\|\dot{x}\|_{L^n}$. Зафиксируем множество $J=\{t_0,t_1,...,t_\mu\}$, $0=t_0<t_1<\ ...<t_\mu=T$, и обозначим через $FD^\nu(J)$ пространство функций $z:J\to R^\nu$ с нормой $\|z\|=\sum_{i=0}^{\mu}|z(t_i)|$.

Дальнейшие построения этой работы используют представление общего решения системы (1)–(2) в операторной форме [3]:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix}+ \\ +\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Fu \\ Gv \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь Y – фундаментальная матрица, $Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$; C – оператор Коши, $C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$; $z=\mathrm{col}(z(t_1),...,z(t_\mu))$, $(Fu)(t)=\int_0^t F(t,s)u(s)ds$, $Gv=\mathrm{col}(\int_0^{t_1}G_1(s)v(s)ds,...,\ \int_0^{t_\mu}G_\mu(s)v(s)ds)$, компоненты оператора Коши $C_{11}:L^n[0,T]\to AC^n[0,T]$, $C_{12}:R^{\mu\nu}\to AC^n[0,T]$, $C_{21}:L^n[0,T]\to R^{\mu\nu}$, $C_{22}:R^{\mu\nu}\to R^{\mu\nu}$ являются ограниченными операторами. Предполагается, что операторы $F:L_2^{r_1}[0,T]\to L^n[0,T]$, $G:L_2^{r_2}[0,T]\to R^{\mu\nu}$ также являются ограниченными операторами.

Обозначим далее

$$\beta_1=lY\begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix},\ \beta_2=lC\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},\ \tilde{\beta}=\beta-\beta_1-\beta_2. \tag{8}$$

Объединим компоненты $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ в общий вектор управлений $w(\cdot)=\mathrm{col}(u(\cdot),v(\cdot))\in L_2^r[0,T]=L_2^{r_1+r_2}[0,T]$.

Как показано в работе [5], целевые условия (5) приводятся к виду

$$\int_0^T M(s)w(s)dt = \tilde{\beta}, \tag{9}$$

где $M(s)$ – моментная $(N \times (r_1 + r_2))$-матрица с элементами из $L_2^1[0,T]$. В терминах этой матрицы дается описание множества достижимых целевых значений в задаче (1)–(6).

Приведем для этой матрицы определяющие соотношения, воспользовавшись представлением общего решения (7). Используя представление (4) целевого вектор-функционала l, представление (7) и обозначения (8), получаем

$$l(x,z) = \beta_1 + lC\begin{pmatrix} Fu \\ Gv \end{pmatrix} + \beta_2 = \int_0^T \Phi(s)\frac{d}{ds}(C_{11}Fu)(s)ds + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i(C_{12}Fu)_i +$$
$$+\int_0^T \Phi(s)\frac{d}{ds}(C_{12}Gv)(s)ds + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i(C_{22}Gv)_i,$$

где для $\mu\nu$-мерного вектор-столбца a через $(a)_i$ обозначен i-й ν-мерный вектор-столбец. Отсюда следует, что в блочном представлении моментной матрицы $M(s) = (M_1(s), M_2(s))$ блоки M_1 и M_2 определяются равенствами

$$\int_0^T M_1(s)u(s)ds = \int_0^T \Phi(s)\frac{d}{ds}(C_{11}Fu)(s)ds + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i(C_{21}Fu)_i \tag{10}$$

и

$$\int_0^T M_2(s)v(s)ds = \int_0^T \Phi(s)\frac{d}{ds}(C_{12}Gv)(s)ds + \sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i(C_{22}Gv)_i \tag{11}$$

после выполнения всех операций в правых частях и приведения подобных под знаками интегралов. Проведем в качестве примера соответствующие преобразования для равенства (10). Для этого в случае первого слагаемого воспользуемся представлением оператора C_{11} и его свойствами [3]. Имеем

$$(C_{11}Fu)(t) = \int_0^t C_{11}(t,s)\int_0^s F(s,\tau)u(\tau)d\tau ds,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(C_{11}Fu)(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}C_{11}(t,s)\int_0^s F(s,\tau)u(\tau)d\tau ds + \int_0^t F(t,s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^t \left\{ \int_s^t \frac{\partial}{\partial t}C_{11}(t,\tau)F(\tau,s)d\tau + F(t,s) \right\} u(s)ds.$$

Обозначая через $\theta(t,s)$ выражение в фигурных скобках, получаем окончательно для первого слагаемого в равенстве (10):

$$\int_0^T \Phi(s)\frac{d}{ds}(C_{11}Fu)(s)ds = \int_0^T \{\int_s^T \Phi(\tau)\theta(\tau,s)d\tau\}\, u(s)\, ds\,. \quad (12)$$

Проводя аналогичные преобразования, для второго слагаемого в равенстве (10) получаем

$$\sum_{i=1}^{\mu}\Gamma_i(C_{21}Fu)_i \;=\; \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\Gamma_i C_{21}^{ij}\,\chi_{[0,t_j]}(s)\int_s^{t_j} F(\tau,s)d\tau \right\} u(s)\, ds, \quad (13)$$

где C_{21}^{ij} – элементы матричного представления оператора C_{21}; $\chi_{[0,t_j]}(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0,\, t_j]$. Таким образом, из равенств (12), (13) следует представление

$$M_1(s) = \int_s^T \Phi(\tau)\theta(\tau,s)d\tau \;+\; \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu}\Gamma_i C_{21}^{ij}\,\chi_{[0,t_j]}(s)\int_s^{t_j} F(\tau,s)d\tau.$$

Напомним теперь некоторые обозначения из работы [5], используемые для описания множества достижимых значений целевых показателей. Для каждого $\lambda \in R^N$ вводится функция

$$y(t,\lambda) = \max(\lambda' \cdot M(t)\cdot w: \quad w \in V). \quad (14)$$

Далее для каждого $t \in [0,T]$ и каждого λ фиксируется совокупность точек $\{v_1(t,\lambda),...,v_k(t,\lambda)\}$ множества V, доставляющих значение $y(t,\lambda)$ функционалу $w \to \lambda' \cdot M(t)\cdot w,$ и вводится функция

$$w(t,\lambda) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} v_j(t,\lambda). \quad (15)$$

В таком случае множество S достижимых значений вектора $\tilde{\beta} \in R^N$ состоит из тех и только тех точек $\rho \in R^N$, для которых неравенство

$$\lambda' \rho \le \int_0^T \lambda' M(t)\, w(t,\lambda)\, dt \tag{16}$$

выполняется для всех $\lambda \in R^N$.

Дадим описание алгоритма построения программных управлений $u(t)$ и $v(t)$ с использованием построенной моментной матрицы $M(t)$.

1. Задание конечного набора λ_1, ..., λ_K векторов, определяющих при каждом $t \in [0,T]$ вместе с матрицей $M(t)$ градиент $\lambda' \cdot M(t)$ целевой функции в задаче (14).

2. Задание разбиения основного промежутка $[0,T]$ точками τ_i: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\sigma = T$.

3. Для фиксированного λ_k последовательно в точках τ_i решается задача

$$y(\tau_i, \lambda_k) = \max(\lambda'_k \cdot M(\tau_i) \cdot w : \quad w \in \mathcal{V}),\ i = 0,1,\ldots,\sigma - 1.$$

4. На каждом промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1,\ldots,\sigma$, значение w_{ik} условно оптимального (оптимального по направлению λ_k) кусочно-постоянного управления определяется равенством

$$w_{ik} = \arg\max(\lambda'_k \cdot M(\tau_i) \cdot w : \quad w \in V),\ i = 0,1,\ \ldots,\ \sigma - 1.$$

В случае неоднозначности операции argmax (экстремальное значение функционала достигается на грани многогранника) используется конструкция (15).

5. На основном промежутке $[0,\ T]$ k-е условно оптимальное управление w_k определяется равенством

$$w_k(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} w_{ik} \chi_{[\tau_{i-1}, \tau_i)}(t),\ t \in [0,T].$$

6. Для каждого k вычисляется

$$\rho_k = \int_0^T M(s) w_k(s) dt,\ k = 1,\ \ldots,\ K.$$

По построению, каждое ρ_k является достижимым значением для $\tilde{\beta}$, оно достигается на построенном в п. 5 кусочно-постоянном управлении $w_k(t)$.

7. Совокупность точек $\rho_k \in R^N$, $k = 1, ..., K$, определяет выпуклый многогранник. Любая точка ρ_0 этого многогранника может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации точек ρ_k:

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \, \rho_k, \ \ \omega_k \geq 0, \ \ \sum_{k=1}^{K} \omega_k = 1.$$

8. Управление $w_0(t)$, под действием которого достигается целевое значение ρ_0, определяется равенством

$$w_0(t) = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \ w_k(t), \ \ t \in [0, T].$$

Первые r_1 компоненты этого $(r_1 + r_2)$-мерного управления определяют компоненты управления $u(t)$, остальные – компоненты управления $v(t)$.

3. Иллюстрирующий пример

Построим программные управления для системы (15)–(16) работы [5]:

$$\dot{x}(t) = 0,5 \sum_{i<t} x(i) + 0,3 \sum_{i<t} z(i) + \int_0^t u(s)\,ds, \quad t \in [0, 4]; \tag{17}$$

$$z(i) = 0,4 \sum_{j<i} x(j) + 0,2 \sum_{j<i} z(j) + \int_0^i v(s)\,ds, \ \ i = 1, 2, 3, 4, \tag{18}$$

с нулевым начальным состоянием

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0 \tag{19}$$

и целевыми условиями

$$\int_0^4 x(t)\,dt = 10, \quad z(4) = 6. \tag{20}$$

Управления u и v стеснены следующими ограничениями:

$$0 \le u(t) \le 1;\ 0 \le v(t) \le 1;\ u(t)+v(t) \le 1;\quad t \in [0,4]. \tag{21}$$

Приведем представления компонент оператора Коши для системы (17)–(18):

$$(C_{11}f)(t) = \int_0^t [0,5\chi_1(s)+0,62\chi_2(s)+1,994\chi_3(s)]ds \cdot \int_0^1 f(s)ds +$$

$$+\int_0^t [0,5\chi_2(s)+0,87\chi_3(s)]ds \cdot \int_0^2 f(s)ds +$$

$$+\int_0^t [0,5\chi_3(s)]ds \cdot \int_0^3 f(s)ds + \int_0^t f(s)ds;$$

$$(C_{12}g)(t) = \int_0^t [0,3\chi_1(s)+0,36\chi_2(s)+1,134\chi_3(s)]ds \cdot g(1)+$$

$$+\int_0^t [0,3\chi_2(s)+0,51\chi_3(s)]ds \cdot g(2) + \int_0^t [0,3\chi_3(s)]ds \cdot g(3),$$

$$C_{21}f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4\int_0^1 f(s) \\ 0,88\int_0^1 f(s)ds + 0,4\int_0^2 f(s)ds \\ 2,4\int_0^1 f(s)ds + 1,08\int_0^2 f(s)ds + \ 0,4\int_0^3 f(s)ds \end{pmatrix},$$

$$C_{22}g = \begin{pmatrix} g(1) \\ 0,2\,g(1)+1,0g(2) \\ 0,48\,g(1)+0,2\,g(2)+1,0g(3) \\ 1,368\,g(1)+0,6\,g(2)+0,2\,g(3)+1,0g(4) \end{pmatrix},$$

где $\chi_i(s)$ – характеристическая функция отрезка [0, i].

В рассматриваемом случае для нахождения элементов моментной матрицы следует выполнить замену $f(s)=\int_0^s u(\tau)d\tau$, $g(i)=\int_0^i v(s)ds$ и подставить выражения для компонент решения (x,z) в компоненты заданного в этом примере целевого вектор-функционала (20). Действуя так, приходим к следующим выражениям:

$$\int_0^4 x(t)dt = 4,487\int_0^1 u(s)ds + 1,435\int_0^2 u(s)ds + 0,25\int_0^3 u(s)ds + 0,5\int_0^4 (4-s)^2 u(s)ds +$$

$$+ 2,637\int_0^1 v(s)ds + 0,855\int_0^2 v(s)ds + 0,15\int_0^3 v(s)ds;$$

$$z(4) = 2,4\int_0^1 (1-s)u(s)ds + 1,08\int_0^2 (2-s)u(s)ds + 0,4\int_0^3 (3-s)u(s)ds +$$

$$+ 0,4\int_0^3 (3-s)u(s)ds + 1,368\int_0^1 v(s)ds + 0,6\int_0^2 v(s)ds + 0,2\int_0^3 v(s)ds + 1,0\int_0^4 v(s)ds.$$

Таким образом, для элементов $M_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2$, моментной матрицы имеем:

$$M_{11}(s) = 4,487\chi_1(s) + 1,435\chi_2(s) + 0,25\chi_3(s) + 0,5(4-s)^2;$$
$$M_{12}(s) = 2,638\chi_1(s) + 0,855\chi_2(s) + 0,5\ \chi_3(s);$$
$$M_{21}(s) = 2,4\chi_1(s) + 1,08\chi_2(s) + 0,4\ \chi_3(s);$$
$$M_{22}(s) = 1,368\chi_1(s) + 0,6\chi_2(s) + 0,2\ \chi_3(s) + 1.$$

Далее с помощью описанного выше алгоритма для $K = 16$ и $\sigma = 20$ находятся достижимые значения компонент целевого вектор-функционала, они показаны на рис. 1. При этом черным цветом выделены три точки, образующие треугольник, содержащий заданный вектор целевых значений (точка с координатами (10; 6)), и указаны номера соответствующих направлений градиента при поиске условно оптимальных управлений.

Выделенным точкам соответствуют следующие управления:

$$u_3(s) = 1,0\chi_3(s), \quad v_3(s) = 1,0(1-\chi_3(s)), \quad s \in [0,4]$$

(здесь и ниже индекс компонент управления соответствует номеру направления оптимизации);

$$u_{14}(s) = 0, \quad v_{14}(s) = 1,0(1-\chi_1(s)), \quad s \in [0,4];$$
$$u_{15}(s) = 0, \quad v_{15}(s) = 1,0, \quad s \in [0,4].$$

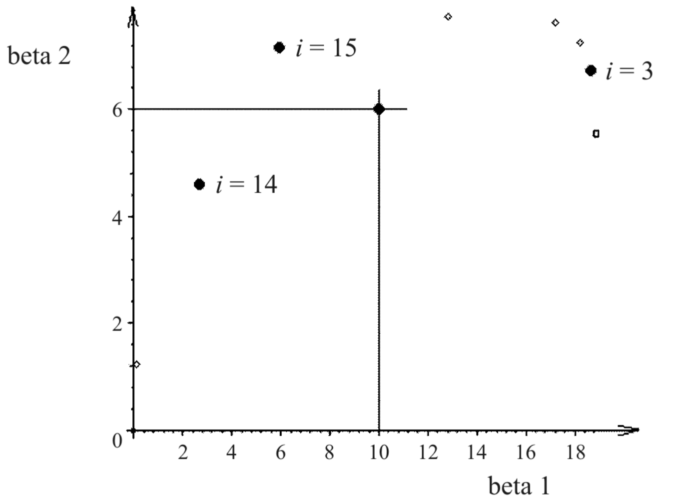

Рис. 1. Достижимые и заданные значения целевых показателей

Для нахождения искомого управления остается найти коэффициенты выпуклой линейной комбинации вершин упомянутого треугольника для внутренней точки (10; 6). Приведем координаты вершин треугольника с точностью до 0,001: (18,607; 6,760), (2,653; 4,634), (5,847; 7,168). Упомянутые коэффициенты выпуклой линейной комбинации определяются равенствами $\omega_1 = 0,424$, $\omega_2 = 0,393$, $\omega_3 = 0,183$. Таким образом, поставленная задача решается управлением $w_0(s) = \mathrm{col}(u_0(s), v_0(s))$, где

$$u_0(s) = 0,424\,u_3(s) + 0,393\,u_{14}(s) + 0,183\,u_{15}(s);$$
$$v_0(s) = 0,424\,v_3(s) + 0,393\,v_{14}(s) + 0,183\,v_{15}(s).$$

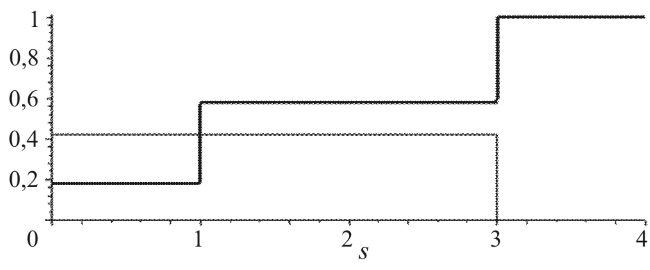

Рис. 2. Графики компонент построенного программного управления

Графики компонент этого управления представлены на рис. 2, где более тонкая линия соответствует компоненте $u_0(s)$.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00332).

Список литературы

1. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. – 2012. – Vol. 19, no. 1–2. – P. 49–62.

2. Maksimov V.P. On the *l*-attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, no. 32. – P. 310–313.

3. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. – 2019. – Vol. 29, no. 1. – P. 40–51.

4. Максимов В.П. К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 153–162.

5. Максимов В.П. Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 4. – С. 124–135.

6. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis // Optimization Methods and Software. – 2002. – Vol. 17. – P. 177–203.

7. Gurman V.I., Trushkova E.A. Estimates for attainability sets of control systems // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45, no. 11. – P. 1636–1644.

8. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems // Russian Mathematics. (Izvestiya VUZ. Mathematika). – 2013. – Vol. 57, no. 11. – P. 17–27.

9. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 4. – С. 195–210.

10. Никольский М.С. Оценивание множества достижимости сверху по включению для некоторых нелинейных систем управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 163– 170.

11. Гусев М.С., Осипов И.О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 86–99.

12. Baier R., Gerdts M., Xansa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control & Optimization. – 2013. – Vol. 3, no. 3. – P. 519–548.

13. The approximation of reachable sets of control problems with integral constraints on controls / K.G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V.N. Ushakov // Nonlinear Differential Equations and Applications. – 2007. – Vol. 14. – P. 57–73.

14. Nikolskii M.S., Aboubacar M. An estimation from within of reachable set of nonlinear R. Brocket integrator with small nonlinearity // Yugoslav Journal of Operations Research. – 2013. – Vol. 23, no. 3. – P. 355–365.

15. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Пермского университета. Серия «Экономика» = Perm University Herald. ECONOMY. – 2014. – № 1. – С. 14–27.

References

1. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class functional differential equations with continuous and discrete times. *Functional Differential Equations,* 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49–62.

2. Maksimov V.P. On the *l*-attainability sets of continuous discrete functional differential systems. *IFAC PapersOnLine,* 2018, vol. 51, no. 32, pp. 310–313.

3. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki,* 2019, vol. 29, no. 1, pp. 40–51.

4. Maksimov V.P. *K voprosu o postroenii i otsenkakh matritsy Koshi dlya system s posledeistviem* [On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN,* 2019, vol. 25, no. 3, pp. 153–162.

5. Maksimov V.P. *Dostizhimye znacheniya tselevykh funktsionalov v zadachakh ekonomicheskoi dinamiki* [Attainable values of on-target functionals in economic dynamic problems]. *Applied Mathematics and Control Sciences,* 2019, no. 4, pp. 124–135.

6. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. *Optimization methods and software,* 2002, vol. 17, pp. 177–203.

7. Gurman V.I., Trushkova E.A. Estimates for attainability sets of control systems. *Differential Equations,* 2009, vol. 45, no. 11, pp. 1636–1644.

8. Rodina L. I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems. *Russian Mathematics. (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 17–27.

9. Kostousova E.K. *O poliedral'nykh otsenkakh mnozhestv dostizhimosti differentsial'nykh system s bilineinoi neopredelennost'yu* [On polyhedral estimates

of attainability sets of differential systems with bilinear uncertainty]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN,* 2012, vol. 18, no. 4, pp. 195–210.

10. Nikolskii M.S. *Otsenivanie mnozhestva dostizhimosti sverkhu po vklyucheniyu dlya nekotorykh nelineinykh system upravleniya* [Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN,* 2019, vol. 25, no. 3, pp. 163–170.

11. Gusev M.I., Osipov I.O. *Asimptoticheskoe povedenie mnozhestv dostizhimosti na malykh vremennykh promezhutkakh* [Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN,* 2019, vol. 25, no. 3, pp. 86–99.

12. Baier R., Gerdts M., Xansa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, 2013, vol. 3, no.3, pp. 519–548.

13. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control problems with integral constraints on controls. *Nonlinear Differential Equations and Applications,* 2007, vol. 14, pp. 57–73.

14. Nikolskii M.S., Aboubacar M. An estimation from within of reachable set of nonlinear R. Brocket integrator with small nonlinearity. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2013, vol. 23, no.3, pp. 355–365.

15. Simonov P.M. Ob odnom metode issledovaniya dinamcheskikh modelei ekonomiki [On a method of the study of macroeconomics dynamic models]. *Perm University Herald. ECONOMY,* 2014, no. 1, pp. 14–27.

Статья получена: 01.06.2020

Статья принята: 22.06.2020

Сведения об авторе

Максимов Владимир Петрович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: maksimov@econ.psu.ru).

About the author

Vladimir P. Maksimov (Perm, Russian Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: maksimov@econ.psu.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Максимов, В.П. О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью / В. П. Максимов. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.3.05. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 3. – С. 89–104.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Максимов В.П. О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 3. – С. 89–104. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.05

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Maksimov V.P. On the construction of program control in the problem on attainable values of on-target functionals for dynamic economic models with discrete memory. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 3, pp. 89–104. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.05 (*in Russian*)