DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.01
УДК 517.977.56

Ш.М. Расулзаде[1,2]

[1]Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика
[2]Азербайджанский государственный педагогический университет,
Баку, Азербайджанская Республика

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Рассматривается одна задача оптимального управления с распределенными параметрами типа Москаленко с многоточечным функционалом качества. К настоящему времени теория необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина или же его следствий достаточно полно разработана для различных задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, т.е. для задач оптимального управления с сосредоточенными параметрами. Многие управляемые процессы описываются различными уравнениями в частных производных (процессы с распределенными параметрами). Задачам оптимального управления с распределенными параметрами присущи некоторые особенности и поэтому при исследовании задачи оптимального управления с распределенными параметрами, в частности при выводе различных необходимых условий оптимальности, возникают нетривиальные трудности. В частности, при исследовании случаев вырождения установленных необходимых условий оптимальности возникают принципиальные трудности.

Исследуется одна задача оптимального управления, описываемая системой уравнений в частных производных первого порядка с управляемым начальным условием, при предположении, что начальная функция является решением задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целевая функция (критерия качества) является многоточечной, поэтому возникает необходимость во введении нетрадиционного сопряженного уравнения не в дифференциальной (классической), а в интегральной форме.

С использованием одного варианта метода приращений и способа явной линеаризации исходной системы доказано необходимое условие оптимальности в форме аналога принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Известно, что принцип максимума Л.С. Понтрягина для различных задач оптимального управления является самым сильным необходимым условием оптимальности. Но принцип максимума Л.С. Понтрягина, являясь необходимым условием первого порядка, нередко вырождается. Такие случаи принято называть особыми, а соответствующие управления – особыми управлениями. Исходя из этих соображений в рассматриваемой задаче исследуется случай вырождения принципа максимума Л.С. Понтрягина для рассматриваемой задачи. С этой целью выведена формула приращения функционала качества второго порядка.

Введя вспомогательные матричные функции, удалось получить формулу приращения второго порядка, носящую конструктивный характер. Доказано необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина, управлений.

Доказанные необходимые условия оптимальности носят явный характер.

Ключевые слова: многоточечный функционал, формула приращения критерия качества, принцип максимума Понтрягина, особое управление, интегральная сопряженная система, необходимое условие оптимальности первого порядка, аналог принципа максимума Понтрягина, вспомогательные матричные функции, особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления, специальная формула приращения целевого функционала, линеаризованная система уравнений, начальная функция, задача Коши.

Sh.M. Rasulzade[1,2]

[1]Institute of Control Systems of Azerbaijan NAS, Baku, Azerbaijan Republic
[2]Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan Republic

REQUIRED OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH MULTIPOINT FUNCTIONAL

One specific optimal control problem with distributed parameters of the Moskalenko type with a multipoint quality functional is considered. To date, the theory of necessary first-order optimality conditions such as the Pontryagin maximum principle or its consequences has been sufficiently developed for various optimal control problems described by ordinary differential equations, i.e. for optimal control problems with lumped parameters. Many controlled processes are described by various partial differential equations (processes with distributed parameters). Some features are inherent in optimal control problems with distributed parameters, and therefore, when studying the optimal control problem with distributed parameters, in particular, when deriving various necessary optimality conditions, non-trivial difficulties arise. In particular, in the study of cases of degeneracy of the established necessary optimality conditions, fundamental difficulties arise.

In the present work, we study one optimal control problem described by a system of first-order partial differential equations with a controlled initial condition under the assumption that the initial function is a solution to the Cauchy problem for ordinary differential equations.

The objective function (quality criterion) is multi-point. Therefore, it becomes necessary to introduce an unconventional conjugate equation, not in differential (classical), but in integral form.

In the work, using one version of the increment method, using the explicit linearization method of the original system, the necessary optimality condition is proved in the form of an analog of the maximum principle of L.S. Pontryagin.

It is known that the maximum principle of L.S. Pontryagin for various optimal control problems is the strongest necessary condition for optimality. But the principle of a maximum of L.S. Pontryagin, being a necessary condition of the first order, often degenerates. Such cases are called special, and the corresponding management, special management. Based on these considerations, in the considered problem, we study the case of degeneration of the maximum principle of L.S. Pontryagin for the problem under consideration. For this purpose, a formula for incrementing the quality functional of the second order is constructed.

By introducing auxiliary matrix functions, it was possible to obtain a second-order increment formula that is constructive in nature. The necessary optimality condition for special controls in the sense of the maximum principle of L.S. Pontryagin is proved.

The proved necessary optimality conditions are explicit.

Keywords: multipoint functional, formula for incrementing the quality criterion, Pontryagin's maximum principle, special control, integral conjugate system, necessary first-order optimality condition, analogue of the Pontryagin maximum principle, auxiliary matrix functions special in the sense of the Pontryagin maximum principle of control, special formula for incrementing the objective functional, linearized system of equations, initial function, Cauchy problem.

Введение

В работе [1] А.И. Москаленко исследовал одну задачу оптимального управления, занимающую промежуточное положение между задачами оптимального управления системами с сосредоточенными, а также распределенными параметрами, и нашел необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В предлагаемой же работе подобная задача рассматривается в случае многоточечного критерия качества. Сначала приведено необходимое условие оптимальности типа принципа максимума с помощью сопряженной системы, а затем изучен случай вырождения принципа максимума Понтрягина (особый случай [2]). С применением модифицированного варианта метода, предложенного и развитого в работах [3–6], получено необходимое условие оптимальности особых управлений.

1. Постановка задачи

Пусть $T=[t_0,t_1], X=[x_0,x_1]$, точки $T_i, X_i, i=\overline{1,k}$, таковы, что $t_0<T_1<T_2<...<T_k\le t_1$, $x_0<X_1<X_2<...<X_k\le x_1$. Требуется найти минимальное значение многоточечного функционала

$$S(u)=\varphi\big(y(X_1),y(X_2),...,y(X_k)\big)+$$
$$+\int_{x_0}^{x_1} F\big(x,z(T_1,x),z(T_2,x),...,z(T_k,x)\big)dx \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\quad t\in T,\quad v(x)\in V\subset R^q,\quad x\in X, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}=f\big(t,x,z(t,x),u(t)\big),\quad (t,x)\in D=T\times X, \tag{3}$$

$$z(t_0,x)=y(x),\quad x\in X, \tag{4}$$

$$\dot{y}=g\big(x,y(x),v(x)\big),\quad x\in X, \tag{5}$$

$$y(x_0)=y_0\,. \tag{6}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ $\big(g(x,y,v)\big)$ – заданная n-мерная вектор-функция и непрерывная в $D\times R^n\times R^r$ $\left(X\times R^n\times R^q\right)$ вместе с частными производными по z (y) до второго порядка включительно; $\varphi(a_1,a_2,...,a_k)$ $\big(F(x,b_1,b_2,...,b_k)\big)$ – заданная и непрерывная в $R^{k\cdot n}$ $\left(X\times R^{k\cdot n}\right)$ вместе с частными производными по $(a_1,a_2,...,a_k)$ $\big((b_1,b_2,...,b_k)\big)$ до второго порядка включительно скалярная функция; U и V – заданные непустые и ограниченные множества; $u(t)$ $\left(v(x)\right)$ – кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий.

Пару $\left(u(t), v(x)\right)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ соответствует единственное решение $\left(z^o(t,x), y^o(x)\right)$ [1] задачи (3)–(6).

Допустимое управление $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u^o(t), v^o(x), z^o(t,x), y^o(x)\right)$ – оптимальным процессом.

2. Формула для приращения критерия качества

Пусть $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ – фиксированное допустимое управление, а $\left(\overline{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \overline{v}(t) = v^o(x) + \Delta v(x)\right)$ – произвольное допустимое управление. Через $\left(z^o(t,x), y^o(x)\right)$, $\left(\overline{z}(t) = z^o(t) + \Delta z(t),\right.$ $\left.\overline{y}(t) = y^o(x) + \Delta y(x)\right)$ обозначим соответствующие им решения задачи (3)–(6).

Из обозначений ясно, что $\left(\Delta z(t,x), \Delta y(x)\right)$ является решением задачи

$$\frac{d\Delta y(x)}{dx} = g\left(x, \overline{y}(x), \overline{v}(x)\right) - g\left(x, y(x), v(x)\right),\ \Delta y(x_0) = 0; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial t} = f\left(t, x, \overline{z}(t,x), \overline{u}(t)\right) - f\left(t, x, z(t,x), u(t)\right),$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta y(x). \qquad (8)$$

При этом приращение функционала качества (1) с помощью формулы Тейлора записывается в виде

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=S\left(\overline{u},\overline{v}\right)-S\left(u^o,v^o\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\left(y\left(X_1\right),...,y\left(X_k\right)\right)}{\partial a_i}\Delta y\left(X_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'\left(X_i\right)\frac{\partial^2\varphi\left(y\left(X_1\right),...,y\left(X_k\right)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y\left(X_j\right)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta y\left(X_i\right)\right\|\right]^2\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F'\left(x,z\left(T_1,x\right),...,z\left(T_k,x\right)\right)}{\partial b_i}\Delta z\left(T_i,x\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'\left(T_i,x\right)\frac{\partial F^2\left(x,z\left(T_1,x\right),...,z\left(T_k,x\right)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z\left(T_j,x\right)dx+o_2\times$$

$$\times\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta z\left(T_i,x\right)\right\|\right]^2\right). \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем $o_i\left(\alpha_i^2\right)\big/\alpha_i^2\to 0$ при $\alpha_i\to 0, i=1,2,$ т.е. $o_i\left(\alpha_i^2\right)$ имеет более высокий порядок малости, чем α_i^2.

Введем аналоги функций Гамильтона – Понтрягина

$$H\left(t,x,z,u,p^o\right)=p^{o'}f\left(t,x,z,u\right),\ M\left(x,y,v,q^o\right)=q^{o'}g\left(y,v\right),$$

где p^o, q^o – пока неизвестные вектор-функции. Тогда, используя соотношения (7), (8), приращение (9) функционала качества при помощи формулы Тейлора можно представить в виде

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi'\left(y\left(X_1\right),...,y\left(X_k\right)\right)}{\partial a_i}\Delta y\left(X_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'\left(X_i\right)\frac{\partial^2\varphi\left(y\left(X_1\right),...,y\left(X_k\right)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y\left(X_j\right)+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta y\left(X_i\right)\right\|\right]^2\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F'\left(x,z\left(T_1,x\right),...,z\left(T_k,x\right)\right)}{\partial b_i}\Delta z\left(T_i,x\right)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'\left(T_i,x\right)\frac{\partial F'\left(x,z\left(T_1,x\right),...,z\left(T_k,x\right)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z\left(T_j,x\right)dx+$$

$$+o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k}\left\|\Delta z\left(T_i,x\right)\right\|\right]^2\right)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p^0\left(t,x\right)\frac{\partial\Delta z\left(t,x\right)}{\partial t}dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[H\Big(t,x,\overline{z}\left(t,x\right),\overline{u}\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big)-$$

$$-H\Big(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big)\Big]dx\,dt+\int_{x_0}^{x_1}q^{0\prime}\left(x\right)\frac{\partial\Delta y\left(x\right)}{\partial x}dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[M\Big(x,\overline{y}\left(x\right),\overline{v}\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big)-M\Big(x,y^o\left(x\right),v^o\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big)\Big]dx\,dt. \qquad (10)$$

Ясно, что

$$\Delta z\left(t,x\right)=\Delta y\left(x\right)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\Delta z\left(\tau,x\right)}{\partial\tau}d\tau; \qquad (11)$$

$$\Delta y\left(x\right)=\int_{x_0}^{x}\Delta\dot{y}\left(s\right)ds. \qquad (12)$$

Для простоты изложения будем использовать обозначения:

$$\Delta_{\overline{u}(t)}H\left(t,x\right)=H\Big(t,x,z^o\left(t,x\right),\overline{u}\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big)-H\Big(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big);$$

$$H_z\left(t,x\right)=H_z\Big(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big);$$

$$H_{zz}\left(t,x\right)=H_{zz}\Big(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t\right),p^o\left(t,x\right)\Big);$$

$$\Delta_{\overline{v}(x)}M\left(x\right)=M\Big(x,y^o\left(x\right),\overline{v}\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big)-M\Big(x,y^o\left(x\right),v^o\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big);$$

$$M_y\left(x\right)\equiv M_y\Big(x,y^o\left(x\right),v^o\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big);$$

$$M_{yy}\left(x\right)\equiv M_{yy}\Big(x,y^o\left(x\right),v^o\left(x\right),q^o\left(x\right)\Big).$$

Учитывая эти обозначения и формулы (11), (12), из формулы (10) получим

$$\Delta S\left(u^o, v^o\right) = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_0}^{x_1} \alpha_i(x) \frac{\partial \varphi'\left(y(X_1), ..., y(X_k)\right)}{\partial a_i} \Delta \dot{y}(x)\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \Delta y'(X_i) \frac{\partial^2 \varphi\left(y(X_1), y(X_2) ..., y(X_k)\right)}{\partial a_i\, \partial a_j} \Delta y\left(X_j\right) +$$

$$+o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \left\|\Delta y(X_i)\right\|\right]^2\right) + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \beta_i(t) \frac{\partial F'\left(x, z(T_1, x), ..., z(T_k, x)\right)}{\partial b_i} \Delta z_t(t, x)\, dx\, dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F'\left(x, z(T_1, x), ..., z(T_k, x)\right)}{\partial b_i} \Delta y(x)\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 F\left(x, z(T_1, x), ..., z(T_k, x)\right)}{\partial b_i\, \partial b_j} \Delta z\left(T_j, x\right) dx +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p^{0'}(t, x) \Delta z_t(t, x)\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t)} H(t, x)\, dx\, dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_z(t, x) \Delta z(t, x)\, dx\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}(t)} H'_z(t, x) \Delta z(t, x)\, dx\, dt +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} q^{0'}(x) \Delta \dot{y}(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(x)} M(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} M'_y(x) \Delta y(x)\, dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t, x) H_{zz}(t, x) \Delta z(t, x)\, dx\, dt - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x)\, dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x)\, dx + \eta_1(\Delta u; \Delta v), \qquad (13)$$

где $\alpha_i(x)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{1,k}$ – характеристические функции отрезков $[x_0, X_i]$, $[t_0, T_i]$, $i = \overline{1,k}$ соответственно;

$$\eta_1(\Delta u; \Delta v) = o_1\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \left\|\Delta y(X_i)\right\|\right]^2\right) + \int_{x_0}^{x_1} o_2\left(\left[\sum_{i=1}^{k} \left\|\Delta z(T_i, x)\right\|\right]^2\right) dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_3\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|^2\right)dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)\Delta_{\overline{v}(x)}M_{yy}(x)\Delta y(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-\int_{x_0}^{x_1} o_4\left(\left\|\Delta y(x)\right\|^2\right)dx. \quad (14)$$

Далее, из формулы (13) имеем

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\frac{\partial\varphi'\left(y(X_1),\dots,y(X_k)\right)}{\partial a_i}\Delta\dot{y}(x)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}\frac{\partial F'\left(x,z(T_1,s),\dots,z(T_k,s)\right)}{\partial b_i}ds\right]\Delta\dot{y}(x)\,dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}p^0(t,x)\Delta z_t(t,x)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H(t,x)dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}(t)}H'_z(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}H'_z(t,s)ds\right]\Delta\dot{y}(x)dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}H'_z(\tau,x)d\tau\right]\Delta z_t(t,x)dx\,dt+\int_{x_0}^{x_1}q^{0'}(x)\Delta\dot{y}(x)dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}(x)}M(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1}M'_y(s)ds\right]\Delta\dot{y}(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'(x)M_{yy}(x)\Delta y(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y'(X_i)\frac{\partial^2\varphi\left(y(X_1),\dots,y(X_k)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y\left(X_j\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\beta_i(t)\frac{\partial F'\left(x,z(T_1,x),\dots,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i}\Delta z_t(t,x)dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(T_i,x)\frac{\partial^2F\left(x,z(T_1,x),\dots,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z\left(T_j,x\right)dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_y(x) \Delta y(x) dx + \eta_1(\Delta u; \Delta v). \tag{15}$$

Если предполагать, что $\left(p^o(t,x), q^o(x)\right)$ является решением системы интегральных уравнений типа Вольтерра

$$p^o(t,x) = \int_t^{t_1} H'_z(\tau, x) d\tau - \sum_{i=1}^{k} \beta_i(t) \frac{\partial F\left(x, z(T_1, x), \ldots, z(T_k, x)\right)}{\partial b_i},$$

$$q^o(x) = -\int_x^{x_1} \frac{\partial F'\left(s, z(T_1, s), \ldots, z(T_k, s)\right)}{\partial b_i} ds + \int_x^{x_1} H_z(t, s) ds + \int_x^{x_1} M_y(s) ds -$$

$$-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x_i) \frac{\partial \varphi\left(y(X_1), \ldots, y(X_k)\right)}{\partial a_i}, \tag{16}$$

то формула приращения (15) примет вид

$$\Delta S\left(u^o, v^o\right) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(x)} H(t,x) dx\, dt - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x) dx + \tag{17}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \Delta y'(X_i) \frac{\partial^2 \varphi\left(y(X_1), \ldots, y(X_k)\right)}{\partial a_i \partial a_j} \Delta y\left(X_j\right) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(T_i, x) \frac{\partial^2 F\left(x, z(T_1, x), \ldots, z(T_k, x)\right)}{\partial b_i \partial b_j} \Delta z\left(T_j, x\right) dx -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H'_z(t,x) \Delta z(t,x) dx\, dt - \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{v}(x)} M'_y(x) \Delta y(x) dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}(t,x) \Delta z(t,x) dx\, dt -$$

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta y'(x) M_{yy}(x) \Delta y(x) dx + \eta_1(\Delta u; \Delta v).$$

3. Необходимые условия оптимальности

Считая $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле

$$\begin{cases} \bar{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} u, & t \in [\theta, \theta+\varepsilon), \\ u^o(t), & t \in T / [\theta, \theta+\varepsilon), \end{cases} \\ \bar{v}_\mu(x) = v^o(x), \quad x \in X. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $u^o(t)$, $u \in U$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – произвольное число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$. Заметим, что игольчатые вариации типа (18) называются вариациями Макшейна [7–9].

Через $\left(\Delta z_\varepsilon(t,x), \Delta y_\varepsilon(x)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^o(t,x), y^o(x)\right)$, отвечающее приращению (18) управления $\left(u^o(t), v^o(x)\right)$.

Из формул (7), (8), переходя к эквивалентным интегральным уравнениям типа Вольтерра, а затем применяя лемму Гронуолла – Беллмана [10–11], получим, что

$$\left\|\Delta y(x)\right\| \le L_3 \int_{x_0}^{x} \left\|\Delta_{\bar{v}(s)} g\left(s,\ y^o(s),\ v^o(s)\right)\right\| ds; \tag{19}$$

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_4 \int_{t_0}^{t} \left\|\Delta_{\bar{u}(\tau)} f\left(\tau, x, z^o(\tau,x),\ u^o(\tau)\right)\right\| d\tau + L_5 \left\|\Delta y(x)\right\|, \tag{20}$$

где L_3, L_4, L_5 – некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание формулы (19) и (20), найдем постоянную L_6, что

$$\begin{aligned} \left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_6 \Bigg[&\int_{t_0}^{t} \left\|\Delta_{\bar{u}(\tau)} f\left(\tau, x, z^o(\tau,x), u^o(\tau)\right)\right\| d\tau + \\ &+ \int_{x_0}^{x} \left\|\Delta_{\bar{v}(s)} g\left(s, y^o(s), v^o(s)\right)\right\| ds \Bigg] \end{aligned} \tag{21}$$

$\left(L_6 = \text{const} > 0\right)$.

Теперь из оценок (19), (21) следует, что

$$\left\|\Delta z_{\varepsilon}^{o}\left(t,x\right)\right\| \le L_5\,\varepsilon,\quad \left\|\Delta y_{\varepsilon}\left(x\right)\right\| = L_6\,\varepsilon. \qquad (22)$$

С учетом формул (18), (22), из формулы приращения (17), принимая во внимание теорему о среднем, получим, что вдоль оптимального управления $\left(u^{\text{o}}\left(t\right), v^{\text{o}}\left(x\right)\right)$

$$\Delta_u S_{\varepsilon}\left(u^{o}, v^{o}\right) = -\varepsilon\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_u H\left(\theta, x\right)dx + o\left(\varepsilon\right) \ge 0; \qquad (23)$$

$$\overline{u}_{\varepsilon}\left(t\right) = u\left(t\right),\quad t\in T.$$

Определим специальное приращение оптимального управления по формуле

$$\overline{v}_{\mu}\left(x\right) = \begin{cases} v, & x\in\left[\xi,\,\xi+\varepsilon\right),\\ v^{\text{o}}\left(x\right), & x\in X\setminus[\xi,\,\xi+\varepsilon), \end{cases} \qquad (24)$$

где $\xi\in\left[x_0, x_1\right)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $v^{o}\left(x\right)$; $v\in V$ – произвольный вектор, а $\mu>0$ – произвольное, достаточно малое число, такое, что $\xi+\mu<x_1$.

Пусть $\left(\Delta z_{\mu}\left(t,x\right), \Delta y_{\mu}\left(x\right)\right)$ – специальное приращение состояния $\left(z^{o}\left(t,x\right),\ y^{o}\left(x\right)\right)$, соответствующее специальному приращению (24) управления $\left(u^{o}\left(t\right),\ v^{o}\left(x\right)\right)$.

Из оценок (19), (21) следует, что при некоторых $L_7, L_8 = \text{const} > 0$

$$\left\|\Delta z_{\mu}\left(t,x\right)\right\| \le L_7\,\mu,\quad \left\|\Delta y_{\mu}\left(x\right)\right\| \le L_8\,\mu. \qquad (25)$$

Принимая во внимание оценки (25) и формулу (24), из формулы (17) получим, что

$$\Delta_{\overline{v}} S_{\mu}\left(u^{o}, v^{o}\right) = S\left(u^{o}, \overline{v}\right) - S\left(u^{o}, v^{o}\right) = -\mu\,\Delta_v M\left(\xi\right) + o\left(\mu\right) \ge 0. \qquad (26)$$

Из неравенств (23), (26), в силу произвольности ε и μ, приходим к соотношениям

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_u H(\theta, x)\,dx \le 0, \tag{27}$$

$$\Delta_v M(\xi) \le 0. \tag{28}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства (27), (28) выполнялись соответственно для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$.

Пара неравенств (27), (28) представляет собой аналог принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи [7, 12].

Формула приращения (17) позволяет исследовать также случай вырождения принципа максимума (особый случай). Дадим определения особого (в смысле принципа максимума Понтрягина) управления.

Определение. Допустимое управление $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением в задаче (1)–(6), если для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [x_0, x_1)$, $v \in V$ соответственно выполняются соотношения

$$\int_{x_0}^{x_1} H\left(\theta, x, z^o(\theta, x), u, \psi^o(\theta, x)\right) dx = \int_{x_0}^{x_1} H\left(\theta, x, z^o(\theta, x), u^o(\theta), \psi^o(\theta, x)\right) dx; \tag{29}$$

$$M\left(\xi, y^o(\xi), v, p^o(\xi)\right) = M\left(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)\right). \tag{30}$$

Из определения ясно, что для особых управлений условие максимума (27), (28), вырождаясь, становится неэффективным. Ввиду этого надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности особых управлений.

Из формул (7), (8) следует, что $\left(\Delta y(x), \Delta z(t, x)\right)$ является решением линеаризованной задачи

$$\Delta \dot{y}(x) \equiv g_y(x)\Delta y(x) + \Delta_{\overline{v}(x)} g(x) + \eta_2(x; \Delta u); \tag{31}$$

$$\Delta y(x_0) = 0; \tag{32}$$

$$\frac{\partial \Delta z(t,x)}{\partial z} \equiv f_z(t,x)\Delta z(t,x) + \Delta_{\overline{u}(t)} f(t,x) + \eta_3(t,x;\Delta u); \tag{33}$$

$$\Delta z(t_0,x) = \Delta y(x). \tag{34}$$

Здесь по определению

$$\eta_1(x;\Delta v(x)) = \Delta_{\overline{v}(x)} g(x)\Delta y(x) + o(\|\Delta y(x)\|);$$

$$\eta(t,x;\Delta u(t)) = \Delta_{\overline{u}(t)} f_z(t,x)\Delta z(t,x) + o(\|\Delta z(t,x)\|),$$

где величины $o(\|\Delta z\|)$, $o(\|\Delta y\|)$ определяются соответственно из разложений

$$f(t,x,\overline{z},\overline{u}) - f(t,x,z^o,\overline{u}) = f_z(t,x,z,\overline{u})\Delta z + o(\|\Delta z\|);$$

$$g(x,\overline{y},\overline{v}) - g(x,y^o,\overline{v}) = g_y(x,y^o,\overline{v})\Delta y + o(\|\Delta y\|).$$

Решения линеаризованных задач (31)–(32) и (33)–(34) (на основе аналога формулы Коши) [13–15]) соответственно допускают представления

$$\Delta y(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)} g(s)\,ds + \eta_4(x;\Delta v(x)); \tag{35}$$

$$\Delta z(t,x) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau)} f(\tau,x)\,d\tau + F(t,t_0,x)\Delta y(x) + \eta_5(t,x;\Delta u(t)). \tag{36}$$

Здесь

$$\eta_4(x;\Delta v(x)) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x,s)\eta_2(s;\Delta v(s))\,ds; \tag{37}$$

$$\eta_5(t,x;\Delta u(t),\Delta v(x)) = \int_{t_0}^{t} F(t,\tau,x)\eta_3(\tau,x;\Delta u(\tau))\,d\tau,$$

а $F(t,\tau,x)$ – $(n\times n)$-матричные функции, являющиеся решениями матричных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_s(x,s) = -\Phi(x,s)g_y(s), \qquad \Phi(x,x) = E,$$

$$F_\tau(t,\tau,x) = -F(t,\tau,x)f_z(\tau,x), \qquad F(t,t,x) = E,$$

где E – единичная $(n\times n)$ матрица.

Из представления (36), с учетом представления (35) получаем, что

$$\Delta z(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}(\tau)}f(\tau,x)d\tau+\int\limits_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}(s)}g(s)ds+$$

$$+\eta_6(t,x;\Delta u(t),\Delta v(x)), \tag{38}$$

где $\eta_6(t,x;\Delta u(t),\Delta v(x))=\eta_5(x;\Delta v(x))+F(t,t_0,x)\eta_4(x;\Delta v(x))$.

Из представлений (38), (35), с учетом оценок (22)–(25) получаем, что

$$\Delta z_{\varepsilon}(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t}F(t,\tau,x)\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(\tau)}f(\tau,x)d\tau+o(\varepsilon;\,t,x); \tag{39}$$

$$\Delta y_{\varepsilon}(x)=0;$$

$$\Delta z_{\mu}(t,x)=\int\limits_{x_0}^{x}F(t,t_0,x)\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}_{\mu}(s)}g(s)ds+o(\mu;\,t,x); \tag{40}$$

$$\Delta y_{\mu}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\Delta_{\overline{v}_{\mu}(s)}g(s)ds+o(\mu). \tag{41}$$

В особом случае из формулы приращения (17) получаем

$$S\left(u^{o}(t)+\Delta u_{\varepsilon}(t),v^{o}(x)\right)-\Delta S\left(u^{o}(t),v^{o}(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z_{\varepsilon}'(T_i,x)\frac{\partial^2F(x,z(T_1,x),...,z(T_k,x))}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_{\varepsilon}(T_j,x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z_{\varepsilon}'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_{\varepsilon}(t,x)dx\,dt-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(t)}H_z'(t,x)\Delta z_{\varepsilon}(t,x)dx\,dt+o\left(\varepsilon^2\right); \tag{42}$$

$$S\left(u^{o}(t),v^{o}(x)+\Delta v_{\mu}(x)\right)-\Delta S\left(u^{o}(t),v^{o}(x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\Delta y_{\mu}'(X_i)\frac{\partial^2\varphi\left(y(X_1),y(X_2),...,y(X_k)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\Delta y_{\mu}\left(X_j\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_{\mu}(T_i,x)\frac{\partial^2 F\left(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_{\mu}\left(T_j,x\right)dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{v}_{\mu}(x)}M'_y(x)\Delta y_{\mu}(x)dx-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\Delta y'_{\mu}(x)M_{yy}(x)\Delta y_{\mu}(x)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_{\mu}(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_{\mu}(t,x)dx\,dt+o\left(\mu^2\right). \tag{43}$$

Из представления (39) ясно, что

$$\Delta z_{\varepsilon}(T_i,x)=\int_{t_0}^{t}\alpha_i(\tau)F(T_i,\tau,x)\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(\tau)}f(\tau,x)d\tau+o(\varepsilon). \tag{44}$$

С помощью представления (44) доказывается

$$\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_{\varepsilon}(T_i,x)\frac{\partial^2 F\left(x,z(T_1,x),z(T_2,x),\ldots,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\Delta z_{\varepsilon}\left(T_j,x\right)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\beta_i(\tau)\beta_j(s)\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(\tau)}f'(\tau,x)F(T_i,\tau,x)\frac{\partial^2 F\left(x,z(T_1,x),\ldots,z(T_k,x)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\times$$

$$\times F\left(T_j,s,x\right)\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(s)}f(s,x)ds\,d\tau\,dx+o\left(\varepsilon^2\right); \tag{45}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(t)}H'_z(t,x)\Delta z_{\varepsilon}(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(\tau)}H'_z(\tau,x)F(\tau,t,x)\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(t)}f(t,x)d\tau\right]dx\,dt+o\left(\varepsilon^2\right); \tag{46}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'_{\varepsilon}(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z_{\varepsilon}(t,x)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(\tau)}f(\tau,x)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{x_1}F'(t,\tau,x)H_{zz}(t,x)F(t,s,x)dt\right\}\Delta_{\overline{u}_{\varepsilon}(s)}\times$$

$$\times f(s,x)d\tau\,ds\,dx+o\left(\varepsilon^2\right). \tag{47}$$

Далее, из представления (41) ясно, что

$$\Delta y_{\mu}\left(X_i\right)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\alpha_i\left(s\right)\Phi\left(x_i,s\right)\Delta_{\overline{v}_{\varepsilon}(s)}g\left(s\right)ds+o\left(\mu\right). \qquad (48)$$

Введем обозначения

$$K\left(\tau,\alpha,x\right)=-\sum_{i,j=1}^{k}\beta_i\left(\tau\right)\beta_j\left(s\right)F'\left(T_i,\tau,x\right)\frac{\partial^2 G\left(x,z^o\left(T_i,x\right)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}F\left(T_j,\alpha,x\right)+$$

$$+\int\limits_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1}F\left(t,\tau,x\right)\frac{\partial^2 H\left(t,x\right)}{\partial z^2}F\left(t,\alpha,x\right)dt; \qquad (49)$$

$$L\left(\tau,s\right)=-\sum_{i,j=1}^{k}\alpha_i\left(\tau\right)\alpha_j\left(s\right)\Phi'\left(x_i,\tau\right)\frac{\partial^2\varphi\left(y\left(X_1\right),y\left(X_2\right),...,y\left(X_k\right)\right)}{\partial a_i\,\partial a_j}\times$$

$$\times\Phi\left(x_j,s\right)+\int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1}F'\left(T_i,t_0,x\right)\Phi'\left(x,\tau\right)\frac{\partial^2 F\left(x,z\left(T_1,x\right),z\left(T_2,x\right),...,z\left(T_k,x\right)\right)}{\partial b_i\,\partial b_j}\times$$

$$\times F\left(T_j,t_0,x\right)\Phi\left(x,s\right)dx+\int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1}\Phi'\left(x,\tau\right)M_{yy}\left(x\right)\Phi\left(x,s\right)dx+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1}\Phi'\left(x,\tau\right)F'\left(t,t_0,x\right)H_{zz}\left(t,x\right)F\left(t,t_0,x\right)\Phi\left(x,s\right)dt\,dx. \qquad (50)$$

Учитывая обозначения (49), (50), из формул приращения (42), (43) после некоторых преобразований получим

$$S\left(u^o\left(t\right)+\Delta u_{\varepsilon}\left(t\right),v^o\left(x\right)\right)-\Delta S\left(u^o\left(t\right),v^o\left(x\right)\right)=$$

$$=-\frac{\varepsilon^2}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\Delta_u f'\left(\theta,x\right)K\left(\theta,\theta,x\right)\Delta_u f\left(\theta,x\right)+\right.$$

$$\left.+\Delta_u H_z'\left(\theta,x\right)\Delta_u f\left(\theta,x\right)\right]dx+o\left(\varepsilon^2\right); \qquad (51)$$

$$S\left(u^o\left(t\right),v^o\left(x\right)+\Delta v_{\mu}\left(x\right)\right)-\Delta S\left(u^o\left(t\right),v^o\left(x\right)\right)=$$

$$=-\frac{\mu^2}{2}\left[\Delta_v g'\left(\xi\right)L\left(\xi,\xi\right)\Delta_v g\left(\xi\right)+\Delta_v M_y'\left(\xi\right)\Delta_v g\left(\xi\right)\right]+o\left(\mu^2\right). \qquad (52)$$

Учитывая произвольность и независимость величин $\varepsilon > 0$ и $\mu > 0$, из разложений (56), (57) получаем, что вдоль особого оптимального управления $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ выполняются следующие соотношения:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\Delta_u f'(\theta,x) K(\theta,\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) + \Delta_u H_z'(\theta,x) \Delta_u f(\theta,x) \right] dx \le 0 \quad (53)$$

для всех $\theta \in [t_0,t_1)$, $u \in U$;

$$\Delta_v g'(\xi) L(\xi,\xi) \Delta_v g(\xi) + \Delta_v M_y'(\xi) \Delta_v g(\xi) \le 0 \quad (54)$$

для всех $v \in V$, $\xi \in [x_0,x_1)$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $\left(u^o(t),\ v^o(x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства (53), (54) выполнялись соответственно.

Заметим, что необходимые условия оптимальности (53), (54) являются аналогами условия оптимальности Габасова – Кирилловой, полученного другим способом в случае терминальной задачи управления обыкновенными динамическими системами [2].

Благодарность

Автор благодарна рецензенту за очень полезные замечания, способствующие улучшению первоначального варианта статьи.

Список литературы

1. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал Вычислительной математики и математической физики. – 1969. – Т. 9, № 1. – С. 68–95.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Либроком, 2011. – 256 с.

3. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. – Баку: ЭЛМ, 1999. – 176 с.

4. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Баку, 1994. – 43 с.

5. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. – Баку: ЭЛМ, 2010. – 360 с.

6. Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. On optimality of singular controls in an optimal control problem // Вестник Томского государственного университета. – 2018. – № 54. – С. 17–33.

7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики / АН СССР; ВИНИТИ. – М.: [б. и.], 1976. – Т. 6. – С. 131–204.

9. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 10. – С. 1765–1773.

10. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1986. – 87 с.

11. Dragomir S.S. Some Grunwall type inequalities and applications. – Australia: Melbourne city LC, 2002. – 191 p.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – М.: Либроком, 2011. – 272 с.

13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 256 с.

14. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 429 с.

15. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Известия АН Азерб. ССР. Сер. физ.-тех. и матем. наук. – 1973. – № 2. – С. 116–120.

References

1. Moskalenko A.I. Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovaniia [On a class of optimal control problems]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, vol. 9, no. 1, pp. 68–95.

2. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobye optimal'nye upravleniia [Singular optimal controls]. Moscow, Librokom, 2011, 256 p.

3. Mansimov K.B. Osobye upravleniia v sistemakh s zapazdyvaniem [Singular controls in systems with delay]. Baku. ELM, 1999, 176 p.

4. Mansimov K.B. Neobkhodimye usloviia optimal'nosti osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniia [Study of singular processes in optimal control problems]. Abstract of Doctor’s degree thesises. Baku, 1994, 43 p.

5. Mansimov K.B., Mardanov M.Dzh. Kachestvennaia teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami Gursa-Darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku, ELM, 2010, 360 p.

6. Mansimov K.B., Rasulova Sh.M. On optimality of singular controls in an optimal control problem. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2018, no. 54, pp. 17–33.

7. Ponriagin L.S., Blgianskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov [The mathematical theory of optimal processes. 2nd edition]. Moscow, Nauka, 1969, 384 p.

8. Gabasov R., Kirillova F.M. Metody optimal'nogo upravleniia [Optimal Control Methods]. Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tom. 6 1976, Moscow, Akademiia nauk SSSR. Vsesoiuznyi institut nauchnoi i tekhnicheskoi informatsii, pp. 131–204.

9. Gorokhovik S.Ia. Neobkhodimye usloviia optimal'nosti v zadache s podvizhnym pravym kontsom traektorii [Necessary optimality conditions in a problem with a moving right end of the trajectory]. *Differential equations*. 1975, vol. 11, iss. 10, pp. 1765–1773.

10. Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I. Metody optimal'nogo upravleniia sistemami matematicheskoi fiziki [Methods of optimal control of mathematical physics systems]. Gor'kii, Izdatel'stvo Gor'kovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1986, 87 p.

11. Dragomir S.S. Some Grunwall type inequalities and applications. Melbourne city LC, Australia, 2002, 191 pp.

12. Gabasov R., Kirillova F.M. Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniia [The maximum principle in the optimal control theory]. Moskva, Izd-vo Librokom, 2011, 272 p.

13. Gabasov R., Kirillova F.M. Optimizatsiia lineinykh system [Optimization of linear systems]. Minsk, Izdatel'stvo Belarusskogo gosudarstvennogo universiteta. 1973, 256 p.

14. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow, Nauka, 1979, 429 p.

15. Akhiev S.S., Akhmedov K.T. Ob integral'nom predstavlenii reshenii nekotorykh sistem differentsial'nykh uravnenii [On the integral representation of solutions of some systems of differential equations] *Izv. AN Azerb. SSR, Ser. fiz. tekh. i matem. nauk*, 1973, vol. 2, pp. 116–120.

Статья получена: 19.09.2019

Статья принята: 11.02.2020

Сведения об авторе

Расулзаде Шахла Меджид кызы (Баку, Азербайджанская Республика) – преподаватель, Азербайджанский государственный педагогический университет, диссертант, Институт систем управления НАН Азербайджана (Az 1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68, e-mail: akja@rambler.ru).

About the author

Shahla M. Rasulzade (Baku, Azerbaijan Republic) – Lecturer, Azerbaijan State Pedagogical University, Ph.D. Student, Institute of Control Systems of Azerbaijan NAS (Az 1141, Baku, Bakhtiyar Vahabzadeh st., 68, e-mail: akja@rambler.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Расуладзе, Ш.М. Необходимые условия оптимальности в одной задаче оптимального управления с многоточечным функционалом / Ш. М. Расуладзе. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.2.01. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 2. – С. 7–26.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Расуладзе Ш.М. Необходимые условия оптимальности в одной задаче оптимального управления с многоточечным функционалом // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 2. – С. 7–26. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Rasulzade Sh.M. Required optimality conditions in one optimal control problem with multipoint functional. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 2, pp. 7–26. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.01 (*in Russian*)