DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.08
УДК 519.714.3

А.О. Алексеев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

УПРАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ, СОСТОЯНИЯ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЮТСЯ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Рассматривается задача управления объектом, который имеет несколько значимых для лица, принимающего решения, критериев, каждый из которых характеризует объект управления с точки зрения частного результата деятельности или показателя эффективности. Для оценивания эффективности функционирования управляемого объекта в целом используется матричный механизм комплексного оценивания, учитывающий все критерии в комплексе. Задача оптимального управления формулируется как поиск значений сворачиваемых критериев, обеспечивающих заданное значение комплексного показателя при минимальных затратах на обеспечение значений частных критериев. Благодаря полученному аналитическому уравнению линии уровня агрегированного в результате свертки двух критериев показателя, обобщенную затратную функцию удалось свести к уравнению с одной переменной. Уравнение линии найдено для произвольной бинарной матрицы свертки, в том числе элементы которой заданы непрерывными значениями. Показано, что целевая функция сводится к полиному четвертого порядка, который может быть аналитически решен с помощью метода Феррари или Декарта – Эйлера.

Показано, что задача поиска значений двух частных критериев, описывающих состояние объекта управления, при которых комплексный показатель, вычисляемый с помощью аддитивно-мультипликативного подхода к комплексному оцениванию, равен заданному значению и при этом затраты на их обеспечение минимальны, имеет решение в общем виде для произвольной неубывающей матрицы свертки двух критериев.

Найдены частные решения задачи управления при использовании затратных функций, являющихся обратным случаем производственной функции Кобба – Дугласа. При этом показано, что затратная функция агрегированного показателя имеет дополнительные слагаемые и описывается уже алгебраическим уравнением с ненулевыми коэффициентами при переменных и дополнительной константой. На основании чего был сделан вывод, что затратные функции, являющиеся обратным случаем производственной функции Кобба – Дугласа, могут применяться к объектам управления, имеющим только два критерия.

Рассмотрена аналогичная постановка задачи управления для произвольной неубывающей матрицы свертки двух критериев при использовании аддитивно-мультипликативного подхода к комплексному оцениванию и при использовании затратных функций, описываемых алгебраическим уравнением второго порядка в общем виде. В результате исследования показано, что вид затратной функции для агрегированного показателя сохраняется. Таким образом, при использовании затратных функций в виде уравнений второго порядка задача управления имеет решение в общем виде для любого числа критериев.

Ключевые слова: механизмы управления, механизмы контроля, дизайн механизмов, комплексное оценивание, аддитивно-мультипликативный подход, управление, оптимальное управление, затратные функции, производственная функция Кобба – Дугласа, полиномы высших степеней, метод Феррари.

A.O. Alekseev

Perm National Research Polytechnic University,
Perm, Russian Federation

CONTROL OF A COMPLEX OBJECTS, STATES OF WHICH ARE DESCRIBING BY THE MATRIX RATING MECHANISM

The control problem of a multi-criteria object is considered. Controlled object that has several criteria that are significant for a decision maker. Each criterion characterizes a control object in terms of a particular result of activity or an efficiency indicator. To evaluate the effectiveness of the functioning of the managed facility as a whole, the rating matrix mechanism is used, taking into account all the criteria in the complex. The optimal control problem is formulated as a search for the values of aggregated criteria that provide a given value of a complex indicator with minimal costs for providing values of particular criteria. The generalized cost function was reduced to an equation with one variable. The analytical equation of the level line of the indicator aggregated as a result of the convolution of two criteria is obtained. The line equation is found for an arbitrary binary convolution matrix, including the elements of which are given continuous values. It is shown that the objective function is reduced to a fourth-order polynomial, which can be analytically solved using the Ferrari or Descartes-Euler methods.

It is shown that the task of searching for the values of two particular criteria describing the state of the control object for which the complex indicator calculated using the additive-multiplicative approach to complex assessment is equal to the given value and the costs for their provision are minimal, has a solution in general form for arbitrary nondecreasing convolution matrix of two criteria.

Particular solutions to the control problem are found using costly functions, which are the inverse function of the Cobb-Douglas production function. It was shown that the cost function of the aggregate indicator has additional terms and is described by an algebraic equation with nonzero coefficients for variables and an additional constant. Based on what it was concluded that the cost functions, which are the inverse function e of the Cobb-Douglas production function, can be applied to control objects that have only two criteria.

A similar formulation of the control problem for an arbitrary non-decreasing convolution matrix of two criteria is considered when using the additive-multiplicative approach to aggregation and when using cost functions described by a second-order algebraic equation in general form. As a result of the study, it is shown that the form of the cost function for the aggregated indicator is preserved. Thus, using cost functions in the form of second-order equations, the control problem has a solution in the general form for any number of criteria.

Keywords: control mechanisms, rating and control mechanisms, mechanisms design, aggregation, additive-multiplicative approach, control, optimal control, cost functions, Cobb–Douglas production function, higher-degree polynomial equation, Ferrari method.

Введение

Матричные механизмы комплексного оценивания (ММКО) традиционно используются в организационно-технических и социально-экономических системах [1–6] для выполнения функции контроля, в частности многокритериального анализа результатов деятельности и разработки мер по повышению эффективности функционирования этих систем с учетом важности для лица, принимающего решения (ЛПР), частных критериев, по которым оцениваются результаты деятельности.

Для дискретных ММКО, задаваемых пересчетными шкалами, матрицами свертки и деревом критериев, известны методы [5], позволяющие найти оптимальные варианты и способы управления многомерными объектами.

Задачи оптимизации и управления многомерными объектами, состояние которых описывается с помощью непрерывного ММКО, подробно рассмотрены в работе [7]. Однако в работе [7] и ряде других работ (например, источник [8]) для комплексного оценивания использовалась функция интерполяции, эквивалентная нечеткой процедуре комплексного оценивания с максиминным подходом к теоретико-множественным операциям над нечеткими множествами, а в работах [9, 10] показано существование двух классов ММКО: максиминных и аддитивно-мультипликативных.

Задача управления в случае использования аддитивно-мультипликативного подхода к комплексному оцениванию уже рассматривалась в работе [11], однако там была лишь сформулирована математическая постановка задачи и рассмотрены шесть случаев, так называемых стандартных функций свертки, образованных четырьмя смежными элементами матрицы свертки (таблица).

Стандартные функции свертки и их аналитическая запись

Обозначение стандартной функции свертки	Элемент матрицы				Функция свертки
	j_3	j_4	j_5	j_6	
$F0$	k	k	k	k	$v = j_3 = k$
$F1$	k	k	k	$k+1$	$v = k + \gamma_1\gamma_2$
$F2$	k	$k+1$	k	$k+1$	$v = k + \gamma_1$
$F3$	k	$k+1$	$k+1$	k	$v = k + \gamma_2$
$F4$	k	$k+1$	$k+1$	$k+1$	$v = k + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2$
$F5$	k	$k+1$	$k+1$	$k+2$	$v = k + \gamma_1 + \gamma_2$

В данной статье рассматривается общий случай, когда матрица свертки должна быть неубывающей, но без ограничения на целочисленность значений элементов матрицы свертки [12]. Этот случай востребован при согласовании матрицы свертки несколькими экспертами. Например, в работах [13, 14] показано, что согласованная матрица имеет элементы в непрерывном виде.

1. Задачи управления

Пусть объект управления (ОУ) имеет несколько значимых для ЛПР критериев ($n > 2$), каждый из которых характеризует ОУ с точки зрения частного результата деятельности или показателя эффективности. Для оценивания эффективности функционирования ОУ в целом используется ММКО, учитывающий все критерии в комплексе.

Задача управления формулируется следующим образом: требуется при заданном значении комплексного показателя найти значения частных критериев, при которых будет минимальная стоимость на их обеспечение:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i\left(x_i\right) \to \min; \\ P\left(x_1,\ldots,x_n\right) = v; \\ x_i \in X_i,\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

где n – количество частных критериев; $C_i\left(x_i\right)$ – затратная функция, обеспечивающая требуемое значение частного критерия x_i; P – процедура комплексного оценивания критериев $x_1,\ldots,x_n$, результатом которой является значение комплексного показателя v.

В общем случае ММКО задается набором $G, M, \{X_i\}, P$, где G – граф, описывающий последовательность свертки частных критериев; M – множество матриц свертки, описывающих правила агрегирования критериев; X_i – множества[1] значений частных критериев. В данной работе рассмотрим ММКО, использующий в качестве процедуры P аддитивно-мультипликативный подход [9–15].

Особенность ММКО заключается в том, что дерево критериев формируется таким образом, чтобы критерии были независимы друг от друга. Ввиду этого задача управления может решаться для отдельных узлов дерева, в которых заданы матрицы свертки. В работе [16] доказано, что 2-дерево является оптимальной структурой графа с точки

[1] При решении прикладных задач, как правило, используется единое (универсальное) множество для всех критериев.

зрения процедуры идентификации параметров механизма комплексного оценивания. Таким образом, будем считать, что граф G является 2-деревом, в узлах которого расположены бинарные матрицы свертки.

Тогда для пары критериев $(n=2)$ частная задача управления имеет следующую математическую постановку:

$$\begin{cases} C_1(x_1)+C_2(x_2)\to \min; \\ P(x_1,x_2)=v; \\ x_i\in X_i,\ i=1,2. \end{cases} \tag{2}$$

Для двух критериев, согласно аддитивно-мультипликативному подходу P_{AM} [8], комплексная оценка вычисляется следующим образом:

$$v(x_1,x_2)=j_3+\gamma_1(j_4-j_3)+\gamma_2(j_5-j_3)+\gamma_1\gamma_2(j_6+j_3-j_4-j_5), \tag{3}$$

где γ_1 и γ_2 – остатки значений критериев x_1 и x_2 соответственно; j_3 – элемент матрицы свертки, номер строки которого определен целой частью значения первого критерия $(\lfloor x_1\rfloor)$, а номер столбца – целой частью значения второго критерия $(\lfloor x_2\rfloor)$; j_4 – элемент матрицы свертки, номер строки которого смещен на единицу относительно j_3; j_5 – элемент матрицы свертки, номер столбца которого смещен на единицу относительно j_3; j_6 – элемент матрицы свертки, который смещен на единицу относительно j_3 по строке и столбцу.

Из формулы (3) видно, что при заданном значении комплексного показателя $v(x_1,x_2)$ можно выразить остаток первой переменной через остаток второй $\gamma_1=f(\gamma_2,v)$, или наоборот. Таким образом, удастся перейти от затратной функции вида $C(x_1,x_2)$ к затратной функции $C(\gamma_2,v)$ при v, которая задается по условию задачи (2). Взяв частную производную функции $C(\gamma_2,v)$ по переменной γ_2 и найдя корень уравнения $\dfrac{\partial C(\gamma_2,v)}{\partial\gamma_2}=0,$ принадлежащий отрезку [0;1), получим γ_2^*, выраженную от v и остальных параметров a_1, a_2, $\lfloor x_1\rfloor$, $\lfloor x_2\rfloor$, а также параметров матрицы свертки. В случае отсутствия корней на отрезке

[0;1) решение будет на границе области определения сворачиваемых критериев $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$.

Найдя γ_2^*, удастся найти γ_1^*, а значит, удастся найти x_1^* и x_2^*, которые будут решением задачи (2). При этом решение задачи (2) зависит от значения комплексной оценки *v*. Подставив корни $\gamma_2^*(v)$ и $\gamma_1^*(v)$ в затратную функцию, получим $C\left(v^M(x_1, x_2)\right)$, описывающую оптимальные затраты на обеспечение комплексного показателя, агрегированного в результате свертки критериев x_1 и x_2 по заданной матрице *M*.

Этот подход можно применять ко всем бинарным матрицам свертки последовательно. Так, например, ОУ описывается тремя критериями, дерево критериев *G* такое, что вначале сворачиваются x_1 и x_2, а затем результат $v(x_1, x_2)$ сворачивается с критерием x_3. Тогда вначале необходимо решить задачу (2) для x_1 и x_2 и получить $C\left(v^{M_I}(x_1, x_2)\right)$, затем решить задачу для $v(x_1, x_2)$ и x_3 в постановке, аналогичной задаче (2):

$$\begin{cases} C\left(v^{M_{\mathrm{I}}}(x_1, x_2)\right) + C_3(x_3) \to \min; \\ P\left(v^{M_{\mathrm{I}}}(x_1, x_2), x_3\right) = v^{M_{\mathrm{II}}}; \\ x_i \in X_i,\ i = 1, 3, \end{cases}$$

где M_{I} – матрица свертки терминальных критериев x_1 и x_2; M_{II} – матрица свертки агрегированного критерия $v(x_1, x_2)$ и терминального критерия x_3.

Используя предлагаемый подход, можно решать задачу управления (1) для ОУ, описываемых *n* критериями, переходя от матриц свертки терминальных критериев, расположенных на ветвях дерева *G*, к матрицам свертки, расположенным в следующих узлах дерева, и так до тех пор, пока не дойдем до корня дерева (узла, вершина которого имеет всего два ребра). Для любого дерева критериев *G*, являющегося 2-деревом, количество матриц свертки всегда на единицу меньше количества критериев, т.е. $|M| = n-1$. Таким образом, решение задачи (1) состоит из $n-1$ решения задач вида (2).

Сформулируем обратную задачу управления: требуется найти максимальное значение комплексного показателя $v(x_1,\ldots,x_n)$ при ограниченном объеме ресурсов R:

$$\begin{cases} P(x_1,\ldots,x_n) \to \max; \\ \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) \le R; \\ x_i \in X,\ i=\overline{1,n}. \end{cases} \qquad (4)$$

Задача (4) решается на основе затратной функции $C = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$, которая определяется на множестве всех значений комплексного показателя путем решения задачи (1). Так, имея общую затратную функцию для любой комплексной оценки, мы можем найти набор значений критериев, при которых затраты на их обеспечение имеют минимум. Набор критериев $x_1^*,\ldots,x_n^*$, обеспечивающих условие $\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i^*) = R$ и являющихся решением задачи (1), будет обеспечивать максимальное значение комплексного показателя $v = P(x_1^*,\ldots,x_n^*)$. Это является следствием из следующего. Не существует такой комбинации $x_1,\ldots,x_n$, где все критерии не превышали бы оптимальных $x_i \le x_i^*$ и при этом выполнялось $v(x_1,\ldots,x_n) > v(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, так как в силу монотонности функции свертки (2) для любых $x_i \le x_i^*$ всегда справедливо следующее: $v(x_1,\ldots,x_n) \le v(x_1^*,\ldots,x_n^*)$. В случае, если значение хотя бы одного критерия $x_i > x_i^*$ превышает оптимальное положение, это приведет к лишним затратам и, значит, к условию $\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) > R$, противоречащему ограничению задачи (4).

Задача управления может быть сформулирована иначе: на множестве допустимых значений частных критериев требуется найти такую совокупность значений частных критериев, образующих траекторию развития ОУ, при которых будет обеспечиваться максимальный прирост комплексного показателя на единицу вложенного ресурса. В этом случае целевая функция будет задаваться интегралом

$$\int \frac{v(x_1,\ldots,x_n)}{C(v(x_1,\ldots,x_n))} dv \to \max. \tag{5}$$

Если рассмотреть дискретный случай, т.е. вместо интеграла (5) рассмотреть сумму, то максимум аддитивной функции обеспечивается при стремлении к максимуму всех слагаемых суммы, а максимум деления комплексного показателя на затраты, обеспечивающего его значение, при любом значении комплексного показателя достигается при минимальном значении знаменателя. Тогда максимум (5) обеспечивается при минимуме $C(v(x_1,\ldots,x_n))$, которая, в свою очередь, является следствием решения задачи (1).

Таким образом, необходимо прежде всего найти решение задачи (1). Поскольку задача (1), как отмечено выше, решается последовательно в постановке (2). Рассмотрим именно этот случай.

2. Аддитивно-мультипликативная процедура комплексного оценивания при произвольной матрице свертки

В работах [11, 15] были показаны частные случаи выражения (2) соответствующие, стандартным функциям свертки (см. таблицу).

Для того чтобы рассмотреть общий случай, когда элементы матрицы могут быть заданы любыми значениями из непрерывной одномерной шкалы при сохранении монотонности, введем следующие обозначения: $j_4 - j_3 = r$ (r от *англ.* rows, так как берется разница элементов по строке), $j_5 - j_3 = c$ (c от *англ.* columns, так как берется разница элементов по столбцу), $j_6 + j_3 - j_4 - j_5 = d$ (d от *англ.* diagonal, так как берется разница элементов по диагонали). Тогда формула (2) с учетом принятых обозначений примет вид

$$v = j_3 + \gamma_1 r + \gamma_2 c + \gamma_1\gamma_2 d. \tag{6}$$

Преобразуем выражение (6), убрав γ_1 у содержащих ее слагаемых за скобку и перенеся остальные слагаемые в левую часть выражения:

$$\frac{v - j_3 - \gamma_2 c}{\left(r + \gamma_2 d\right)} = \gamma_1. \qquad (7)$$

В полученном выражении (7) обозначим $v - j_3$ как w[2]. С учетом введеных обозначений зависимость γ_1 от γ_2 примет вид

$$\gamma_1 = \frac{w - \gamma_2 c}{r + \gamma_2 d}, \qquad (8)$$

где $w \geq 0$, $\gamma_2 \in [0;1)$, $r \geq 0$, $c \geq 0$, d – единственный параметр, который может принимать отрицательные значения.

3. Постановка и решение задачи управления при затратных функциях, являющихся частным случаем обратной производственной функции Кобба – Дугласа

Пусть затратные функции для частных критериев имеют вид

$$C_i\left(x_i\right) = a_i x_i^{b_i}, \; i = \overline{1, n}, \qquad (9)$$

где a_i – обратная величина коэффициента технологичности ($a_i > 0$); b_i – обратная величина коэффициента эластичности критерия i по затратам ($b_i > 1$).

Выражение (9) является частным случаем обратной производственной функции Кобба – Дугласа [17]:

$$Q = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \qquad (10)$$

где Q – объем выпуска продукции; A – производственный коэффициент (коэффициент технологичности); K – капитал; L – труд; α, β – коэффициенты эластичности по капиталу и труду соответственно ($0 < \alpha$, $\beta < 1$).

Частным случаем производственной функции Кобба – Дугласа (10) является выражение

$$x = A \cdot C^{\alpha}, \qquad (11)$$

[2] При дискретных значениях матрицы j_3 – это целая часть комплексной оценки v, т.е. w – остаток комплексной оценки v, $w \in [0;1)$. В общем случае это не так и $w \geq 0$.

где x – результат деятельности, полученный по итогам вложения средств C (вместо K использован символ C). Соответственно, выразив C из выражения (11), получим

$$C = \frac{1}{A} x^{1/\alpha}. \qquad (12)$$

Введя в формулу (12) обозначения $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{\alpha}$, получим выражение, соответствующее выражению (9).

Пусть затратные функции имеют степенной показатель $b = 2$, как это принято в теории активных систем и теории управления организационными системами, тогда целевая функция задачи (2) будет представлена следующим образом:

$$C(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2. \qquad (13)$$

Для любого действительного числа x_i справедливо $x_i = \lfloor x_i \rfloor + \gamma_i$, где $\lfloor x_i \rfloor$ – это целая часть числа x_i; γ_i – это остаток деления числа x_i на единицу. Тогда целевая функция (13) примет вид

$$C(x_1, x_2) = a_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \gamma_1\right)^2 + a_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + \gamma_2\right)^2. \qquad (14)$$

Подставив формулу (8) в целевую функцию (14), получим следующее выражение:

$$C(\gamma_2) = a_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{w - \gamma_2 c}{r + \gamma_2 d}\right)^2 + a_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + \gamma_2\right)^2. \qquad (15)$$

Для любых диапазонов критериев $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor ; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor ; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$, заданных на множествах X_1 и X_2, параметры $\lfloor x_1 \rfloor$, $\lfloor x_2 \rfloor$, r, c и d не меняются на заданной области x_1 и x_2, а параметры a_1, a_2 заданы изначально как параметры затратных функций. Таким образом, на области $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor ; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor ; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$ выражение (15) является функцией одной переменной γ_2.

Возведем в выражении (15) слагаемые во вторую степень и раскроем скобки:

$$C(\gamma_2) = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + 2a_1 \lfloor x_1 \rfloor \left(\frac{w - \gamma_2 c}{r + \gamma_2 d} \right) + a_1 \left(\frac{w - \gamma_2 c}{r + \gamma_2 d} \right)^2 +$$

$$+ a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2 + 2a_2 \lfloor x_2 \rfloor \gamma_2 + a_2 \gamma_2{}^2.$$

Возьмем производную и приравняем нулю для поиска экстремумов:

$$C'(\gamma_2) = 2a_1 \lfloor x_1 \rfloor \left(\frac{-c(r + \gamma_2 d) - wd + \gamma_2 cd}{(r + \gamma_2 d)^2} \right) +$$

$$+ a_1 \left(\frac{(-2wc + 2\gamma_2 c^2)(r + \gamma_2 d)^2 - (w - \gamma_2 c)^2 2d(r + \gamma_2 d)}{(r + \gamma_2 d)^4} \right) +$$

$$+ 2a_2 \lfloor x_2 \rfloor + 2a_2 \gamma_2 = 0. \qquad (16)$$

В выражении (16) обозначим используемую в знаменателе сумму $r + \gamma_2 d$ как y и для оставшихся в выражении (16) γ_2 будем использовать $\gamma_2 = \dfrac{y - r}{d}$.

Выражение (16) после ряда преобразований сводится к полиному четвертой степени:

$$A \cdot y^4 + B \cdot y^3 + C \cdot y^2 + D \cdot y + E = 0, \qquad (17)$$

где $A = 2a_2$; $B = 2a_2 (\lfloor x_2 \rfloor d - r)$; $C = 0$; $D = 2a_1 d^2 (wd + rc)(\lfloor x_1 \rfloor + 1)$; $E = 2a_1 d^2 (wd + rc)^2$.

Из коэффициента A видно, что только при $a_2 = 0$ уравнение (17) сведется к уравнению третьего порядка, однако этот случай противоречит выражению (9), иначе частный критерий не имеет затрат на его изменение.

Из коэффициентов B и D, A и E видно, что выражение (17) в общем случае не является возвратным уравнением четвертого порядка.

Полином (17) является биквадратным уравнением ($B = 0$ и $D = 0$) только при выполнении условий $\lfloor x_2 \rfloor d = r$ и $d = w^{-1} rc$.

При выполнении условия $\lfloor x_2 \rfloor d = r$, при котором $B = 0$, можно для уравнения (17) выразить кубическую резольвенту и решить соответствующее уравнение третьего порядка по формуле Кордано.

Как видно из вышесказанного, применять частные методы поиска корней нецелесообразно. При этом известно, что в общем виде аналитическое решение в радикалах для алгебраических уравнений четвертой степени существует [18, 19]. Найти корни полинома (17) y можно с помощью метода Феррари или метода Декарта – Эйлера [18, 19].

Найдя корни y, можно из $\gamma_2 = \dfrac{y-r}{d}$ выразить искомую переменную γ_2, далее с помощью формулы (14) получить γ_1. Поскольку γ_1 и γ_2 являются остатками значений критериев x_1 и x_2 соответственно, удовлетворяющим решением будут только γ_1 и γ_2, принадлежащие отрезку $[0;1)$.

В случае отсутствия корней (17) на данной области допустимых значений решением будут граничные значения x_1 и x_2 на отрезках $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$. В таком случае в силу монотонности выражений (9) и (13) минимум общих затрат будет определяться по наименьшему параметру a_i. Так, если $a_1 > a_2$, то $x_1^* = \lfloor x_1 \rfloor$, а $x_2^* = j_3 + w$, в противном случае $x_1^* = j_3 + w$ и $x_2^* = \lfloor x_2 \rfloor$. Совокупность этих координат при переменной v обеспечит минимальную по стоимости траекторию развития критериев.

Однако, прежде чем искать решение полинома (17) в общем виде, рассмотрим частные случаи: $r = d = 0$ и $r \neq 0$, а $d = 0$, при которых решения задачи (2) все же существуют. Это также целесообразно, так как в следующем параграфе будет показано, что затратная функция агрегированного показателя описывается алгебраическим уравнением второго порядка с ненулевыми коэффициентами при v^1 и v^0. Это потребует пересмотра вида целевой функции (14) и в результате коэффициенты полинома (17) будут иметь иной вид.

4. Частные случаи, при которых решения задачи управления существуют

Случай 1. Знаменатель в выражении (8) зависит от параметров r и d. Ситуация, при которой оба этих параметра равны нулю, возможна. Например, при стандартной функции $F3$ (см. таблицу) элементы матрицы j_3, j_4, j_5 и j_6 принимают такие значения, что r и d становятся равными нулю. При этом из функции свертки видно, что при $F3$ комплексная оценка зависит только от γ_2: $v = j_3 + \gamma_2$. Таким образом, выразить зависимость γ_1 от γ_2 в этом случае, действительно, невозможно и предложенный выше подход не применим. Однако на области $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$, где комплексная оценка зависит только от одного частного критерия x_2, очевидно, что развитие другого будет приводить к лишним затратам, соответственно, тривиальным решением задачи (2) при $F3$ будет $x_1^* = \lfloor x_1 \rfloor$, $x_2^* = \lfloor x_2 \rfloor + w$. Совокупность этих координат при переменной v обеспечит минимальную по стоимости траекторию развития критериев при стандартной функции $F3$.

Соответственно, согласно формуле (14) затратная функция на области $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$ при $r = d = 0$ имеет вид

$$C\left(v\left(x_1, x_2\right)\right) = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor + v - j_3\right)^2. \tag{18}$$

Преобразовав выражение (18), получим затратную функцию $C(v)$ в виде алгебраического уравнения второго порядка с коэффициентами $\dot{a}$, $\dot{b}$ и $\dot{c}$:

$$C\left(v\left(x_1, x_2\right)\right) = \dot{a}v^2 + \dot{b}v + \dot{c}, \tag{19}$$

где $\dot{a} = a_2$, $\dot{b} = 2a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor - j_3\right)$ и $\dot{c} = a_1 x_1^{\,2} + a_2\left(x_2 - j_3\right)^2$. Как видно из $\dot{b}$ и $\dot{c}$, в общем случае они отличны от нуля, о чем говорилось ранее.

Случай 2. Можно заметить, что при получении полинома (17) вводилась промежуточная переменная y, в выражении которой параметр d стоит в знаменателе. Из таблицы выше видно, что частным случаем, при котором $d = 0$, является стандартная функция $F5$, также возможны и иные ситуации, при которых $d = 0$. При $d = 0$ выражение (8) принимает вид $\gamma_1 = \left(w - \gamma_2 c\right)/r$. Подставив это выражение в формулу (14), получим следующую затратную функцию:

$$C(\gamma_2) = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + 2a_1 \lfloor x_1 \rfloor \left(\frac{w - \gamma_2 c}{r}\right) + a_1\left(\frac{w - \gamma_2 c}{r}\right)^2 +$$
$$+ a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2 + 2a_2 \lfloor x_2 \rfloor \gamma_2 + a_2 \gamma_2^{\,2}.$$

Возведя третье слагаемое в степень и раскрыв скобки, получим алгебраическое уравнение второго порядка:

$$C(\gamma_2) = \dot{A}\gamma_2{}^2 + \dot{B}\gamma_2 + \dot{C}, \tag{20}$$

где введены константы $\dot{A} = a_2 + a_1 c^2 / r^2$, $\dot{B} = 2\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor - \frac{a_1 c}{r}\left(\frac{w}{r} + \lfloor x_1 \rfloor\right)\right)$,

$\dot{C} = a_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r}\right)^2 + a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2$.

Стоит заметить, что параметр $\dot{A}$ при любых a_1, a_2, c и r больше нуля, т.е. ветви параболы направлены вверх. Тогда, если выполняется отношение $-\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} \le 0$, то тривиальным решением, при котором будет достигаться минимум функции (20), является $\gamma_2^* = 0$ и $\gamma_1^* = w / r$. Если же $-\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} \ge 1$, то можно построить функцию $C(\gamma_1)$, аналогичную уравнению (20), для которой получится решение $\gamma_1^* = 0$ и, соответственно, $\gamma_2^* = w / c$. Если $0 < -\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} < 1$, то $\gamma_2^* = -\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} =$ $= -\frac{r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) - a_1 wc}{a_2 r^2 + a_1 c^2}$, а в соответствии с формулой (8) $\gamma_1^* = \frac{w}{r} + \frac{cr\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) - a_1 wc^2}{r\left(a_2 r^2 + a_1 c^2\right)}$.

Таким образом, решением задачи (2) на некоторой области $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor ; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor ; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$, где элементы матрицы свертки заполнены так, что выполняется условие $d = 0$, будет пара координат:

$$x_1^* = \begin{cases} \lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r}, \text{ если } r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) \le a_1 wc; \\ \lfloor x_1 \rfloor, \text{ если } a_1 wc - r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) \ge a_2 r^2 + a_1 c^2; \\ \lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r} + \frac{cr\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) - a_1 wc^2}{r\left(a_2 r^2 + a_1 c^2\right)} \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \tag{21}$$

$$x_2^* = \begin{cases} \lfloor x_2 \rfloor, \text{ если } r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) \le a_1 wc; \\ \lfloor x_2 \rfloor + \dfrac{w}{c}, \text{ если } a_1 wc - r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) \ge a_2 r^2 + a_1 c^2; \\ \lfloor x_2 \rfloor - \dfrac{r\left(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c\right) - a_1 wc}{a_2 r^2 + a_1 c^2} \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{22}$$

Рассмотрим отдельно условия существования решений (21) и (22).

В первом и третьем уравнениях выражения (21) встречаются слагаемые, где в знаменателе используется *r*. Решение задачи управления (2) при *r* и *d*, одновременно равных нулю, показано выше.

Во втором уравнении выражения (22) у второго слагаемого в знаменателе используется *c*. Одновременно *c* и *d* равны нулю при стандартной функции *F*2 (см. таблицу), где все зависит от критерия x_1. Тогда решением задачи (2) является $x_1^* = \lfloor x_1 \rfloor + w$, $x_2^* = \lfloor x_2 \rfloor$. Соответственно, при $c = 0$ и $d = 0$ затратная функция агрегированного показателя имеет вид

$$C\left(v\left(x_1, x_2\right)\right) = a_1 \lfloor x_1 + v - j_3 \rfloor^2 + a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor\right)^2. \tag{23}$$

Выражение (23) можно свести к виду уравнения (19), где коэффициенты полинома второй степени будут следующими: $\dot{a} = a_1$, $\dot{b} = 2a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor - j_3\right)$ и $\dot{c} = a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor - j_3\right)^2 + a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2$.

В выражениях (21) и (22) в третьих уравнениях в третьем и втором слагаемых соответственно в знаменателе встречается сумма $r^2 + c^2$. Одновременно *r*, *c* и *d* равны нулю тогда и только тогда, когда четыре смежных элемента матрицы свертки образуют стандартную функцию *F*0, при которой на некоторой области $x_1 \in \left[\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1\right)$, $x_2 \in \left[\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1\right)$ справедливо $v = j_3$ (см. таблицу). В этом случае область «плато» требуется обойти и очевидно, что делать это целесообразно по самой «дешевой» траектории. Если $a_1 > a_2$, то $x_1^* = \lfloor x_1 \rfloor$, а $x_2^* = j_3 + w$. В противном случае $x_1^* = j_3 + w$ и $x_2^* = \lfloor x_2 \rfloor$.

Таким образом, если четыре смежных элемента матрицы заполнены так, что выполняется условие $d=0$, но эти элементы не образуют стандартную функцию *F*0, *F*2 или *F*3, то решением задачи (2) являются выражения (21) и (22).

Если параметр w считать переменной, то координаты $x_1^*(w)$ и $x_2^*(w)$ будут определять оптимальную траекторию развития сложного объекта, обеспечивающую комплексную оценку v на некоторой области $x_1 \in [\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1)$, $x_2 \in [\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1)$, где элементы матрицы свертки заполнены так, что выполняется условие $d=0$.

Если $d=0$ и выполняется условие $r(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c) \le a_1 wc$, то затратная функция в соответствии с выражением (14) имеет вид

$$C(v(x_1, x_2)) = a_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{v - j_3}{r} \right)^2 + a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2 . \tag{24}$$

Затратную функцию (24) можно свести к уравнению (19), где коэффициенты полинома второй степени получатся следующими: $\dot{a} = a_1 r^{-2}$, $\dot{b} = 2a_1 (\lfloor x_1 \rfloor r - j_3) r^{-2}$ и $\dot{c} = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2 + a_1 j_3 r^{-2}$.

Если $d=0$ и выполняется условие $a_1 wc - r(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c) \ge$ $\ge a_2 r^2 + a_1 c^2$, то затратная функция имеет вид

$$C(v(x_1, x_2)) = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + a_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + \frac{v - j_3}{c} \right)^2 . \tag{25}$$

В этом случае уравнение вида (19) будет иметь следующие коэффициенты: $\dot{a} = a_2 c^{-2}$, $\dot{b} = 2a_2 (\lfloor x_2 \rfloor c - j_3) c^{-2}$ и $\dot{c} = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 +$ $+ a_2 \lfloor x_2 \rfloor^2 + a_2 j_3 c^{-2}$.

В противном случае при $d=0$ затратная функция имеет вид

$$\begin{aligned} C(v(x_1, x_2)) = a_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r} + \frac{cr(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c) - a_1 (v - j_3) c^2}{r(a_2 r^2 + a_1 c^2)} \right)^2 + \\ + a_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor - \frac{r(a_2 \lfloor x_2 \rfloor r - a_1 \lfloor x_1 \rfloor c) - a_1 (v - j_3) c}{a_2 r^2 + a_1 c^2} \right)^2 . \end{aligned} \tag{26}$$

В этом случае не будем приводить коэффициенты $\dot{a}$, $\dot{b}$ и $\dot{c}$, но видно, что их получить можно и выражение (26) может быть сведено к алгебраическому уравнению второго порядка, так как переменная v представлена в числителе в слагаемых, возведенных в квадрат. После возведения в квадрат и раскрытия скобок порядок уравнения (26) не повысится.

Из уравнений (19), (23)–(26) видно, что затратные функции агрегированного показателя, которые на матрицах верхнего уровня должны использоваться как слагаемые целевой функции, описываются квадратичными уравнениями с ненулевым коэффициентом $\dot{b} \neq 0$ при переменной v и дополнительной постоянной $\dot{c} \neq 0$. Это противоречит виду целевой функции (14), а соответственно, найденные решения (19), (23)–(26) не могут применяться для последовательного решения задач (2). Таким образом, уравнения (19), (23)–(26) можно использовать для управления объектами, описываемыми только двумя критериями.

Для устранения этого недостатка необходимо рассмотреть задачу управления в новой постановке.

5. Управление при квадратичных затратных функциях

Рассмотрим постановку задачи при использовании вместо затратной функции вида (12) затратной функции вида

$$C_i\left(x_i\right) = \dot{a}_i x_i^2 + \dot{b}_i x_i + \dot{c}_i, i = \overline{1,n}. \tag{27}$$

В таком случае вместо целевой функции (14) получим

$$\begin{aligned} C\left(\gamma_1, \gamma_2\right) = \dot{a}_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \gamma_1\right)^2 + \dot{b}_1 \left(\lfloor x_1 \rfloor + \gamma_1\right) + \dot{c}_1 + \\ + \dot{a}_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + \gamma_2\right)^2 + \dot{b}_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + \gamma_2\right) + \dot{c}_2. \end{aligned} \tag{28}$$

При такой целевой функции в случае $d = 0$ и $r = 0$ оптимальная затратная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} C\left(v\right) = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + b_1 \lfloor x_1 \rfloor + c_1 + a_2 \left(\lfloor x_2 \rfloor + v - j_3\right)^2 + \\ + b_2 \lfloor x_2 \rfloor + b_2 v - b_2 j_3 + c_2. \end{aligned} \tag{29}$$

Преобразовав выражение (29), получим выражение вида (27), где $\dot{a} = a_2$, $\dot{b} = b_2 + 2a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor - j_3\right)$, $\dot{c} = a_1 \lfloor x_1 \rfloor^2 + b_1 \lfloor x_1 \rfloor + c_1 + a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor - j_3\right)^2 - b_2 j_3 + c_2$.

В случае $d = 0$ и $c = 0$

$$C(v) = a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + v - j_3\right)^2 + b_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + v - j_3\right) + c_1 + \\ + a_2\lfloor x_2 \rfloor^2 + b_2\lfloor x_2 \rfloor + c_2. \tag{30}$$

Преобразовав выражение (30), получим выражение вида (27), где $\dot{a} = a_1$, $\dot{b} = b_1 + 2a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor - j_3\right)$, $\dot{c} = a_2\lfloor x_2 \rfloor^2 + b_2\lfloor x_2 \rfloor + c_2 + a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor - j_3\right)^2 - - b_1 j_3 + c_1$.

При использовании затратных функций (27) в случае $d = 0$ общая затратная функция (20) с учетом уравнения (8) будет иметь следующие коэффициенты:

$$\dot{A} = a_2 + a_1c^2 / r^2, \dot{B} = 2\left(a_2\lfloor x_2 \rfloor - \frac{a_1c}{r}\left(\frac{w}{r} + \lfloor x_1 \rfloor\right)\right) + \frac{b_1c}{r} + b_2,$$

$$\dot{C} = a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r}\right)^2 + b_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{w}{r}\right) + c_1 + a_2\lfloor x_2 \rfloor^2 + b_2\lfloor x_2 \rfloor + c_2.$$

Коэффициент $\dot{A}$ не изменился и положителен при любых a_1, a_2, *c* и *r*, а значит, парабола направлена вверх и справедливы рассуждения, приведенные в п. 4.

В случае $d = 0$ и $-\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} \le 0$ затратная функция имеет вид

$$C(v) = a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{v - j_3}{r}\right)^2 + b_1\left(\lfloor x_1 \rfloor + \frac{v - j_3}{r}\right) + c_1 + a_2\lfloor x_2 \rfloor^2 + b_1\lfloor x_1 \rfloor + c_1. \tag{31}$$

В случае $d = 0$ и $-\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} \ge 1$ затратная функция имеет вид

$$C(v) = a_1\lfloor x_1 \rfloor^2 + b_1\lfloor x_1 \rfloor + c_1 + a_2\left(\lfloor x_2 \rfloor + \frac{v - j_3}{c}\right)^2 + b_2\left(\lfloor x_2 \rfloor + \frac{v - j_3}{c}\right) + c_2. \tag{32}$$

В случае $d = 0$ и $0 < -\frac{\dot{B}}{2\dot{A}} < 1$ затратная функция имеет вид

$$C(v) = a_1\left(\lfloor x_1 \rfloor - \frac{2r\left(a_2\lfloor x_2 \rfloor r - a_1\lfloor x_1 \rfloor c\right) - 2a_1(v - j_3)c + b_1cr + b_2r^2}{2\left(r^2a_2 + a_1c^2\right)}\right)^2 +$$

$$+b_1\left(\lfloor x_1\rfloor-\frac{2r\left(a_2\lfloor x_2\rfloor r-a_1\lfloor x_1\rfloor c\right)-2a_1\left(v-j_3\right)c+b_1cr+b_2r^2}{2\left(r^2a_2+a_1c^2\right)}\right)+c_1+$$

$$+a_2\left(\lfloor x_2\rfloor+\frac{\left(v-j_3\right)}{r}+\frac{2rc\left(a_2\lfloor x_2\rfloor r-a_1\lfloor x_1\rfloor c\right)+c^2\left(b_1r-2a_1\left(v-j_3\right)\right)+b_2cr^2}{2r\left(r^2a_2+a_1c^2\right)}\right)^2+$$

$$+b_1\left(\lfloor x_2\rfloor+\frac{\left(v-j_3\right)}{r}+\frac{2rc\left(a_2\lfloor x_2\rfloor r-a_1\lfloor x_1\rfloor c\right)+c^2\left(b_1r-2a_1\left(v-j_3\right)\right)+b_2cr^2}{2r\left(r^2a_2+a_1c^2\right)}\right)+c_1 \quad (33)$$

Как видно из выражений (29)–(33), вид алгебраического уравнения, описывающего затратную функцию агрегированного показателя, сохраняется и соответствует виду (27). Таким образом, при использовании затратных функций вида (27) задача управления (1) имеет решение в общем виде для любого числа критериев и решается как последовательность задач (2).

При использовании затратных функций (27) в полиноме (17) изменятся коэффициенты B и D. В этом случае коэффициенты будут следующие: $A=2a_2$; $B=2a_2\left(\lfloor x_2\rfloor d-r\right)+b_2d$; $C=0$; $D=d^2\left(wd+rc\right)\times$ $\times\left(2a_1\left(\lfloor x_1\rfloor+1\right)+b_1\right)$; $E=2a_1d^2\left(wd+rc\right)^2$. В силу того, что при использовании затратных функций (27) вид затратной функции сохраняется, решение полинома целесообразно искать при этих коэффициентах.

6. Решение полинома (17) методом Феррари

Согласно методу Феррари, корни алгебраического уравнения четвертого порядка (17) определяются согласно выражению

$$y_{1,2,3,4}=-B/4A+\left(\pm_s\left(\alpha+2z\right)^{\frac{1}{2}}\pm_p\left(-3\alpha+2z\pm_s 2\beta\left(\alpha+2z\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)/2, \quad (34)$$

в котором используются специально введенные параметры α, β и z.

Так, α и β с учетом полученных выше коэффициентов A, B, D и E определяются следующим образом:

$$\alpha=-\frac{3}{32}a_2^{-2}\left(2a_2\lfloor x_2\rfloor d-r+b_2d\right)^2;$$

$$\beta = \frac{1}{64} a_2^{-3} \left(\left(2a_2 \lfloor x_2 \rfloor d - r + b_2 d \right)^3 + 32 a_2^{\,2} d^2 \left(wd + rc \right) \left(\left(2a_1 \lfloor x_1 \rfloor + 1 \right) + b_1 \right) \right);$$

для нахождения z определяются дополнительные параметры δ, P, Q и U:

$$\delta = 2^{-12} a_2^{-3} \left(3 \left(2a_2 \lfloor x_2 \rfloor d - r + b_2 d \right)^4 \right) -$$

$$-2^{-4} a_2^{-1} \left(2a_2 \lfloor x_2 \rfloor d - r + b_2 d \right) d^2 \left(wd + rc \right) \left(\left(2a_1 \lfloor x_1 \rfloor + 1 \right) + b_1 \right) +$$

$$+2^{-4} a_2^{-1} a_1 d^2 \left(wd + rc \right)^2;$$

$$P = \frac{-\alpha^2}{12} - \delta;$$

$$Q = \frac{-\alpha^3}{108} - \frac{\alpha\delta}{3} - \frac{\beta^2}{8};$$

$$U = \left(\frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}};$$

$$z = \begin{cases} \dfrac{-5\alpha}{6} + U + \sqrt[3]{Q}, \text{ если } U = 0; \\ \dfrac{-5\alpha}{6} + U - \dfrac{P}{3U}, \text{ если } U \neq 0. \end{cases}$$

Для нахождения всех корней в выражении (34) используется один и тот же знак $\pm_s$ при нахождении конкретного y, при этом $\pm_p$ будет другим или тем же. Все корни y можно найти при всех четырех комбинациях знаков $\pm_s$ и $\pm_p$: «+,+»; «+,–»; «–,+» и «–,–».

Из выражения (34) видно, что после подстановки всех промежуточных выражений аналитическая запись корней $y_{1,2,3,4}$ от постоянных a_1, b_1, a_2, b_2, r, c, d, $\lfloor x_1 \rfloor$ и $\lfloor x_2 \rfloor$ и переменной w будет выглядеть весьма громоздко. Корни, в свою очередь, необходимо подставить в $\gamma_2 = \dfrac{y-r}{d}$ и согласно формуле (8) найти γ_1, проверить на принадлежность области допустимых значений. Только после этого удастся выразить затратную функцию, подставив найденные γ_1 и γ_2 в формулу (27). В связи с большим числом используемых параметров в выражении (34) приводить затратную функцию в общем виде не будем.

Напомним, что в случае отсутствия корней (34) на области допустимых значений $\gamma_i^* \in [0;1)$ решением будут граничные значения x_1 и x_2 на отрезках $x_1 \in [\lfloor x_1 \rfloor; \lfloor x_1 \rfloor + 1)$, $x_2 \in [\lfloor x_2 \rfloor; \lfloor x_2 \rfloor + 1)$. В этом случае справедливы решение (29) при $2a_1x_1 + b_1 > 2a_2\lfloor x_2 \rfloor + b_2$ и решение (30) при $2a_1\lfloor x_1 \rfloor + b_1 < 2a_2x_2 + b_2$.

Заключение

В настоящей работе показано, что задача поиска значений двух частных критериев, описывающих состояние объекта управления, при которых комплексный показатель, вычисляемый с помощью аддитивно-мультипликативного подхода к комплексному оцениванию, равен заданному значению и при этом затраты на их обеспечение минимальны, имеет решение в общем виде для произвольной неубывающей матрицы свертки двух критериев.

Найденные частные решения (19), (23)–(26) задачи управления при использовании затратных функций, являющихся обратным случаем производственной функции Кобба – Дугласа (12), а также решение в общем виде (18)–(21), получены только для степенного показателя затратных функций $b_i = 2$. Найти аналитическое решение для произвольного $b_i > 1$ не удалось. С одной стороны, это определяет перспективное направление исследований, с другой стороны, в настоящей работе показано, что затратная функция агрегированного показателя при $b_i = 2$ имеет дополнительные слагаемые и описывается уже квадратичным уравнением вида (27). На основании чего был сделан вывод, что затратные функции, являющиеся обратным случаем производственной функции Кобба – Дугласа (12), могут применяться к объектам управления, имеющим только два критерия.

Рассмотрена аналогичная постановка задачи управления для произвольной неубывающей матрицы свертки двух критериев при использовании аддитивно-мультипликативного подхода к комплексному оцениванию и при использовании затратных функций, описываемых алгебраическим уравнением второго порядка (27). В результате исследования показано, что вид затратной функции для агрегированного показателя сохраняется. Таким образом, при использовании затратных функций вида (27) задача управления (1) имеет решение в общем виде для любого числа критериев и решается как последовательность задач (2). Решение задач (3) и (4) опирается на решение (1). Демонстрации этих решений будут посвящены следующие работы автора.

Список литературы

1. Novikov D. Theory of control in organizations. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 341 p.

2. Mechanisms of organizational behavior control: a survey / V.N. Burkov, M.V. Goubko, N.A. Korgin, D.A. Novikov // Advances in Systems Science and Application. – 2013. – Vol. 13, no. 1. – P. 1–20.

3. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та, 2005. – 581 с.

4. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: СИНТЕГ – ГЕО, 1997. – 188 с.

5. Бурков В.Н., Буркова И.В., Попок М.В. Метод дихотомического программирования // Управление большими системами. – 2004. – Вып. 9. – С. 57–75.

6. Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами / под ред. акад. С.Н. Васильева – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2008. – 244 с.

7. Анохин А.М., Гусев В.Б., Павельев В.В. Комплексное оценивание и оптимизация на моделях многомерных объектов / ИПУ РАН. – М., 2003. – 79 с.

8. Гусев В.Б., Павельев В.В. Использование непрерывных шкал при оценивании и принятии решений в сложных проблемных ситуациях / ИПУ РАН. – М., 2013. – 118 с.

9. Алексеев А.О. Классификация механизмов комплексного оценивания сложных объектов // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2018. – № 2(10). – С. 106–120.

10. Алексеев А.О. Комплексное оценивание сложных объектов в условиях неопределенности // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 2. – С. 103–131.

11. Алексеев А.О., Алексеева И.Е. Постановка задачи управления многопараметрическими объектами, состояние которых описывается методом нечеткого комплексного оценивания // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 3. – С. 43–54.

12. Алексеев А.О. Матричные механизмы комплексного оценивания, элементы матриц свертки которых определены в нечетком виде // Управление большими системами (УБС-2017): материалы XIV Всерос. шк.-конф. молодых ученых, г. Пермь, 4–8 сент. 2017 г. / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова РАН, Перм. нац. исслед. политехн. ун-т. – М.: [б. и.], 2017. – С. 219–233.

13. Алексеев А.О., Коргин Н.А. О применении обобщенных медианных схем для матричной активной экспертизы // Прикладная математика, механика и процессы управления: материалы всерос. науч.-техн. интернет-конф. студентов и молодых ученых, г. Пермь, 30 нояб.–5 дек. 2015 г. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2016. – С. 170–177.

14. Алексеев А.О., Коргин Н.А. Матричный анонимный обобщенный медианный механизм с правом делегирования сообщений // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – № 4. – С. 137–156.

15. Алексеев А.О., Алексеева И.Е. Процедуры нечеткого комплексного оценивания // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014): сб. тр., г. Москва, 16–19 июня 2014 г. / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова РАН, ИПУ РАН. – М., 2014. – С. 7983–7993.

16. Губко М.В. Модели и методы оптимизации структуры иерархических систем обработки информации: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 05.13.01 / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова, ИПУ РАН. – М., 2014. – 372 с.

17. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of production // The American Economic Review. – 1928. – Vol. 18, no. 1. – P. 139–165.

18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 2003. – 832 с.

19. Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. 30 лекций по классической математике: пер. с англ. / под ред. С.М. Львовского; МЦНМО. – М., 2011. – 512 с.

References

1. Novikov D. Theory of Control in Organizations. New York, Nova Science Publishers, 2013, 341 p.

2. Burkov V.N., Goubko M.V., Korgin N.A., Novikov D.A. Mechanisms of Organizational Behavior Control: A Survey. *Advances in Systems Science and Application*. 2013, vol. 13, no. 1, pp. 1–20.

3. Novikov D.A. Teoriia upravleniia organizatsionnymi sistemami [Organizational Behavior Control Theory]. Moscow, Moscow psychology social institute. 2005, 581 p.

4. Burkov V.N., Novikov D.A. Kak upravliat' proektami [How to manage the projects]. Moscow, SINTEG. 1997, 188 p.

5. Burkov V.N., Burkova I.V. Popok M.V. Metod dikhotomicheskogo programmirovaniia [Dichotomous programming method]. *Large-Scale Systems Control*, 2004, iss. 9, pp. 57–75.

6. Burkov V.N., Novikov D.A., Shchepkin A.V. Mekhanizmy upravleniia ekologo-ekonomicheskimi sistemami [Ecology-economics systems control mechanisms]. Moscow, FIZMATLIT, 2008, 244 p.

7. Anohin A.M. Gusev V.B. Pavelyev V.V. Kompleksnoe otsenivanie i optimizatsiia na modeliakh mnogomernykh ob"ektov [Complex evaluation and optimization on models of multidimensional objects]. Moscow, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, 2003, 79 p.

8. Gusev V.B., Pavel'ev V.V. Ispol'zovanie nepreryvnykh shkal pri otsenivanii i priniatii reshenii v slozhnykh problemnykh situatsiiakh [The use of continuous scales in assessing and making decisions in complex problem situations]. Moscow, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, 2013, 118 p.

9. Alekseev A.O. Klassifikatsiia mekhanizmov kompleksnogo otsenivaniia slozhnykh ob"ektov [Classification of integrated assessment mechanisms for complex objects]. *Information and mathematical technologies in science and management*. 2018, no. 2(10), pp 106-120.

10. Alekseev A.O. Kompleksnoe otsenivanie slozhnykh ob"ektov v usloviiakh neopredelennosti [Rating and control of complex objects in uncertainty cases]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2019, no. 2, pp. 103-131.

11. Alekseev A.O., Alekseeva I.E. Postanovka zadachi upravleniia mnogoparametricheskimi ob"ektami, sostoianie kotorykh opisyvaetsia metodom nechetkogo kompleksnogo otsenivaniia [Formulation of the problem of multiparameter objects management whose state is described by fuzzy comprehensive evaluation]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2015, no. 3, pp. 43-54.

12. Alekseev A.O. Matrichnye mekhanizmy kompleksnogo otsenivaniia, elementy matrits svertki kotorykh opredeleny v nechetkom vide [Integrated assessment matrix mechanisms, whose elements of convolution matrices are defined as fuzzy]. *Upravlenie bol'shimi sistemami. UBS-2017 : materialy XIV Vserossiiskoi shkoly-konferentsii molodykh uchenykh*, 4-8 September 2017, Perm, Moscow, 2017, pp. 219-233.

13. Alekseev A.O., Korgin N.A. O primenenii obobshchennykh mediannykh skhem dlia matrichnoi aktivnoi ekspertizy [About the generalized median schemes application for the matrix active examination]. *Prikladnaia matematika, mekhanika i protsessy upravleniia: materialy Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi internet-konferentsii studentov i molodykh uchenykh,* 30 November – 5 December 2015. *Perm, Izdatel'stvo Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta*. 2016, pp. 170-177.

14. Alekseev A.O., Korgin N.A. Matrichnyi anonimnyi obobshchennyi mediannyi mekhanizm s pravom delegirovaniia soobshchenii [The matrix anonymous generalized median schemes with delegation]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2016, no 4, pp. 137-156.

15. Alekseev A.O., Alekseeva I.E. Protsedury nechetkogo kompleksnogo otsenivaniia [Fuzzy integrated assessment procedures]. *12th Control Sciences All-Russian Meeting*, Moscow, June, 16-19, 2014. Moscow, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2014. pp. 7884 – 7893.

16. Goubko M.V. Modeli i metody optimizatsii struktury ierarkhicheskikh sistem obrabotki informatsii [Models and methods for optimizing the structure of hierarchical information processing systems] Doctror's Degree Thesis, Moscow, 2014, 372 p.

17. Cobb C.W, Douglas P.H. A Theory of Production. *The American Economic Review*, 1928, vol. 18, no.1, pp. 139-165.

18. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Math reference book for scientists and engineers]. Moscow, Nauka, 2003, 832 p.

19. Tabachnikov S.L., Fuchs D.B. Mathematical omnibus: Thirty lectures on Classic Mathematics. AMS, 2007; 463 pp.

Получено 26.10.2019

Принято 24.12.2019

Сведения об авторе

Алексеев Александр Олегович (Пермь, Россия) – кандидат экономических наук, доцент кафедры «Строительный инжиниринг и материаловедение», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).

About the author

Alexander O. Alekseev (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Economics, Associate Professor, Department of Construction Engineering and Materials Science, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100-2018:

Алексеев, А. О. Управление сложными объектами, состояния которых описываются с помощью матричных механизмов комплексного оценивания / А. О. Алексеев. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.1.08. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 1. – С. 114–139.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Алексеев А.О. Управление сложными объектами, состояния которых описываются с помощью матричных механизмов комплексного оценивания // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 1. – С. 114–139. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.08

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Alekseev A.O. Control of complex objects, states of which are describing by the matrix rating mechanisms. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 1, pp. 114–139. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.08 *(in Russian)*