DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.09
УДК 330.46; 538.91

Д.Л. Андрианов, П.М. Симонов

Пермский государственный национальный
исследовательский университет, Пермь, Россия

ОБЗОР МЕТОДОВ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ПРИНЦИПАХ ЭКОНОФИЗИКИ. ЧАСТЬ 2

Дается обзор теоретических и прикладных результатов, полученных в рамках научного направления по эконофизике на кафедре информационных систем и математических методов в экономике.

В первой части дано понятие финансового пузыря и методы его поиска. В начале статьи дано развитие эконофизики, поэтому эконофизика, используя как образец исследования физиков, должна начинать свои исследования не с верхних этажей экономического здания (в виде финансовых рынков, распределения доходности финансовых активов и т.п.), а с ее фундаментальных оснований или, говоря словами физиков, с элементарных экономических объектов и форм их движения (труда, его производительности и т.д). Только таким образом эконофизика может обрести свой предмет исследования и стать «новой формой экономической теории». Дальше рассмотрены основные предпосылки моделей финансовых пузырей на рынке: принцип отсутствия арбитражных возможностей, существование рациональных агентов, модели, управляемой риском, и модели, управляемой ценой. Была предложена известная нелинейная LPPL-модель (Log Periodic Power Law Model). В работах В.О. Арбузова было предложено использовать процедуры выбора моделей, а именно были введены: основная селекция, фильтрация «стационарности», спектральный анализ. Результаты модели были представлены в работах Д. Сорнетт и его учеников.

Во второй части дается понятие перколяции и возможности ее применения в экономике. Будет рассмотрена математическая модель, предложенная J.P. Bouchaud, D. Stauffer и D. Sornette, воссоздающая поведение агента на рынке, и ее взаимодействие, геометрически описывающее фазовый переход второго рода. В данной модели цена актива за один временной интервал изменяется пропорционально разнице между спросом и предложением на этом рынке. Полученные результаты опубликованы в работах А.А. Бячковой, Б.И. Мызниковой и А.А. Симонова.

Существует два вида фазового перехода: переход первого и второго рода. При фазовом переходе первого рода скачкообразно изменяются самые главные, первичные экстенсивные параметры: удельный объем, количество запасенной внутренней энергии, концентрация компонентов и прочие показатели. Следует заметить, что имеется в виду скачкообразное изменение этих величин при изменении температуры, давления, а не скачкообразное изменение во времени. Наиболее распространенные примеры фазовых переходов первого рода: плавление и кристаллизация, испарение и конденсация.

При фазовом переходе второго рода плотность и внутренняя энергия не меняются. Скачок же испытывают их производные по температуре и давлению: теплоемкость, коэффициент теплового расширения или различные восприимчивости. Фазовые переходы второго рода происходят в тех случаях, когда меняется симметрия строения вещества: она может полностью исчезнуть или понизиться. Для количественной характеристики симметрии при фазовом переходе второго рода вводится параметр порядка, пробегающий отличные от нуля значения в фазе с большей симметрией и тождественно равный нулю в неупорядоченной фазе.

Таким образом, перколяцию мы можем рассматривать как фазовый переход второго рода, по аналогии с переходом парамагнетиков в состояние ферромагнетиков. Порог перколяции, или критическая концентрация разделяет две фазы перколяционной решетки: в одной фазе существуют конечные кластеры, в другой фазе существует один бесконечный кластер.

Ключевой ситуацией для изучения является момент образования бесконечного кластера на перколяционной решетке, так как это означает крах рынка, когда подавляющая для данного рынка часть агентов имеют схожие мнения насчет своих действий по покупке или продаже актива. Основными характеристиками процесса являются пороговая вероятность наступления краха рынка, а также эмпирическая функция распределения изменения цены на данном рынке.

Ключевые слова: эконофизика, поведение агентов на рынке, крах рынка, фазовый переход второго рода, теория перколяции, калибрация моделей, калибрация агентных моделей, перколяционные решетки, модель градиентной перколяции, порог перколяции, кластеры, фрактальные размерности, фазовые переходы первого и второго рода.

D.L. Andrianov, P.M. Simonov

Perm State University, Perm, Russian Federation

A REVIEW OF THE METHODS OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING BASED ON THE PRINCIPLES OF ECONOPHYSICS. PART 2

A review of theoretical and applied results obtained in the framework of the scientific direction in econophysics at the Department of information systems and mathematical methods in economics is given.

The first part gives the concept of a financial bubble and methods for finding them. At the beginning of the article, the development of econophysics is given. Therefore, using the research of physicists as a model, econophysics should begin its research not from the upper floors of an economic building (in the form of financial markets, distribution of returns on financial assets, etc.), but from its fundamental foundations or, in the words of physicists, from elementary economic objects and forms of their movement (labor, its productivity, etc.). Only in this way can econophysics find its subject of study and become a "new form of economic theory". Further, the main prerequisites of financial bubble models in the market are considered: the principle of the absence of arbitrage opportunities, the existence of rational agents, a risk-driven model, and a price-driven model. A well-known nonlinear LPPL model (log periodic power law model) was proposed. In the works of V.O. Arbuzov, it was proposed to use procedures for selecting models. Namely, basic selection, "stationarity" filtering, and spectral analysis were introduced. The results of the model were presented in the works of D. Sornette and his students.

The second part gives the concept of percolation and its application in Economics. We will consider a mathematical model proposed by J.P. Bouchaud, D. Stauffer, and D. Sornette that recreates the behavior of an agent in the market and their interaction, geometrically describing a phase transition of the second kind. In this model, the price of an asset in a single time interval changes in proportion to the difference between supply and demand in this market. The results are published in the works of A.A. Byachkova, B.I. Myznikova and A.A. Simonov.

There are two types of phase transition: the first and second kind. During the phase transition of the first kind, the most important, primary extensive parameters change abruptly: the specific volume, the amount of stored internal energy, the concentration of components, and other indicators. It should be noted that this refers to an abrupt change in these values with changes in temperature, pressure, and not a sudden change in time. The most common examples of phase transitions of the first kind are: melting and crystallization, evaporation and condensation.

During the second kind of phase transition, the density and internal energy do not change. The jump is experienced by their temperature and pressure derivatives: heat capacity, coefficient of thermal expansion, or various susceptibilities. Phase transitions of the second kind occur when the symmetry of the structure of a substance changes: it can completely disappear or decrease. For quantitative characterization of symmetry in a second-order phase transition, an order parameter is introduced that runs through non-zero values in a phase with greater symmetry, and is identically equal to zero in an unordered phase.

Thus, we can consider percolation as a phase transition of the second kind, by analogy with the transition of paramagnets to the state of ferromagnets. The percolation threshold or critical concentration separates two phases of the percolation grid: in one phase there are finite clusters, in the other phase there is one infinite cluster.

The key situation to study is the moment of formation of an infinite cluster on the percolation grid, since this means the collapse of the market, when the overwhelming part of agents for this market has a similar opinion about their actions to buy or sell an asset. The main characteristics of the process are the threshold probability of market collapse, as well as the empirical distribution function of price changes in this market.

Keywords: econophysics, behavior of agents in the market, market crash, second-order phase transition, percolation theory, model calibration, agent model calibration, percolation gratings, gradient percolation model, percolation threshold, clusters, fractal dimensions, phase transitions of the first and second kind.

1. Теория перколяции

В настоящий момент моделирование фондовых рынков является одним из востребованных и популярных направлений научной деятельности. В том числе существует множество подходов к моделированию финансового рынка, среди которых достаточно большое распространение получило использование эконофизики. Причиной этого является необходимость объяснения действия рыночных механизмов, а также попытка прогнозирования дальнейшего развития того или иного рынка.

Ниже рассмотрена математическая модель, предложенная J.P. Bouchaud, D. Stauffer и D. Sornette [1–3], воссоздающая поведение агентов на рынке и их взаимодействие. Данная модель основана на теории перколяции, геометрически описывающей фазовый переход второго рода. Полученные результаты опубликованы в работах[1] [4–6].

Ключевой ситуацией для изучения является момент образования бесконечного кластера на перколяционной решетке, так как это означает крах рынка, когда подавляющая для данного рынка часть агентов имеют схожие мнения насчет своих действий по покупке или продаже актива. Основными характеристиками процесса являются пороговая вероятность наступления краха рынка, а также эмпирическая функция распределения изменения цены на данном рынке.

С помощью метода Монте-Карло, реализованного в системе компьютерного программирования *R*, были получены результаты, позво-

[1] Бячкова А.А. Моделирование финансового рынка с помощью теории перколяции: диплом студентки 5-го курса очной формы обуч. спец. «Математические методы в экономике» / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. 96 с.

лившие проанализировать ход изучаемого процесса. Кроме того, были сделаны выводы о влиянии параметров задачи на вид функции распределения изменения цены. Анализ полученных результатов обусловил целесообразность калибрации модели под реальные данные с целью получения таких значений параметров, которые позволяют моделировать ситуацию, наиболее близкую к наблюдаемой на рынке.

В результате калибрации модели с помощью процедуры оптимизации были получены результаты, описывающие наблюдаемые данные, и оценена их погрешность.

Применение теории перколяции для моделирования финансового рынка является достаточно новым направлением фундаментальных и прикладных научных исследований, в рамках которых разработка различных модификаций, связанных с учетом усложняющих факторов, продолжается и в настоящее время.

Интересным направлением для изучения является калибрация агентных моделей, так как пока нет единого решения данной проблемы.

2. Анализ математических аспектов теории перколяции. Перколяция как модель критических явлений. Разновидности перколяции

Исторически теория перколяции берет свое начало в работах П.Дж. Флори и У. Стокмайера [7], которые рассматривали процесс образования гелей при полимеризации. Однако наиболее подробно явление перколяции впервые рассмотрели Броадбент и Хаммерсли в 1957 г. [7]. Именно они ввели термин «теория перколяции», а также рассмотрели математический аппарат, описывающий данный процесс. Термин «перколяция», произошедший от английского слова percolation, означает «протекание». В литературе также встречается термин «просачивание», так как ряд первых работ в этом направлении был посвящен процессам просачивания (протекания) жидкостей и газов через пористую среду.

Перколяция является одной из наиболее активно изучаемых проблем статистической физики в силу своей фундаментальной природы, а также широкого применения в различных сферах жизни человека [8].

Для понимания явления перколяции необходимо рассмотреть квадратную решетку размерностью $L \times L$ ячеек, где каждая ячейка может находиться в двух состояниях: «занято» или «свободно». Каждая ячейка «занимается» случайным образом с определенной заданной вероятностью независимо от состояния соседних ячеек [9]. Вероятность далее будем обозначать как p.

Явление перколяции сопровождается образованием кластеров, т.е. групп объединенных ячеек решетки, связанных с ближайшими соседями по общей стороне ячейки. Две занятые ячейки принадлежат одному кластеру, если они соединены путем, состоящим из занятых ячеек [10]. Данное определение соответствует пониманию кластера в рамках ячеечной перколяции, когда за основу берется квадратная решетка. Таким образом, занятые ячейки либо изолированы друг от друга, либо образуют группы, состоящие из ближайших соседей.

Следует заметить, что существуют и другие виды перколяции, например цепная перколяция, где вместо ячеек моделируются узлы, соединенные с ближайшими соседними звеньями. В данном случае модель перколяции можно описать с помощью регулярного графа, в состав которого входят узлы (вершины) и связи (ребра), а кластер представляет собой группу узлов, соединенных между собой занятыми звеньями. Наиболее простым примером, описывающим цепную перколяционную модель, служит проволочная сетка.

Существует также множество исследований перколяционных решеток, содержащих ячейки различной формы: триангулированные решетки, т.е. решетки, все грани которых треугольники; квадратные решетки; треугольные решетки, являющиеся дуальными для шестиугольных. Кроме того, существуют следующие необычные формы перколяционных решеток:

– решетка Кагоме, которая является покрывающей для шестиугольной решетки;

– решетка $(3,12^2)$, дополнительные выделенные связи которой образуют треугольники и линии, соединяющие эти треугольники;

– решетка «галстук-бабочка», состоящая из квадратных и треугольных граней.

Рассматриваются также непрерывные перколяционные модели. В дальнейшем будем рассматривать случай именно решеточной перколяции, в которой каждая ячейка принимает форму квадрата.

Основной задачей теории перколяции является поиск бесконечного кластера, т.е. кластера, который протягивается от одной стороны решетки к противоположной. В условиях образования бесконечного кластера большинство занятых ячеек будут принадлежать к одному кластеру. Если вероятность того, что ячейка «занята», выше критической величины, то существует один соединяющий кластер, в ином случае нет ни одного соединяющего кластера и все кластеры конечны [10].

Следует подчеркнуть, что характерной особенностью, присущей перколяции, является связность. Поскольку связность обнаруживает качественное изменение при конкретном значении некоторого параметра, который можно менять непрерывно, мы можем наблюдать, что переход из состояния, не содержащего соединяющий кластер, в состояние с одним соединяющим кластером представляет собой фазовый переход.

Существует множество примеров фазового состояния вещества, таких как вода, которая может существовать в виде пара, жидкости и льда. Вода может переходить из одной фазы в другую при определенных значениях давления и температуры. Такая смена состояний фаз представляет собой пример термодинамического фазового перехода, когда критической точкой являются конкретные значения температуры и давления. Кроме того, в качестве примера фазового перехода можно обозначить существование критической точки в магнетиках при температуре Кюри. При низких температурах некоторые тела ведут себя как ферромагнетики, т.е. такие вещества, которые при температуре ниже точки Кюри способны обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля. Если повышать температуру, спонтанная намагниченность непрерывно убывает, обращаясь в нуль при некоторой критической температуре. При температуре выше критической вещества становятся парамагнетиками, т.е. веществами, которые намагничиваются во внешнем магнитном поле в направлении внешнего магнитного поля [11].

Перколяция не является фазовым переходом в обычном смысле, поскольку в ее описании не используется температура или давление. Однако свойства геометрических фазовых переходов в задачах перколяции и в задачах термодинамических фазовых переходов качественно подобны. Следовательно, изучение фазовых переходов в задачах перколяции возможно осуществлять с помощью аппарата термодинамических фазовых переходов. Кроме того, можно сделать вывод о том, что вблизи точки фазового перехода поведение системы обусловлено наличием дальнодействующих корреляций.

Перколяционный кластер является фрактальным образованием, в котором можно выделить различные фрактальные подструктуры.

Рассмотрим некоторые основные понятия фрактальных подструктур, применяемых в теории перколяции. Обсудим «проводимость» кластера, т.е. наличие «пути» от одной стороны решетки к противоположной. Остов кластера – «токопроводящая» часть кластера, т.е. ячейки, обеспечивающие «проводимость». Мертвые концы – части кластера, соединенные с остовом посредством одного узла. Мертвые концы составляют большую часть кластера, однако не участвуют в проводимости. Красные связи – это одиночные связи, при разрушении которых перколяционный кластер перестает обеспечивать проводимость.

Обозначим далее несколько понятий, описывающих внутреннее строение кластера. Скелет кластера – та часть, которая объединяет все кратчайшие пути от данного узла до всех узлов, находящихся на заданном расстоянии. Эластичный остов – объединение двух кратчайших путей между двумя данными узлами. Оболочка, или внешний периметр состоит из тех узлов кластера, которые соприкасаются с пустыми узлами и соединены с бесконечностью посредством пустых узлов. Полный периметр кластера включает также его внутренние пустоты. Все эти подструктуры описываются различными фрактальными размерностями, на сегодняшний день значения для некоторых из них могут быть получены путем компьютерного моделирования.

Таким образом, анализ внутреннего строения кластера и его проводимости позволяет делать выводы о фрактальных свойствах рассматриваемой системы.

При исследовании теории перколяции требуется количественно охарактеризовать следующие особенности:

– структуру критических и суперкритических фаз;

– поведение системы вблизи порога протекания;

– структуру перколяционного кластера;

– значения и свойства различных величин, описывающих поведение системы и бесконечного кластера;

– изменения, происходящие при изменении структуры решетки и размерности пространства.

Рассмотрим показатели, характеризующие образование кластеров на решетке. Важным при поиске порога протекания является распределение среднего размера кластеров, обозначаемого $n_s(p)$ и определяемого как среднее число кластеров размером s, деленное на полное число ячеек решетки $L \times L$. С учетом того, что $\sum_s sn_s$ представляет собой полное число занятых ячеек, а sn_s – количество занятых ячеек в кластере размером s, величина $\omega_s = sn_s \Big/ \left(\sum_s sn_s\right)$ является вероятностью того, что занятый узел, выбранный случайным образом, принадлежит кластеру размером s. Отсюда следует, что средний размер кластера S определяется как $S = \sum_s s\omega_s = \sum_s s^2 n_s \Big/ \left(\sum_s sn_s\right)$.

Другой величиной, характеризующей перколяцию, является $P_\infty(p)$ – вероятность того, что занятая ячейка принадлежит соединяющему кластеру, определяется как число ячеек в соединяющем кластере, деленное на полное число занятых ячеек. Таким образом, перечисленные показатели помогают вероятностно оценить принадлежность ячейки к кластеру какой-либо размерности, в том числе переход к бесконечному.

Существует два вида фазового перехода: первого и второго рода. При фазовом переходе первого рода скачкообразно изменяются самые главные, первичные экстенсивные параметры: удельный объем, количество запасенной внутренней энергии, концентрация компонентов и прочие показатели. Следует заметить, что имеется в виду скачкообразное изменение этих величин при изменении температуры, давления, а не скачкообразное изменение во времени. Наиболее распространенные примеры фазовых переходов первого рода: плавление и кристаллизация, испарение и конденсация.

При фазовом переходе второго рода плотность и внутренняя энергия не меняются. Скачок же испытывают их производные по температуре и давлению: теплоемкость, коэффициент теплового расширения или различные восприимчивости. Фазовые переходы второго рода происходят в тех случаях, когда меняется симметрия строения вещества: она может полностью исчезнуть или понизиться. Для количественной характеристики симметрии при фазовом переходе второго рода вводится параметр порядка, пробегающий отличные от нуля значения в фазе с большей симметрией и тождественно равный нулю в неупорядоченной фазе.

Можно обозначить следующие основные примеры фазовых переходов второго рода:

– переход парамагнетик–ферромагнетик или парамагнетик–антиферромагнетик, где параметром порядка является намагниченность;

– переход металлов и сплавов в состояние сверхпроводимости, где параметром порядка является плотность сверхпроводящего конденсата;

– переход жидкого гелия в сверхтекучее состояние, где параметром порядка является плотность сверхтекучего компонента, а также многие другие.

Таким образом, перколяцию мы можем рассматривать как фазовый переход второго рода, по аналогии с переходом парамагнетиков в состояние ферромагнетиков. Порог перколяции, или критическая концентрация разделяет две фазы перколяционной решетки: в одной фазе существуют конечные кластеры, в другой фазе существует один бесконечный кластер.

Далее необходимо рассмотреть основные математические характеристики фазового перехода второго рода, которые в дальнейшем будут определять существенные особенности перколяции.

Средняя длина связности $\xi\,(p)$ определяется двумя различными способами. Одно из определений величины $\xi\,(p)$ заключается в присваивании ей значения радиуса циркуляции R_s. Для единственного кластера, состоящего из s ячеек, радиус циркуляции будет выглядеть следующим образом: $R_s^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(r_i - \overline{r})^2$, где $\overline{r} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} r_i$, а r_i – координата i-й ячейки в этом кластере. Как правило, величину $\xi\,(p)$ связывают именно с радиусом циркуляции наибольшего несоединяющего кластера, а не с взвешенным средним всех R_s по всем несоединяющим кластерам. Распределение функции $\xi\,(p)$ зависит от параметра p и определяется следующим соотношением: $\xi\,(p) \sim |\,p - p_c\,|^{-\upsilon}$.

Таким образом, можно сказать, что поведение функции $\xi\,(p)$ сингулярно в критической области $|\,p - p_c\,| \ll 1$. На основе серии практических испытаний существует возможность оценить показатель υ и вывести его значение.

Кроме того, рассматривая фазовый переход второго рода, необходимо помнить о таком важном показателе, как параметр порядка (таблица). В соответствии с определением параметра порядка, $P_\infty(p) = 0$ при $p < p_c$ и возрастает при $p > p_c$. Предполагается, что в критической области рост P_∞ характеризуется показателем степени β и определяется соотношением $P_\infty \sim (p_c - p)^\beta$.

В терминологии критических явлений P_∞ является параметром порядка системы. Критический показатель степени β описывает стремление к нулю связности бесконечного кластера при пороговом значении для перколяции (см. таблицу).

Другой рассматриваемой величиной является средний размер кластера $S(p)$. Критическое поведение $S(p)$ можно описать следующим выражением, которое определяет критический показатель γ: $S(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma}$.

Величины, определяющие модель перколяции, и их распределения

Величина	Зависимость	Показатель
Параметр порядка	$P_\infty \sim (p_c - p)^\beta$	β
Средняя длина конечного кластера	$S(p) \sim \vert p - p_c \vert^{-\gamma}$	γ
Длина корреляции	$\xi(p) \sim \vert p - p_c \vert^{-\upsilon}$	υ
Число кластеров	$n_s \sim s^{-\tau}$	τ

Все обозначенные в таблице показатели [10] являются универсальными по отношению к виду решетки, типу перколяции, но зависящими от размерности решетки. Это объясняется тем, что непрерывная, ячеечная и цепная перколяции принадлежат к одному классу универсальности и их критические показатели равны.

Критические показатели в области критических явлений связаны между собой соотношением $2\beta + \gamma = \upsilon d$, где d – размерность пространства [12]. Данное соотношение следует из масштабной инвариантности, или скейлинга – неизменности уравнений при изменении всех расстояний в одинаковое число раз.

Таким образом, при моделировании перколяции возможно получение критических показателей с целью получения распределения основных определяющих величин системы, приведенных в таблице. Далее обратимся к рассмотрению метода моделирования явления перколяции.

3. Метод моделирования

На данный момент разработан ряд эффективных алгоритмов, которые позволяют определить порог перколяции для множества решеток с высокой точностью. Однако получение основных эмпирических функций распределения искомых величин осуществляется, как правило, именно с помощью метода Монте-Карло. Компьютерное моделирование играет в современной науке важную роль, и метод Монте-Карло является одним из самых применяемых во многих областях, в том числе в решении задач протекания.

В его основе лежит генерация выборки, состоящей из случайных чисел. В данном случае это занятые ячейки решетки, которые случайным образом образуют кластеры. Каждая очередная смоделированная нами конфигурация является представителем множества вариантов, соответствующих возможным ситуациям на рынке. Таким образом, можно сказать, что чем больше различных вариантов заполнения решетки будет нами сгенерировано, тем более точные эмпирические результаты будут получены на выходе [13].

Особый интерес представляют собой алгоритмы для обработки подструктур перколяционного кластера и алгоритмы, основанные на параллельных вычислениях.

Алгоритм Зиффа [7] является достаточно эффективным алгоритмом для определения порога перколяции, в особенности для двумерных решеток. Данный алгоритм основывается на двух основных идеях.

Во-первых, в его основе лежит модель градиентной перколяции, где вероятность того, что ячейка будет «занята», зависит от ее координаты. Таким образом, можно говорить о градиенте концентрации на рассматриваемой решетке, т.е. узлы нижнего ряда решетки заняты с вероятностью 0, а узлы верхнего ряда решетки – с вероятностью 1, вдоль вертикального направления вероятность заполнения ячеек возрастает. В верхней части решетки формируется перколяционный кластер, чья нижняя часть образует оболочку, представляющую путь через всю решетку. Средняя высота этого пути равна порогу перколяции.

Во-вторых, поиск внешнего периметра бесконечного кластера осуществляется методом обхода лабиринта: периметр измеряется посредством движения по краю кластера, так, чтобы крайняя ячейка перколяционного кластера всегда находилась «слева» от направления движения.

Алгоритм Лиса, используемый для генерации отдельного кластера, был предложен Хаммерсли и Александровицем [7]. Идея алгоритма заключается в том, что на решетке выбирается некоторый начальный узел и полагается, что он занят. Далее просматриваются все граничащие с ним узлы и заполняются с некоторой заданной вероятностью.

После просмотра всех узлов периметра образуется кластер большего размера. Далее просматриваются все узлы, принадлежащие периметру получившегося кластера, и заполняются с той же заданной вероятностью и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока на решетке остаются непроверенные ячейки. Данный алгоритм применяется, как правило, для исследования свойств единичного кластера, а также для получения кластерных подструктур.

Одним из наиболее распространенных алгоритмов для поиска порога перколяции и подсчета размера кластеров является алгоритм многократной маркировки кластеров Хошена – Копельмана [10].

Преимуществом данного алгоритма является удобство использования в случае исследования распределения кластеров по размерам. Важной особенностью алгоритма Хошена – Копельмана является возможность определения его порога перколяции и распределения кластеров по размерам за один проход по решетке. Помимо этого, достоинством алгоритма является возможность экономии машинной памяти, так как при его выполнении в памяти хранится только один ряд рассматриваемой решетки и нет необходимости хранить несколько различных маркировок решетки.

Предпосылкой выполнения данного алгоритма является принадлежность узла к тому или иному кластеру, которая является глобальным свойством данного узла и может быть определена только после прохождения и маркировки всей решетки целиком, в результате чего всем занятым узлам решетки присваиваются различные кластерные метки. Данный алгоритм будет использован нами для реализации перколяционной модели, что позволит исследовать размеры сформированных кластеров.

Рассмотрим отдельную итерацию. Моделируется решетка случайных чисел, распределенных равномерно на интервале [0,1]. С данной решеткой будут производиться последующие преобразования.

Принимается первоначальное значение p, исходя из его значения формируется решетка «занятых» и «свободных» ячеек. Ячейка занимается, если присвоенное ей случайное число меньше p. Далее полученная решетка анализируется на наличие или отсутствие бесконечного кластера. Для этого вводится понятие порога перколяции p_c, который определяется как такая вероятность p, при которой появляется первый бесконечный кластер на бесконечной решетке. Для конечной решетки со стороной L, которую мы можем смоделировать, всегда существует ненулевая вероятность того, что будет появляться соединяющий кластер, связывающий одну сторону решетки с другой [10].

Таким образом, нашей задачей является нахождение порога протекания для данной конкретной решетки, т.е. для решетки, смоделированной в данной итерации. Посредством регулирования p мы будем изменять решетку «занятых» и «свободных» ячеек и анализировать ее на предмет наличия бесконечного кластера. Этот анализ производится с помощью алгоритма Хошена – Копельмана. Основными правилами маркировки ячеек являются следующие:

– если рассматриваемая ячейка «свободна», то данной ячейке не присваивается метка;

– если рассматриваемая ячейка «занята», то:

• если соседи слева и сверху «свободны», то принимается гипотеза о том, что данная ячейка входит в новый кластер, и ей присваивается метка с очередным порядковым номером;

• если один из соседей (сверху или справа) «занят» и уже имеет кластерную метку, то рассматриваемой «занятой» ячейке присваивается такая же кластерная метка, как и ее ближайшему «занятому» соседу;

• если и сосед сверху, и сосед слева имеют кластерные метки, то все три ячейки принадлежат одному кластеру. Текущей рассматриваемой «занятой» ячейке присваивается наименьшая из кластерных меток.

После окончания маркировки ячеек необходимо повторно «пройти» по всей решетке и исправить неверные метки, т.е. метки с большим порядковым номером, находящиеся непосредственно рядом с метками с наименьшим порядковым номером. Для этого создается корректирующий массив меток, содержащий информацию о том, какие метки имеют неверную маркировку.

Далее делается вывод о наличии или отсутствии перколяционного кластера: если хотя бы одна из ячеек одной стороны решетки имеет такую же кластерную метку, как какая-либо ячейка, находящаяся на противоположной стороне решетки, то протекание существует, иначе – протекание отсутствует. Делается вывод о соответствующем изменении значения параметра p. Изменение p и нахождение p_c будут осуществляться методом деления отрезка пополам до тех пор, пока не будет получено значение порога протекания p_c с заранее определенной точностью.

В дальнейшем происходит анализ имеющейся решетки при полученном уровне $p_c = p$. На данном этапе рассчитывается количество полученных кластеров и их размер. Таким образом, в результате i-й итерации мы получаем искомые значения p_c, а также данные о поведении системы при наступлении порога протекания.

Далее, согласно методу Монте-Карло, моделируется новая решетка случайных чисел на интервале [0,1]. Таким образом, реализуется следующая итерация. В результате выполнения N итераций и генерации N различных решеток мы получим набор значений p_c, из которых можно вывести эмпирическое распределение данной величины.

Следует заметить, что при росте количества испытаний результаты опытов будут отличаться друг от друга все меньше и меньше. Если рассматривать случай бесконечной сетки, можно вывести следующую закономерность: $p_c = \lim\limits_{L\to\infty} p_c(L)$, где L – число узлов на одной стороне рассматриваемой сетки (общее число узлов данной сетки будет равняться L^2). Чем больше будет значение L, тем меньшую роль играет элемент случайности. Полученное значение предела является достоверной величиной, равной порогу протекания [11].

Кроме размерности сетки очень важно учитывать количество испытаний. Разумным представляется обеспечение сходимости эмпирической функции к теоретической. Для этого можно отслеживать сходимость ряда $B_k = \max\limits_{\eta} |\nu_{k,\eta} - \nu_{k-1,\eta}|$, где $\nu_{k,\eta}$ – эмпирическая функция распределения, построенная по k-й выборке; η – номер интервала разбивки эмпирической функции распределения. Как правило, моделируют не более 10^4 сценариев [14].

Для получения результатов с высокой точностью приходится производить компьютерные эксперименты на объектах большого размера. В этом случае целесообразно применять параллельные алгоритмы. Одной из наиболее сложных и трудоемких задач в рассматриваемом контексте является поиск порога перколяции, расчет размера, остова перколяционного кластера. Кроме того, важным стимулом для развития эффективных параллельных алгоритмов для расчета кластера является необходимость генерации множества сценариев метода Монте-Карло, а также трудоемкого расчета характеристик для каждого сценария.

Для реализации параллельного алгоритма возможно использование специализированных методов маркировки кластеров, а также адаптация уже используемого алгоритма Хошена – Копельмана. Суть адаптации состоит в том, что решетка разделяется на части, где каждая часть соответствует одному процессору. На каждом куске решетки действует алгоритм Хошена – Копельмана, при этом сохраняются метки для пограничных узлов. Затем главный процессор восстанавливает конфигурацию полностью путем сбора данных с отдельных процессоров.

Можно соотнести конфигурацию узлов при перколяции с конфигурацией процессоров для компьютеров с несколькими тысячами процессоров. Маркировка кластеров в таком случае выглядит как параллельная корректировка на всех процессорах. Случай использования параллельной версии алгоритма Хошена – Копельмана представляет большой интерес для исследователей, так как позволяет с высокой мощностью вычислить характеристики перколяционных решеток для множества симуляций Монте-Карло.

Далее перейдем к рассмотрению возможностей получения различных результатов с помощью метода Монте-Карло и методов их обработки.

4. Статистическая обработка результатов

Одной из основных задач нашего исследования является статистическая обработка полученных при симуляции Монте-Карло данных.

Полной характеристикой случайной величины является ее распределение. Распределение, или закон распределения понимают как частоты (вероятности) для случайной величины. Если попытаться более точно охарактеризовать понятие закона распределения, то можно сказать, что это правило, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления.

Однако после применения метода Монте-Карло мы получаем набор случайных величин, теоретическую функцию распределения которых мы не имеем. Следовательно, необходимо оценить распределение случайной величины различными возможными способами. Первоначально необходимо вывести основные статистические параметры выборки, которые подразделяются на группы.

Параметры положения состоят из характеристик центра распределения. Эти параметры отражают положение различных характеристик центра на числовой оси случайной величины и имеют ее размерность. Выборочное среднее арифметическое (математическое ожидание) является самым известным и употребляемым параметром положения центра совокупности и определяется следующей формулой:

$\overline{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N) / N$, где x_i – результат, полученный в i-м испытании; N – объем выборки.

Следует также определить такие параметры, как медиана и мода. Параметры рассеивания показывают разброс случайной величины. Для выборки объемом N оценка дисперсии подсчитывается по формуле $D = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2$, где s – число степеней свободы. Величина s равна количеству элементов выборки за вычетом числа наложенных связей, т.е. s показывает количество вариантов, которое может быть произвольным при наложенных условиях.

Среднеквадратичное отклонение определяется как $\sigma_x = D^{1/2}$.

Коэффициент вариации – относительный показатель рассеивания, равный отношению стандартного отклонения к среднему значению случайной величины. Обозначим его $V = \sigma_x / \overline{x}$.

Важно также проанализировать форму распределения случайной величины, которая характеризуется асимметрией и эксцессом.

Еще одной важной задачей является построение эмпирической функции величин, для которых проводились симуляции. Эмпирическая функция – это естественное приближение теоретической *функции распределения* данной *случайной величины*, построенное по выборке, которое служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Если полученные статистические данные соответствуют какому-то теоретическому распределению, наиболее точно описывающему эти данные, необходимо применить ряд критериев для проверки. Представление о согласии эмпирического распределения с теоретической моделью дает сопоставление их графиков: гистограммы и кривой теоретических частот; гистограммы накопительных частот и накопительной кривой теоретических частот; эмпирической функции распределения на графике в специальном масштабе, который линеаризует интегральную функцию теоретической модели.

Если говорить о формальной близости эмпирического и адекватного ему теоретического распределения, то они не могут в точности совпадать в силу ограниченности выборки, порождающей случайные отклонения частот и параметров. Кроме того, очень малое расхождение между эмпирической и теоретической функциями указывает на их несогласие, поскольку по закону больших чисел эмпирические частоты сходятся к вероятностям только при неограниченном увеличении объема выборки [15].

Для доказательства соответствия эмпирического и теоретического распределений существует несколько различных критериев, например критерий Шапиро – Уилка для проверки согласия с нормальным и логнормальным распределениями. В этом критерии используется квадрат суммы взвешенных разностей между отстоящими от концов вариантами предварительно упорядоченной выборки. Кроме того, примеряются такие наиболее популярные критерии, как критерий Колмогорова – Смирнова, критерий согласия Пирсона и многие другие.

При исследовании задач протекания оценке в первую очередь будет поддаваться параметр p_c. Однако в результате симуляций мы можем также получить значения различных критических показателей степени, позволяющих построить распределения таких важных для модели протекания показателей, как число кластеров n_s, средняя длина конечного кластера $S(p)$, параметр порядка длины корреляции $\xi(p)$, параметр порядка системы P_∞.

Следует заметить, что для нахождения истинного порога протекания $p_c(\infty) = \lim\limits_{L\to\infty} p_c(N)$, где N – количество ячеек в решетке, $N = L\times L$, необходимо менять число узлов в решетке и получать зависимость $p_c(N)$. Для этой зависимости нужно подобрать выражение вида $p_c(N) = p_c(\infty) + D/N^\gamma$, т.е. выбрать три величины $p_c(\infty)$, D и γ так, чтобы представленное выражение наилучшим образом описывало полученные с помощью метода Монте-Карло результаты. Если это удается сделать таким образом, что $\gamma > 0$, то можно сказать, что величина $p_c(\infty)$ и равна предельному значению p_c. Точность этой процедуры будет тем лучше, чем больше получено данных, необходимых для установления зависимости $p_c(N)$ [11].

Значения данных параметров возможно получить с помощью применения метода наименьших квадратов. В основе данного метода лежит установление зависимости между двумя переменными. На первоначальном этапе необходимо определиться с видом зависимости. В данном случае мы видим, что функция, определяющая зависимость, является степенной.

Следующий этап – нахождение неизвестных параметров этой функции. Задача сводится к нахождению таких параметров D и γ, при которых функция $S=\sum_{i=1}^{N}(p_c(N)-p_{ci}(N))^2 \to \min$ принимает наименьшее значение. Необходимо подобрать такое значение параметров, чтобы $\partial S / \partial p_c = 0$. В результате мы получим систему, позволяющую получить необходимые значения параметров.

5. Статистическая обработка показателей состояния фондового рынка. Описание модели

Обратимся к применению модели решеточной перколяции, описывающей фазовый переход второго рода, на финансовом рынке и рассмотрим данную модель подробнее.

Некоторое количество агентов на рынке предпочитают действовать согласно поведению и предпочтению своих коллег. Такое поведение агентов довольно просто объяснить с точки зрения психологии: человек в своей повседневной жизни, как правило, не существует абсолютно независимо от окружающих и поддается определенному влиянию. Такая корреляция в наиболее простом случае приводит к образованию случайных кластеров, в нашем случае – групп трейдеров на финансовом рынке, которые предпочитают покупать и продавать единовременно.

Таким образом, изменение цены в определенный промежуток времени характеризуется разницей между спросом и предложением «продающих» и «покупающих» групп агентов. Результатом создания и агрегирования данной модели является эмпирическое распределение изменения цены на финансовом рынке [1].

Далее рассмотрим подробное математическое описание модели.

Первоначально происходит генерация перколяционной решетки размером $L\times L$ ячеек, где каждая ячейка соответствует одному агенту на рассматриваемом рынке. Соответственно, L^2 – общее количество агентов, действующих на данном рынке. Каждой ячейке присваивается случайное значение, равномерно распределенное на интервале [0,1]. Каждая ячейка занимается случайным образом с вероятностью p или остается свободной с вероятностью $1-p$ соответственно. Соседствующие занятые ячейки формируют кластеры. В данном случае p

можно трактовать как вероятность i-го агента вступить во взаимодействие с j-м агентом.

В наиболее простой интерпретации данной модели за время одной итерации каждый кластер агентов принимает решение покупать с вероятностью a, продавать с вероятностью a, а также не предпринимать никаких действий («спать») с вероятностью $1 - 2a$. В данной модели a является мерой временного интервала между двумя итерациями. Следует учитывать, что разные инвесторы предпочитают совершать активные действия в разные промежутки времени, например за минуту, за неделю или за год. Таким образом, a позволяет учитывать соответствие всех инвесторов одной итерационной временной единице: маленькое значение a соответствует короткому промежутку времени, тогда как значения a, близкие к максимуму, равному 1/2, говорят о длинном временном интервале [3, 16].

Рассмотренное выше допущение основано на предположении, что агенты покупают или продают ценные бумаги случайным образом без какого-либо влияния текущих рыночных трендов. Однако в реальной ситуации на решение агентов влияет множество различных факторов, таких как общее состояние экономики, тренды и сложившиеся тенденции, социальные и политические новости и проч. Все это оказывает влияние на формирование спроса и предложения.

Таким образом, целесообразным является обозначение в модели несимметричности спроса и предложения на рынке. Обратимся к модификации, предложенной в работах [3, 16]. Обозначим через p_{buy} вероятность того, что рассматриваемая группа агентов будут покупать. Соответственно, $p_{\text{sell}} = 1 - p_{\text{buy}}$ – вероятность того, что группа агентов будут продавать ценные бумаги.

Тогда за время одной итерации каждый кластер будет принимать решение покупать с вероятностью $2ap_{\text{buy}}$, продавать с вероятностью $2a(1 - p_{\text{buy}})$ или бездействовать с вероятностью $1 - 2a$ соответственно, где a является мерой временного интервала между двумя итерациями, как это было отмечено ранее. Обозначенные вероятности представляют полную группу событий и в сумме равны единице. Данный вывод следует из допущения, что сумма вероятностей покупки и продажи равна единице: если агент активен, то в течение одной итерации у него есть только два возможных варианта действия – покупка или продажа бумаги.

Цена на рынке за один временной интервал изменяется пропорционально разнице между спросом и предложением на этом рынке.

В общем виде величина изменения цены за одну итерацию определяется как $\Delta(t) = \sum_{\text{buy}} n_s s - \sum_{\text{sell}} n_s s.$ Иными словами, общий объем спроса на рынке рассчитывается как количество всех агентов, которые совершили покупку за данный временной промежуток. Количество агентов определяется как сумма всех агентов, принадлежащих всем кластерам, которые приняли решение о покупке. Соответственно, определяется размер предложения, т.е. сумма всех агентов, принадлежащих всем кластерам, которые приняли решение продавать.

Таким образом, для каждого временного шага важно проанализировать существующие кластеры и найти число кластеров n_s, которые включают по s агентов каждый. Распределение P (Δ) зависит от распределения величины n_s – числа кластеров. В свою очередь, распределение n_s подчиняется следующему закону: n_s = $f[(p - p_c)s^{\sigma}] / s^{\tau}$, где σ, τ – критические параметры, а функция f ведет себя экспоненциально. Данный закон распределения позволяет получать значения параметров модели, которые находятся в тесной взаимосвязи друг с другом. Получив параметры, мы можем проанализировать характер этих взаимосвязей.

Следует отметить, что значение изменения цены $\Delta(t)$ находится в зависимости от значения параметра p_c – порога протекания через параметр n_s. Таким образом, можно сделать вывод о наличии зависимости между направлением изменения цены и моментом наступления краха рынка. Для исследования рынка наиболее важным и интересным является анализ поведения агентов при наступлении порога перколяции, а также изменение цены в переломный момент. Это объясняется следующим рыночным механизмом: при $p < p_c$ происходит рост цены и в данных условиях агенты входят на рынок. Вследствие этого растет показатель p, однако рост происходит до наступления краха рынка при $p = p_c$. Далее происходит резкое падение цены, агенты несут потери и уходят с рынка, в результате чего вновь понижается показатель p и процесс роста цен начинается заново. Крах рынка при появлении на решетке бесконечного кластера объясняется тем, что подавляющая для данного рынка часть агентов имеют схожие мнения насчет своих действий. Это ведет к массовой продаже и покупке, которая, в свою очередь, приводит к кризису на рынке [16].

Таким образом, основной целью создания данной модели является получение распределения величины p_c – порога протекания решетки, пороговой вероятности наступления краха рынка, а также получение эмпирического распределения Δ – изменения цены на данном рынке в ситуации краха.

В модели используются следующие основные параметры: L^2 – общее количество трейдеров на данном рынке; a – мера временного интервала для одной итерации; p_{buy} – вероятность того, что агент примет решение о покупке; n_s – количество кластеров, включающих в себя s агентов; p_c – вероятность образования на решетке бесконечного кластера; Δ – изменение цены на один итерационный период времени.

Следует заметить, что нами рассмотрена базовая интерпретация модели. Однако существует множество усложнений, которые позволяют получить более точные результаты. В статьях [3, 17] предложена модификация модели, которая более реалистично отражает выбор действия каждого кластера. Рассмотрим некоторые из них.

Соотношение вероятностей покупки и продажи достаточно сильно зависит от последней известной трейдеру цены и от последнего известного изменения цены [3, 17]. Следует также учитывать психологию агентов, которые верят в то, что предыдущие тренды будут продолжаться. Так, при $\Delta < 0$ получается следующая зависимость: $p_{\text{buy}} = 0{,}5 - 5 \cdot 10^{-7} x + 5 \cdot 10^{-4} r$, при $\Delta > 0$ $p_{\text{buy}} = 0{,}5 - 5 \cdot 10^{-7} x + 5 \cdot 10^{-5} r$, где Δ, x – значения, полученные на предыдущем временном шаге. Разница между этими двумя уравнениями объясняется тем, что агенты идут на риск с большим нежеланием, т.е. падение цены более впечатляет агентов и влияет на их решение, чем ее возрастание. Таким образом, мы можем наблюдать незначительную асимметрию.

Кроме того, в соответствии с реальной ситуацией активность a трейдеров возрастает при положительном изменении цены Δ. Иными словами, параметр a в данной модели также следует определять на каждом итерационном шаге в соответствии со следующим законом: $a(t+1) = a(t) + 0{,}5\Delta(t) / L^2$, где L – радиус наибольшего кластера. Однако следует помнить о том, что величина a имеет строгую область определения $a \in [10^{-4}; 1/2]$ [16].

Таким образом, данная модель была рассмотрена нами в упрощенной форме, однако существует множество различных усложнений, позволяющих более точно и приближенно смоделировать реальную рыночную ситуацию.

Заключение

В данном обзоре представлена математическая модель, описывающая финансовый рынок как физическую систему, в которой происходит фазовый переход второго рода.

В данной модели цена актива за один временной интервал изменяется пропорционально разнице между спросом и предложением на этом рынке. Ключевой ситуацией для изучения является момент образования бесконечного кластера на перколяционной решетке, так как это означает крах рынка, когда подавляющая для данного рынка часть агентов имеют схожие мнения насчет своих действий по покупке или продаже актива. Основными характеристиками процесса являются пороговая вероятность наступления краха рынка, а также эмпирическая функция распределения изменения цены на данном рынке.

Для физически реальных решеток можно привести лишь небольшое число точных формул, определяющих функцию p_c или хотя бы величину p [18]. Математически теория протекания тесно связана с другими «решеточными» задачами, возникающими в теории неупорядоченных систем, например в модели Изинга и в «сегнетоэлектрических» моделях, а также в связи с проблемой исключенного объема в полимерах.

Список литературы

1. Bouchaud J.-P. An introduction to statistical finance // Physica A. – 2002. – No. 313. – P. 238–251.

2. Stauffer D., Sornette D. Self-organized percolation model for stock market fluctuation // Physica A. – 1999. – No. 271. – P. 496–506.

3. Stauffer D. Percolation models of financial market dynamics // Advances in Complex Systems. – 2001. – Vol. 4, no. 1. – P. 19–27.

4. Бячкова А.А., Мызникова Б.И. Моделирование финансового рынка с помощью теории перколяции // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. / под общ. ред. М.В. Радионова; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2012. – Вып. 5. – С. 30–37.

5. Бячкова А.А., Мызникова Б.И. Калибрация перколяционной модели финансового рынка // Междисциплинарные исследования: материалы науч.-

практ. конф., г. Пермь, 9–11 апреля 2013 г. / под ред. Ю.А. Шарапова; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2013. – Т. 1. – С. 126–128.

6. Byachkova A., Simonov A. Modeling financial market using percolation theory // Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure / eds. A.K. Bera, Cham, Heidelberg [et al.]. – Springer, 2015. – P. 47–53.

7. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.

8. Newman M.E.J., Ziff R.M. Efficient Monte Carlo algorithm and high-precision results for percolation // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 85, no. 19. – P. 4104–4107.

9. Percolation of Monte Carlo clusters / W.G. Wanzeller, A. Cucchieri, T. Mendes, G. Krein // Brazilian Journal of Physics. – 2004. – Vol. 34, no. 1A. – P. 247–250.

10. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: в 2 ч. / пер. с англ. В.А. Панченко, А.Н. Полюдова. – М.: Мир, 1990. – Ч. 2. – 400 с.

11. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 176 с.

12. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс: учеб. пособие. – 4-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.

13. Панченко Т.В. Генетические алгоритмы: учеб.-метод. пособие / под ред. Ю.Ю. Тарасевича; Астрахан. ун-т. – Астрахань, 2007. – 87 с.

14. Ивлиев С.В. Исследование кредитного риска методом Монте-Карло [Электронный ресурс]. – 2004. – URL: http://www.riskland.ru / lib/CreditRisk-MonteCarlo.shtml (дата обращения: 20.09.2019).

15. Решение экономических задач на компьютере / А.В. Каплан, В.Е. Каплан, М.В. Мащенко, Е.В. Овечкина. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2004. – 600 с.

16. Chang I., Stauffer D., Pandey R.B. Asymmetries, correlations and fat tails in percolation market model // International Journal of Theoretical and Applied Finance. – 2002. – Vol. 5, no. 6. – P. 585–597.

17. Sornette D., Stauffer D., Takayasu H. Market fluctuation II: multiplicative and percolation models, size effects and prediction // The Science of Disasters: Climate Disruptions, Heart Attacks and Market Crashes / eds. A. Bunde, J. Kropp, H.J. Schellnhuber. – Springer, 2002. – Chapter 14. – P. 411–436.

18. Энциклопедия по машиностроению XXL. Оборудование, материаловедение, механика и …. Теория протекания [Электронный ресурс]. – URL: http://mash-xxl.info/info/731233/ (дата обращения: 20.09.2019).

References

1. Bouchaud J.-P. An introduction to statistical finance // *Physica A.* 2002. № 313. P. 238–251.

2. Stauffer D., Sornette D. Self-organized percolation model for stock market fluctuation // *Physica A.* 1999. № 271. P. 496–506.

3. Stauffer D. Percolation models of financial market dynamics // *Advances in Complex Systems.* 2001. V. 4, № 1. P. 19–27.

4. Byachkova A.A., Myznikova B.I. Modelirovaniye finansovogo rynka s pomoshch'yu teorii perkolyatsii [Modeling the financial market using percolation theory] // *Informatsionnyye sistemy i matematicheskiye metody v ekonomike: sb. nauch. tr.* / obshch. red. M.V. Radionova; Perm. gos. nats. un-t. Perm', 2012. Vyp. 5. P. 30–37. (In Russian).

5. Byachkova A.A., Myznikova B.I. Kalibratsiya perkolyatsionnoy modeli finansovogo rynka [Calibration of the percolation model of the financial market] // *Mezhdistsiplinarnyye issledovaniya: sb. mater. nauch.-prakt. konf. (Perm', 9–11 aprelya 2013 g.)* / gl. red. YU.A. Sharapov; Perm. gos. nats. issled. un-t. Perm', 2013. T. 1. P. 126–128. (In Russian).

6. Byachkova A., Simonov A. Modeling financial market using percolation theory // *Financial Econometrics and Empirical Market Microstructure.* A.K. Bera et al. (eds.). Cham, Heidelberg et al.: Springer, 2015. P. 47–53.

7. Tarasevich Yu.Yu. Perkolyatsiya: teoriya, prilozheniya, algoritmy: Uchebnoye posobiye. [Percolation: theory, applications, algorithms: textbook.] M.: Editorial URSS, 2002. 112 p. (In Russian).

8. Newman M.E.J., Ziff R.M. Efficient Monte Carlo algorithm and high-precision results for percolation // *Physical Review Letters.* 2000. V. 85, № 19. P. 4104–4107.

9. Wanzeller W.G., Cucchieri A., Mendes T., Krein G. Percolation of Monte Carlo clusters // *Brazilian Journal of Physics.* 2004. V. 34, № 1A. P. 247–250.

10. Guld K.H., Tobochnik Y.A. Komp'yuternoye modelirovaniye v fizike: v 2 chastyakh. Chast' 2. [Computer simulation in physics: in 2 parts. Part 2.] / Perevod s angl. V.A. Panchenko, A.N. Polyudov, M.: Mir, 1990. 400 p. (In Russian).

11. Efros A.L. Fizika i geometriya besporyadka. [Physics and geometry of disorder.] M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1982. 176 p. (In Russian).

12. Tarasevich Yu.Yu. Matematicheskoye i komp'yuternoye modelirovaniye. Vvodnyy kurs: Uchebnoye posobiye. Izd. 4-ye, ispr. [Mathematical and computer modeling. Introductory course: study guide. 4 Edition, revised.] M.: Editorial URSS, 2004. 152 p. (In Russian).

13. Panchenko T.V. Geneticheskiye algoritmy: uchebno-metodicheskoye posobiye [Genetic Algorithms: a training manual] / pod redaktsiyey Yu.Yu. Tarasevicha. Astrakhan': Izdatel'skiy dom «Astrakhanskiy universitet», 2007. 87 p. (In Russian).

14. Ivliyev S.V. *Issledovaniye kreditnogo riska metodom Monte Carlo. 2004.* [Monte Carlo credit risk research. 2004.] [Elektronnyy resurs] / Rezhim dostupa: http://www.riskland.ru/ lib/CreditRiskMonteCarlo.shtml, svobodnyy. Zagl. s ekrana, yaz. russkiy (data obrashcheniya: 20.09.2019). (In Russian).

15. Kaplan A.V., Kaplan V.E., Mashchenko M.V., Ovechkina Ye.V. Resheniye ekonomicheskikh zadach na komp'yutere. [The solution of economic problems on the computer.] M.: DMK Press; SPb.: Piter, 2004. 600 p. (In Russian).

16. Chang I., Stauffer D., Pandey R.B. Asymmetries, correlations and fat tails in percolation market model // *International Journal of Theoretical and Applied Finance.* 2002. V. 5, № 6. P. 585–597.

17. Sornette D., Stauffer D., Takayasu H. Market fluctuation II: multiplicative and percolation models, size effects and prediction // A. Bunde, J. Kropp, H.J. Schellnhuber (eds.). *The Science of Disasters: Climate Disruptions, Heart Attacks, and Market Crashes*, Chapter 14. Springer, 2002. P. 41 1–436.

18. *Entsiklopediya po mashinostroyeniyu XXL. Oborudovaniye, materialovedeniye, mekhanika i …. Teoriya protekaniya* [Encyclopedia of mechanical engineering XXL. Equipment, materials science, mechanics and …. flow theory] // [Elektronnyy resurs]. URL: http://mash-xxl.info/info/731233/ (data obrashcheniya: 20.09.2019). (In Russian).

Получено 23.11.2019

Принято 03.02.2020

Сведения об авторах

Андрианов Дмитрий Леонидович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: andrianov@econ.psu.ru).

Симонов Петр Михайлович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.ru).

About the authors

Dmitrii L. Andrianov (Perm, Russia Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: andrianov@econ.psu.ru).

Petr M. Simonov (Perm, Russia Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018:

Андрианов, Д.Л. Обзор методов экономико-математического моделирования, основанных на принципах эконофизики. Часть 2 / Д. Л. Андрианов, П. М. Симонов. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.2.09. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 2. – С. 165–190.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Андрианов Д.Л., Симонов П.М. Обзор методов экономико-математического моделирования, основанных на принципах эконофизики. Часть 2 // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 2. – С. 165–190. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.09

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Andrianov D.L., Simonov P.M. A review of the methods of economic and mathematical modeling based on the principles of econophysics. Part 2. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 2, pp. 165–190. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.2.09 (*in Russian*)