

DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.10

УДК 330.46; 53

Д.Л. Андрианов, П.М. Симонов

Пермский государственный национальный
исследовательский университет, Пермь, Россия

ОБЗОР МЕТОДОВ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ПРИНЦИПАХ ЭКОНОФИЗИКИ. ЧАСТЬ 1

Дается обзор теоретических и прикладных результатов, полученных в рамках научного направления по эконофизике на кафедре информационных систем и математических методов в экономике.

В первой части дается понятие финансового пузыря и методы его поиска. В начале статьи описывается развитие эконофизики. Ввиду этого эконофизика, используя как образец исследования физиков, должна начинать свои исследования не с верхних этажей экономического здания (в виде финансовых рынков, распределения доходности финансовых активов и т.п.), а с ее фундаментальных оснований или, говоря словами физиков, с элементарных экономических объектов и форм их движения (труда, его производительности и т.д). Только таким образом эконофизика может обрести свой предмет исследования и стать «новой формой экономической теории». Далее рассмотрены основные предпосылки моделей финансовых пузырей на рынке: принцип отсутствия арбитражных возможностей, существование рациональных агентов, модели, управляемой риском, и модели, управляемой ценой. Была предложена известная нелинейная LPPL-модель (Log Periodic power Law Model). В работах В.О. Арбузова было предложено использовать процедуры выбора моделей, а именно были введены: основная селекция, фильтрация «стационарности», спектральный анализ. Результаты модели были представлены в работах Д. Сорнетт и его учеников.

Во второй части дается понятие перколяции и ее возможности применения в экономике. Будет рассмотрена математическая модель, предложенная J.P. Bouchaud, D. Stauffer и D. Sornette, воссоздающая поведение агента на рынке, и ее взаимодействие, геометрически описывающее фазовый переход второго рода. В данной модели цена актива за один временной интервал изменяется пропорционально разнице между спросом и предложением на этом рынке. Ключевой ситуацией для изучения является момент образования бесконечного кластера на перколяционной решетке, так как это означает крах рынка, когда подавляющая для данного рынка часть агентов имеет схожее мнение насчет своих действий по покупке или продаже актива. Основными характеристиками процесса являются пороговая вероятность наступления краха рынка, а также эмпирическая функция распределения изменения цены на данном рынке.

Ключевые слова: эконофизика, финансовые рынки, финансовые пузыри, логопериодические структуры, фильтрация, спектральный анализ, процесс Орнштейна – Уленбека, закон одной цены, ограниченная рациональность, гипотеза эффективного рынка.

D.L. Andrianov, P.M. Simonov

Perm State University, Perm, Russian Federation

A REVIEW OF THE METHODS OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING BASED ON THE PRINCIPLES OF ECONOPHYSICS. PART 1

A review of theoretical and applied results obtained in the framework of the scientific direction in econophysics at the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics is given. The first part gives the concept of a financial bubble and methods for their search. The review covers the period 2010-2019.

A review of theoretical and applied results obtained in the framework of the scientific direction in econophysics at the Department of information systems and mathematical methods in Economics is given.

The first part gives the concept of a financial bubble and methods for finding them. At the beginning of the article, the development of econophysics is given. Therefore, using the research of physicists as a model, econophysics should begin its research not from the upper floors of an economic building (in the form of financial markets, distribution of returns on financial assets, etc.), but from its fundamental foundations or, in the words of physicists, from elementary economic objects and forms of their movement (labor, its productivity, etc.). Only in this way can econophysics find its subject of study and become a "new form of economic theory".

Further, the main prerequisites of financial bubble models in the market are considered: the principle of the absence of arbitrage opportunities, the existence of rational agents, a risk-driven model, and a price-driven model. A well-known nonlinear LPPL model (log periodic power law model) was proposed. In the works of V. O. Arbutov, it was proposed to use procedures for selecting models. Namely, basic selection, "stationarity" filtering, and spectral analysis were introduced. The results of the model were presented in the works of D. Sornette and his students.

The second part gives the concept of percolation and its application in Economics. We will consider a mathematical model proposed by J. P. Bouchaud, D. Stauffer, and D. Sornette that recreates the behavior of an agent in the market and their interaction, geometrically describing a phase transition of the second kind. In this model, the price of an asset in a single time interval changes in proportion to the difference between supply and demand in this market. The key situation to study is the moment of formation of an infinite cluster on the percolation grid, since this means the collapse of the market, when the overwhelming part of agents for this market has a similar opinion about their actions to buy or sell an asset. The main characteristics of the process are the threshold probability of market collapse, as well as the empirical distribution function of price changes in this market.

Keywords: econophysics, financial markets, financial bubbles, log-periodic structures, filtration, spectral analysis, Ornstein – Uhlenbeck process, the law of one price, limited rationality, efficient market hypothesis.

1. Экономифизика

Временем зарождения экономифизики как особого направления в экономической науке можно считать рубеж XX–XXI вв. [1]. К этому времени в экономике, и в первую очередь в финансах, сформировались задачи, которые не могли быть решены в рамках этих наук. Для решения таких задач предполагалось использовать аппарат и методологию теоретической физики [2].

Итак, экономофизика как самостоятельное направление изучения экономических процессов на основе использования фундаментальных законов природы и физических теорий стала оформляться с середины 1990-х гг. на стыке экономики и физики [1], а само слово «экономофизика» вошло в общее употребление лишь после того, как в 1997 г. Имре Кондор и Янош Кертис организовали в Венгрии на базе инфраструктуры Eötvös University Budapest симпозиум по экономофизике (Workshop on Econophysics) [3].

Проведенный Eötvös University Budapest форум стал мощным импульсом развития нового междисциплинарного направления научных исследований как за рубежом, так и в России [3]. Становление экономофизики во многом связано с приходом в экономику крупных физиков, таких как Филипп Андерсон (Нобелевская премия по физике 1977 г.), Пер Бак, Гарри Юджин Стенли, и целым рядом других ученых [2]. Также известны российские ученые, в частности Д.С. Чернавский, Н.И. Старков, М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский, А.В. Щербаков, М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко и другие, которые в своих исследованиях и практической деятельности попытались применить экономофизический подход к экономике [3, 4].

Пионерной работой в области экономофизики считается книга Росарио Н. Мантенья и Г. Стенли [5]. В предисловии к этой работе авторы отметили, что «Эта книга задумана как введение в междисциплинарную область экономофизики. Данный неологизм призван обрисовать область деятельности физиков, которые работают над экономическими проблемами, проверяя концептуальные подходы, заимствованные из физических наук».

В настоящее время существует огромное количество определений к понятию «экономофизика»:

1) к экономофизике можно отнести исследования, в рамках которых методология физики применяется при изучении экономических явлений [2];

2) экономофизика – это обработка высокочастотных финансовых данных высокопрофессиональными физиками-теоретиками [5];

3) под экономофизикой также понимается некоторое расширение методов статистической физики на экономические процессы, допускающие количественный анализ [6, 7].

В настоящей работе под эконофизикой авторы понимают применение теории сложных систем в физике к задачам экономики, финансам и бизнесу [8].

Проблемы, которые решает эконофизика, – это проблемы количественного моделирования и прогнозирования экономических процессов (явлений), для анализа которых стало недостаточно только экономических теорий и методов.

К таким проблемам относятся [1]:

- 1) новые методы анализа финансовых рынков на основе временных рядов;
- 2) изучение динамики доходности финансовых активов;
- 3) анализ неравномерности распределения доходов и богатства;
- 4) распределение доходов фирм и статистические свойства скорости их роста;
- 5) изучение взаимодействия экономических агентов по аналогии с взаимодействием элементарных частиц;
- 6) статистические свойства экономической активности сложных организаций, таких как университеты или целые страны;
- 7) изучение колебаний экономической активности и темпов экономического роста;
- 8) прогнозирование экономических кризисов;
- 9) моделирование экономического развития, функционирования банковской системы и эволюции быстрорастущих компаний;
- 10) зависимость динамики выручки компаний от их размеров.

Следует отметить, что у физиков уже возникли некоторые опасения относительно того, как развивается эконофизика. Так, например, С. Кип и П. Ормерод в статье [9] уловили самое главное, что должно отличать физические исследования эмпирических экономических данных от эконофизических исследований, – это необходимость построения причинных экономических моделей. Но, чтобы строить причинные экономические модели, необходим такой эмпирический анализ экономических явлений и процессов, который изначально должен опираться на фундаментальные экономические теории. Ввиду этого эконофизика, используя исследования физиков как образец, должна начинать свои исследования не с верхних этажей экономического здания (в виде финансовых рынков, распределения доходности финансовых активов и т.п.), а с ее фундаментальных оснований или, говоря словами физи-

ков, с элементарных экономических объектов и форм их движения (труда, его производительности и т.д). Только таким образом экономическая теория может обрести свой предмет исследования и стать «новой формой экономической теории» [1].

Этот текст взят из монографии [10].

2. LPPL-модели

Финансовые пузыри на рынках. Периодическое появление пузырей на финансовых рынках породило интерес к моделированию таких явлений. Существует уже довольно большая история пузырей: начиная с тюльпаномании XVII в. и заканчивая крахом основных мировых индексов в 2008 г. В этом подразделе мы рассмотрим предпосылки и методику моделирования финансовых пузырей. Начнем с того, что любая модель строится на определенных принципах и предпосылках. Рассмотрим основные предпосылки модели (см. диссертацию [11]).

Принцип отсутствия арбитражных возможностей. Одним из главных организующих принципов является условие отсутствия арбитражных возможностей, также известное как закон одной цены. Данный принцип гласит, что два актива, одинаковые по своим характеристикам, должны продаваться по одной цене, и то же касается актива, продаваемого на двух различных рынках. Если цены отличны, возникает возможность получить прибыль от продажи данного актива там, где он продается дороже, и покупки там, где он продается дешевле. Основная идея состоит в том, что при наличии арбитражной возможности цены не могут оставаться разными в течение долгого времени или же разница между ними должна быть незаметна. В противном случае участники стали бы оказывать на них влияние и свели бы эту разницу на нет при помощи арбитража. Идея вводить условие отсутствия арбитража на самом деле является предпосылкой большинства моделей, разработанных в академическом финансовом сообществе.

Существование рациональных агентов. Это один из важнейших принципов, который утверждает, что инвесторы и экономические агенты рациональны. В противоположность часто цитируемому в прессе и определенных кругах представлению о фондовом рынке как о рынке, подверженном иррациональным стадным чувствам, значительная часть трейдеров большую часть времени ведет себя рационально, т.е. пытается оптимизировать свою стратегию исходя из имеющейся информа-

ции. Это можно назвать «ограниченной рациональностью», поскольку имеющаяся в наличии информация бывает неполной и, помимо этого, трейдеры финансового рынка также обладают ограниченными возможностями правильно оценивать даже имеющуюся информацию. Кроме того, инвесторы не уверены в характере и предпочтениях других инвесторов на рынке. Это значит, что процесс принятия решения по сути своей является «шумным» и, как следствие, неизбежен вероятностный подход при моделировании фондового рынка из-за отсутствия определенности.

Необходимо подчеркнуть, что условие отсутствия арбитража в совокупности с рациональными ожиданиями – еще не механизм. Они не объясняют происхождения тех или иных процессов. Допуская действие этих предпосылок, мы приходим к выводу, что часть трейдеров ведет себя таким образом, что цены отражают имеющуюся в наличии информацию, и что риск адекватно и приблизительно справедливо компенсируется.

На данных предпосылках были построены две модели, объясняющие процесс надувания спекулятивных пузырей [12, 13]. Обе эти модели имеют довольно схожую логику, а также выводы, которые следуют из этих моделей, приводящие к одной и той же математической модели.

Вышеописанные предпосылки связывают доходы фондового рынка во время пузырей с риском, связанным с потенциальным крахом. Чтобы продвинуться дальше, нам потребуется признать существование и взаимодействие двух различных групп трейдеров: с одной стороны, «шумовых» трейдеров, а с другой – рациональных [14].

Очень сложно идентифицировать спекулятивный пузырь, поскольку существуют некоторые концептуальные проблемы, затрудняющие экономическую интерпретацию пузырей [15]. Начнем с отсутствия общего определения: пузыри являются моделью, в общем и в частности определяемой в достаточно ограниченных рамках. Следовательно, трудно избежать субъективных предубеждений, особенно принимая во внимание тот факт, что само существование пузырей [16] все еще является предметом жарких дискуссий. Основной проблемой аргументов в пользу утверждения о наличии пузырей является то, что очевидные признаки пузыря могут быть истолкованы в терминах фундаментальных рыночных показателей, которые оста-

лись без внимания исследователя. Исходя из этого мы используем достаточно прямой подход, при котором отбор пузырей происходит по следующим критериям:

- существование резкого пика согласно подходу [17];
- существование предшествующего периода увеличения цен, длившегося по меньшей мере шесть месяцев;
- существование периода резкого падения цен сразу после пика за период, значительно меньший по сравнению с периодом роста.

Пузырь определяется как период, начавшийся с обозначенного минимума и продолжающийся до внушительного максимума, характеризующийся длительным ростом цен с последующим крахом или значительным падением. Для основных финансовых рынков подобные пузыри описаны весьма точно и недвусмысленно, поскольку конец формирования пузыря определяется датой, когда было достигнуто максимальное значение индекса перед его падением. Кроме проблемы существования пузырей, долгое время предметом споров ученых были причины возникновения пузырей. Гипотеза эффективного рынка не позволяла объяснять такое явление, как пузыри. Для объяснения пузырей было создано несколько теорий. Остановимся на основных моделях: модели, управляемой риском, и модели, управляемой ценой. Заметим, что теории отличаются по своей логике лишь причинами, которые руководят инвесторами на рынке. Хотя изменяется такая неважная на первый взгляд деталь, это приводит к двум совершенно разным выводам. Рассмотрим основные положения двух моделей, описывающих процесс надувания пузырей (таблица).

Сравнение теоретических моделей

Параметр сравнения	Модель, управляемая риском	Модель, управляемая ценой
Причины надувания пузырей	За счет механизмов подражательного поведения шумовые трейдеры могут делать рынок все более однонаправленным в определенные временные интервалы. Данный процесс самоусиливающегося подражания ведет к созреванию пузыря	Шумовые инвесторы видят, что рыночная цена растет, они общаются друг с другом и начинают действовать схоже, покупают все больше и больше акций, подталкивая тем самым цены вверх

Окончание таблицы

Параметр сравнения	Модель, управляемая риском	Модель, управляемая ценой
Мотивация инвесторов при развитии пузыря	В начале созревания пузыря появляется риск, что этот пузырь лопнет. Поскольку риск краха резко возрастает, рациональным трейдерам кажется привлекательной идея продолжать держать свои инвестиции при условии, что в этот момент времени ускоряется и рост доходности, обеспечивающий адекватную компенсацию растущих рисков. Модель же была названа так в связи со следующими соображениями. В каждом периоде модель допускает, что два и только два компонента соревнуются в борьбе за возможность определять ежедневное приращение цены: ежедневная рыночная доходность, которая может варьировать изо дня в день, вероятность, что случится крах. Риск в данной модели управляет ценой	Условие отсутствия арбитража совместно с рациональными ожиданиями автоматически подразумевает значительный рост риска, надвигающегося каждый раз, когда цена существенно растет, как это и бывает при созревании спекулятивного пузыря. Таким образом, в данной модели стадность приводит к положительным обратным связям с ценой, которая сама создает растущий риск надвигающегося, но еще не реализованного финансового краха. Исходя из этих рассуждений получается, что «цена управляет риском»
Время и причины краха	Модель различает два события: конец пузыря и крах. Рациональность ожиданий приводит к тому, что дата краха должна обладать определенной степенью случайности. Теоретический момент «взрыва» пузыря не обязательно совпадает по времени с крахом, поскольку крах мог произойти в любое время до этого, несмотря на то, что это маловероятно. «Смерть» пузыря – наиболее вероятное время краха	Важной особенностью данной модели является то, что крах никогда не наступит при условии, что цены остаются в разумных пределах. Таким образом, вероятность краха очень низка при незначительных колебаниях цены от фундаментальной стоимости. Даже если рыночная цена уходит вверх, всегда остается вероятность, что она вернется к исходному положению мягко, без краха
Основные выводы, следующие из модели	Пока вероятность, что случится крах, низка по сравнению с доходностью, краха не случается. Но как только риск краха становится больше предполагаемой доходности, пузырь лопается. Крах не неминуем в данной модели, и есть определенный шанс, что пузырь не взорвется, а мягко сдуется	Группирование (пузыри имеют тенденцию следовать за пузырями в короткие промежутки времени) и долгосрочная память (сроки ожидания между пузырями становятся очень долгими, когда пузырь сдувался достаточно долгое время)

Инструментарий был успешно применен в предыдущие годы на практике Дидье Сорнетт и его коллегами [14, 17–20]. Независимо схожий инструментарий был разработан исследовательской группой BNP Paribas Fortis¹ – на такой же методологии, но со слегка другой процедурой оценки и спектрального анализа. Первоначально уравнение, которое описывало пузыри, выглядело следующим образом:

$$\ln[p(t)] = A + B(t_c - t)^\beta, \quad (1)$$

где $p(t)$ – цена финансового инструмента; t_c – критическое время краха пузыря или изменения режима функционирования.

В данном уравнении значение t_c , полученное в результате, полностью зависит от значений последних данных, использованных в оценке. Причина в том, что информация о t_c в основном в них и содержится или зависит от ускорения в последних точках данных. Все попытки предсказания с помощью уравнения (1) были неудачными. Плавный рост, как хорошо известно, плохо подходит для определения времени t_c в зашумленных временных рядах. В силу указанных выше причин была разработана модель LPPL (Log Periodic Power Law), которая выглядит следующим образом:

$$\ln[p(t)] = A + B(t - t_c)^\beta \{1 + C \cos[\omega \ln(t - t_c) + \phi]\},$$

где ω – частота колебаний пузыря; ϕ – параметр, определяющий фазу колебания пузыря.

Данные логопериодические структуры содержат информацию о t_c в своих колебаниях, которые развиваются значительно раньше t_c . Кроме модели LPPL, существует также нелинейная LPPL, которая используется для очень длительных финансовых пузырей, периоды которых равны десяткам лет. Нелинейная LPPL выглядит следующим образом:

$$\ln[p(t)] = A + B \frac{(t_c - t)^\beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{t_c - t}{\Delta_t}\right)^{2\beta}}} \left\{1 + C \cos\left[\omega \ln(t_c - t) + \frac{\Delta_\omega}{2\beta} \ln\left(1 + \left(\frac{t_c - t}{\Delta_t}\right)^{2\beta}\right)\right]\right\},$$

где Δ_t – дополнительный параметр продолжительности пузыря.

¹ Крупнейший банк Бельгии поглощен в 2008 г. после банкротства бельгийско-нидерландской финансовой группы Fortis, помимо Бельгии имеет отделения в Испании, Люксембурге, Румынии, США.

Основным методом обнаружения пузырей и прогнозирования момента времени t_c , когда пузырь закончится либо крахом, либо сменной режимом, является подгонка временного ряда цен к модели LPPL. Подгонка в данном случае – процедура стохастического оценивания, которая объединена с другими техниками и тестами, которые помогают выявить наилучшее предсказание путем прохождения всех этих тестов.

Начальной точкой для прогнозирования краха является перевод времени в форму, удобную для расчетов. Пусть $t=1$ будет означать 1 год, т.е. $t=0,00274$ равняется одному дню. Например, 1 марта 2010 г. соответствует $t=2010,16164$.

Рассмотрим временной ряд $p(t)$ между начальной датой t_1 и конечной t_2 . Модель LPPL приобретает следующий вид:

$$\ln[p(t)] = A + Bx^m + Cx^m \cos[\omega \ln(x) + \phi], \quad (2)$$

где $x = t_2 - t_1$ – измеряет время, оставшееся до критического момента.

Рассмотрим механизм оценки для одного окна с начальной t_0 и конечной t_c датами. Уравнение (2) является логопериодичным и стандартным линейным МНК – мы не сможем оценить параметры уравнения. Заметим, что задача сводится к подбору таких параметров, чтобы сумма квадратов отклонений принимала минимальное значение. В данной работе мы используем нелинейный МНК. Процедура оценки нелинейным МНК состоит из следующих шагов:

- 1) разбиение области допустимых значений параметров по сетке значений;
- 2) нахождение сеточных параметров, обеспечивающих минимум суммы квадратов остатков;
- 3) оптимизация найденных по сетке параметров с помощью метода Ньютона – Гаусса (сеточные параметры используются как начальная оценка в методе Ньютона – Гаусса).

Существуют определенные трудности в вышеописанном алгоритме. Сложнейшая из них состоит в том, что имеется слишком большое число параметров, которые нужно оценить по сетке. В данном случае мы имеем шесть параметров. Заметим, что всего в модели четыре нелинейных параметра (t_c, m, ω, ϕ) и три линейных (A, B и C). Ли-

нейные параметры зависят от нелинейных. В этом нетрудно убедиться, если записать выражение (2) в виде

$$\ln[p(t)] = A + Bf(t) + Cg(t), \quad (3)$$

где $f(t)$ – нелинейная функция, отвечающая за сверхэкспоненциальный рост; $g(t)$ – нелинейная функция, отвечающая за колебания пузыря.

Допустим, что мы имеем N наблюдений. Тогда (3) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n \ln[p_i(t)] = AN + B \sum_{i=1}^n f_i(t) + C \sum_{i=1}^n g_i(t). \quad (4)$$

Домножение на функцию $f(t)$ и $g(t)$ не изменит уравнения (4), тогда выполнение данной операции приведет к следующим результатам:

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) \ln[p_i(t)] = Af_i(t) + B \sum_{i=1}^n f_i^2(t) + C \sum_{i=1}^n g_i(t) f_i(t), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i(t) \ln[p_i(t)] = Ag_i(t) + B \sum_{i=1}^n g_i(t) f_i(t) + C \sum_{i=1}^n g_i^2(t). \quad (6)$$

Записывая формулы (4), (5) и (6) в матричном виде, получаем

$$\begin{pmatrix} N & \sum f_i & \sum g_i \\ \sum f_i & \sum f_i^2 & \sum g_i f_i \\ \sum g_i & \sum f_i g_i & \sum g_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \ln p_i \\ \sum \ln p_i f_i \\ \sum \ln p_i g_i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, параметры A , B и C могут быть получены следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum f_i & \sum g_i \\ \sum f_i & \sum f_i^2 & \sum g_i f_i \\ \sum g_i & \sum f_i g_i & \sum g_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum \ln p_i \\ \sum \ln p_i f_i \\ \sum \ln p_i g_i \end{pmatrix}.$$

В конечном итоге мы сократим вдвое число параметров, которые нужно оценить по сетке, т.е. нам нужно оценить лишь параметры ω , ϕ , m и уже по ним найти аналитическим путем A , B и C . В статье [19] была представлена новая функциональная форма для оценки модели LRPL. Предложенная функциональная форма позволяет избавиться от параметра ϕ , заменив его вычислением простого линейного параметра C_1 :

$$\ln[p(t)] = A + B(t_c - t)^m + C_1(t_c - t)^m \cos[w \ln(t_c - t)] + C_2(t_c - t)^m \sin[w \ln(t_c - t)].$$

Используя данную функциональную форму, мы, таким образом, облегчаем оценку параметров, связанную с сильной нелинейностью функции. Представить функцию (3) можно в следующем линейном виде:

$$\ln[p(t)] = A + Bf(t) + C_1g(t) + C_2h(t).$$

Как и в случае с выражением (3), можно вычислить все линейные параметры следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} N & \sum f_i & \sum g_i & \sum h_i \\ \sum f_i & \sum f_i^2 & \sum f_i g_i & \sum f_i h_i \\ \sum g_i & \sum f_i g_i & \sum g_i^2 & \sum g_i h_i \\ \sum h_i & \sum f_i h_i & \sum g_i h_i & \sum h_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i f_i \\ \sum y_i g_i \\ \sum y_i h_i \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем для оценки параметров модели опираться на формулы (4), (5), (6).

Имеется еще одна важная деталь. Параметры ω , ϕ , m являются параметрами существенных нелинейностей, поэтому при нахождении суммы квадратов остатков возможно наличие нескольких локальных минимумов. Будем оценивать параметры десять раз и из полученного множества находить оптимальный (хотя он не будет глобальным, так как остается малая вероятность того, что мы нашли не все локальные минимумы, которые могут оказаться меньше, чем найденные нами).

В случае если при десятикратной оценке решения, полученные методом Ньютона – Гаусса, будут повторяться, то мы будем исключать повторяющиеся решения.

Диагностика эконометрических моделей. После того как мы провели оценку параметров в рассматриваемой модели, возникает проблема выбора моделей, удовлетворяющих режимам функционирования пузырей. Дело в том, что, какие бы мы ни взяли модели и входные данные, процедура оценки всегда будет выдавать нам определенные значения. При представлении процедуры оценки в форме модели «черного ящика» видно, что все параметры, полученные нами, зависят

от p , t_0 и t_c , поэтому нам нужно ввести такие условия для выходных параметров, чтобы они отбирали только «правильные» t_0 и t_c .

В работах [11, 18, 20–24] было предложено использовать следующие процедуры по выбору моделей, удовлетворяющих режиму функционирования пузырей. Рассмотрим подробно эти процедуры выбора моделей.

Основная селекция. В процессе данного отбора используются значения параметров m и B . Запишем данные условия:

$$0 < m < 1 \text{ и } B < 0.$$

Выбор данных условий основан на том, что на рынке цены возрастают со все большей скоростью, а колебания становятся все меньше и чаще (следствие формулы (2) и модели, управляемой риском). Именно эти наложения на значения параметров вызывают такое поведение пузырей.

Фильтрация «стационарностью». Когда мы получили эконометрическую модель, мы можем найти остатки между модельными значениями и наблюдаемыми ценами. Если данные остатки могут быть смоделированы процессом Орнштейна – Уленбека (OU-процесс), это означает, что мы построили достаточно адекватную эконометрическую модель. Процесс Орнштейна – Уленбека является примером гауссовского процесса, который имеет ограниченные дисперсии и допускает стационарное распределение вероятностей. Этот процесс определяется следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dx_t = \theta(\mu - x_t)dt + \sigma dW_t,$$

где μ – среднее значение, к которому возвращаются остатки; σ – степень волатильности вокруг среднего; θ – параметр; W_t – процесс Винера.

Часто данный процесс называют процессом возврата к среднему, так как если величины отклоняются сильно, то они вскоре должны возвратиться к своему среднему значению. Процесс Орнштейна – Уленбека является непрерывным. У данного процесса существует дискретный аналог – модель авторегрессии AR(1) [25]. Тест на возможность моделирования остатков с помощью OU-процесса может быть интерпретирован как тест на отсутствие единичных корней в AR(1).

Мы использовали тесты Дики – Фуллера и Филлипса – Перрона на единичные корни. Основная гипотеза H_0 данных тестов заключается в том, что остатки являются нестационарным процессом, а альтернативная гипотеза H_1 – в том, что остатки являются стационарными и поэтому могут быть описаны процессом Орнштейна – Уленбека.

Спектральный анализ. В связи с тем, что в модели имеется значительное число весьма нелинейных параметров, необходимо быть более уверенным в выборе хотя бы нескольких. Для этого используем спектральный анализ Ломба. Данный тип спектрального анализа был разработан независимо друг от друга Ломбом в работе [26] и Скаргллом в работе [27]. Метод предназначался для исследования нерегулярных рядов [28]. Спектральный анализ дает истинное значение частоты ω и ассоциирующуюся с этой частотой мощность критерия.

Алгоритм спектрального анализа выглядит следующим образом.

1. Нахождение остатков по формуле

$$r(t) = x^{-m} (\ln[p(t)] - A - Bx^m) .$$

Заметим, что мы используем параметры A , B и m , найденные ранее.

2. Применение спектрального анализа Ломба к вычисленным остаткам.

3. Нахождение ω_{lomb} с наибольшей мощностью $P_{\text{max}}(\omega_{\text{lomb}})$.

4. Сравнение ω_{lomb} с полученной ранее оценкой ω .

Таким образом, нами была разработана система фильтрации, которая будет отсеивать неправильные значения t_0 и t_c .

Сущность и особенности LPPL-модели, ее достоинства и недостатки, анализ российского и международного опыта. Результаты модели были представлены в книге Дидье Сорнетт «Как предсказывать крахи финансовых рынков» в 2003 г. [14]. Эти результаты, с одной стороны, были довольно интересными и правдоподобными. Критики обвинили автора в том, что модель применялась к ситуациям, результат которых априори был известен. В 2010 г. была выпущена статья [25], в которой группа ученых во главе с Д. Сорнеттом опубликовала прогноз развития и краха пузыря на шанхайском индексе. После успешной реализации прогноза критики обвинили данный прогноз в самореализации. Д. Сорнетт и группа ученых пользуются улучшенной версией Log-Periodic Power Law Singularity (LPPLS) [29].

Для научной чистоты предсказательных экспериментов Обсерваторией финансовых крахов Швейцарского федерального университета был проведен эксперимент, названный Financial Bubbles Experiment (FBE). Суть данного эксперимента сводится к прогнозированию финансовых крахов за полгода до краха. Прогнозы публикуются лишь спустя полгода после сделанного прогноза. Таким образом, широкой общественности не было известно о прогнозах, и поэтому исследователей уже не смогли обвинить в самореализации пузырей. Эксперимент длился два года. За это время было выявлено 35 объектов, которые вели себя как пузыри. Из этого числа объектов в реальности пузырями оказались лишь 23. Из них дата краха или смена режима были предсказаны правильно для 19 пузырей.

Таким образом, модель позволяет довольно точно предсказывать промежуток времени в будущем, во время которого на рынке произойдет крах или смена режима функционирования пузыря. Кроме того, с использованием данной модели мы сможем выделять более формально пузыри по дате начала и дате окончания.

Список литературы

1. Водолазский А.А. Начала эконофизики и количественная определенность первых экономических законов. – Новочеркасск: НОК, 2013. – 227 с.
2. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. Эконофизика и анализ временных рядов // ЭКОНОФИЗИКА. Современная физика в поисках экономической теории / под ред. В.В. Харитоновой и А.А. Ежова; МИФИ. – М., 2007. – С. 243–293.
3. Досиков В.С., Бигдай О.Б., Волошин Д.А. Нелинейная динамика в приложении к военной экономике и финансовым рынкам: обзор некоторых парадигм и методов // Вестник СевКавГТИ. – 2015. – Вып. 2 (21). – С. 34–40.
4. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику: статистические и динамические модели / Ин-т комп. исслед. – 2-е изд., испр. и доп. – М.; Ижевск, 2012. – 340 с.
5. Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 147 p.
6. Россер Дж. Настоящее и будущее эконофизики // Вопросы экономики. – 2009. – № 11. – С. 76–81.
7. Леонидов А.В. Путь к экономическому равновесию и эффективность финансовых рынков: взгляд физика // Вопросы экономики. – 2009. – № 11. – С. 82–89.

8. Панченков А.Н. Эконофизика / ООО «Типография Поволжье». – Н. Новгород, 2007. – 528 с.
9. Кип С., Ормерод П. От экономики к эконофизике – к подлинной экономической науке? // ЭКОНОФИЗИКА. Современная физика в поисках экономической теории / под ред. В.В. Харитонова и А.А. Ежова; МИФИ. – М., 2007. – С. 425–470.
10. Ахуньянова С.А., Симонов П.М. Моделирование и прогнозирование на финансовых рынках с помощью эконометрики и эконофизики [Электронный ресурс]: монография / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2017. – 5 Мб. – URL: <https://elis.psu.ru/node/486405> (дата обращения: 23.08.2019).
11. Арбузова В.О. Имитационное моделирование микроструктуры фондового рынка на основе высокочастотной и транзакционной информации: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13 / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Пермь, 2016. – 223 с.
12. Арбузов В.О., Ладейщикова О.В. Применение модели Изинга в модели, управляемой риском // Актуальные вопросы современной экономической науки: сб. докл. междунар. науч. заоч. конф., г. Липецк, 20 февраля 2010 г.: в 2 т. / отв. ред. А.В. Горбенюк; Изд. центр «Де-факто». – Липецк, 2010. – Т. 2. – С. 185–186.
13. Арбузов В.О., Ладейщикова О.В. Основные подходы к эмпирическому обоснованию паттернов технического анализа // Актуальные вопросы современной экономической науки: сб. докл. междунар. науч. заоч. конф., г. Липецк, 20 февраля 2010 г.: в 2 т. / отв. ред. А.В. Горбенюк; Изд. центр «Де-факто». – Липецк, 2010. – Т. 2. – С. 187.
14. Sornette D. Why stock markets crash: critical events in complex financial systems. – Princeton: Princeton University Press. 2003. – 441 p.
15. Арбузов В.О., Ладейщикова О.В. Проблемы построения многофакторных моделей прогнозирования фондового рынка // Импульс-2009: материалы VI Всерос. науч.-практ. конф. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2009. – С. 44–46.
16. Арбузов В.О. Эмпирическая проверка информационной ценности методов технического анализа на основе критерия Колмогорова – Смирнова // Математические модели и системный анализ в экономике: сб. науч. тр. молодых ученых. – Пермь, 2010. – С. 17–22.
17. Sornette D., Woodard R. Financial bubbles, real Estate bubbles, derivative bubbles, and the financial and economic crisis // *Econophysics Approaches to Large-Scale Business Data and Financial Crisis* / eds. by M. Takayasu, T. Watanabe, H. Takayasu. – Tokyo: Springer, 2010. – P. 101–148. DOI: 10.1007/978-4-431-53853-0_6

18. Sornette D., Zhou W.-X. Importance of positive feedbacks and overconfidence in a self-fulfilling ising model of financial markets // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2006. – Vol. 370. – P. 704–726. DOI: 10.1016/j.physa.2006.02.022
19. Filimonov V., Sornette D. A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2013. – Vol. 392 (17). – P. 3698–3707. DOI: 10.1016/j.physa.2013.04.012
20. Filimonov V., Sornette D. Power law scaling and “dragon-Kings” in distributions of intraday financial drawdowns // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2015. – Vol. 74. – P. 27–45. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.04.007
21. Арбузов В.О. Моделирование краха индекса РТС в 2008 г. на основе модели LPPL // *Математические модели и системный анализ в экономике: сб. науч. тр. молодых ученых*. – Пермь, 2010. – С. 5–11.
22. Арбузов В.О. Диагностика финансовых пузырей // *Фьючерсы и опционы*. – 2012. – № 6. – С. 74–79.
23. Jacobsson E. How to predict crashes in financial markets with the Log-Periodic Power Law: master diss. / Stockholm University. – Stockholm, 2009. – 50 p.
24. Roehner B.M., Sornette D. The sharp peak-flat trough pattern and critical speculation // *European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*. – 1998. – Vol. 4. – P. 387–399. DOI: 10.1007/s100510050394
25. Bubble diagnosis and prediction of the 2005–2007 and 2008–2009 Chinese stock market bubbles / J. Zhi-Qiang, W.-X. Zhou, D. Sornette, R. Woodard, K. Bastiaensen, P. Cauwels // *Journal of Economic Behavior and Organization*. – 2010. – Vol. 74. – P. 149–162. DOI: 10.1016/j.jebo.2010.02.007
26. Lomb N.R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data // *Astrophysics and Space Science*. – 1976. – Vol. 39. – P. 447–462. DOI: 10.1007/BF00648343
27. Scargle J.D. Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data // *The Astrophysical Journal*. – 1982. – Vol. 263. – P. 836–853. DOI: 10.1086/160554
28. Витязев В.В. Анализ неравномерных временных рядов: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. – 68 с.
29. Sornette D., Johansen A. Significance of log-periodic precursors to financial crashes // *Quantitative Finance*. – 2001. – Vol. 1. – P. 452–471.

References

1. Vodolazskii A.A. Nachala ekonofiziki i kolichestvennaia opredelennost' pervykh ekonomicheskikh zakonov [The beginnings of econophysics and the quantitative certainty of the first economic laws]. Novoчеркасс, NOK, 2013, 227 p. (*In Russian*).

2. Dubovikov M.M., Starchenko N.V. Ekonofizika i analiz vremennykh riadov [Econophysics and Time Series Analysis]. EKONOFIZIKA. Sovremennaia fizika v poiskakh ekonomicheskoi teorii. Moscow, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 2007, pp. 243–293. (*In Russian*).

3. Dosikov V.S., Bigdai O.B., Voloshin D.A. Nelineinaia dinamika v prilozhenii k voennoi ekonomike i finansovym rynkam: obzor nekotorykh paradig i metodov [Nonlinear dynamics applied to the military economy and financial markets: an overview of some paradigms and methods]. *Vestnik SevKavGTI*, 2015, iss. 2 (21), pp. 34–40. (*In Russian*).

4. Romanovskii M.Iu., Romanovskii Iu.M. Vvedenie v ekonofiziku: statisticheskie i dinamicheskie modeli [Introduction to econophysics: statistical and dynamic models]. Moscow; Izhevsk, Institut komp'iuternykh issledovani, 2012, 340 p. (*In Russian*).

5. Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance. Cambridge, Cambridge University Press, 2000, 147 p.

6. Rosser Dzh. Nastoiashchee i budushchee ekonofiziki [The present and future of econophysics]. *Voprosy ekonomiki*, 2009, no. 11, pp. 76–81. (*In Russian*).

7. Leonidov A.V. Put' k ekonomicheskomu ravnovesiiu i effektivnost' finansovykh rynkov: vzgliad fizika [The path to economic equilibrium and the effectiveness of financial markets: a physicist's view]. *Voprosy ekonomiki*, 2009, no. 11, pp. 82–89. (*In Russian*).

8. Panchenkov A.N. Ekonofizika. [Econophysics]. Nizhny Novgorod, LTD Tipografiia Povolzh'e, 2007, 528 p. (*In Russian*).

9. Kip S., Ormerod P. Ot ekonomiki k ekonofizike – k podlinnoi ekonomicheskoi nauke? [From economics to econophysics - to genuine economics?] // EKONOFIZIKA. Sovremennaia fizika v poiskakh ekonomicheskoi teorii. Moscow, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 2007, pp. 425–470. (*In Russian*).

10. Akhun'ianova S.A., Simonov P.M. Modelirovanie i prognozirovanie na finansovykh rynkakh s pomoshch'iu ekonometriki i ekonofiziki [Modeling and forecasting in financial markets using econometrics and econophysics] Perm, Perm university press, 2017, available at: <https://elis.psu.ru/node/486405> (accessed 23 August 2019) (*In Russian*).

11. Arbuzeva V.O. Imitatsionnoe modelirovanie mikrostruktury fondovogo rynka na osnove vysokochastotnoi i transaktsionnoi informatsii [Simulation of the stock market microstructure based on high-frequency and transactional information], Ph. D. thesis. Perm, 2016, 223 p. (*In Russian*).

12. Arbuzov V.O., Ladeishchikova O.V. Primenenie modeli Izinga v modeli, upravliemoi riskom [Using the Ising model in a risk-managed model] *Aktual'nye voprosy sovremennoi ekonomicheskoi nauki: sbornik докладов mezhdunarodnoi nauchnoi zaochnoi konferentsii*. 20 February 2010, Lipetsk, De-fakto. 2010, pp. 185–186. (In Russian).

13. Arbuzov V.O., Ladeyshchikova O.V. Osnovnye podkhody k empiricheskom obosnovaniuu patternov tekhnicheskogo analiza [The main approaches to the empirical substantiation of technical analysis patterns] *Aktual'nye voprosy sovremennoi ekonomicheskoi nauki: sbornik докладов mezhdunarodnoi nauchnoi zaochnoi konferentsii*. 20 February 2010, Lipetsk, De-fakto. 2010, p. 187. (In Russian).

14. Sornette D. Why stock markets crash: critical events in complex financial systems. Princeton, Princeton University Press, 2003. 441 p.

15. Arbuzov V.O., Ladeishchikova O.V. Problemy postroeniia mnogofaktornykh modelei prognozirovaniia fondovogo rynka [Problems of building multi-factor models of stock market forecasting] *“Impul's-2009” Trudy VI Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii*. Tomsk, Tomsk polytechnic university publisher, 2009, pp. 44–46. (In Russian).

16. Arbuzov V.O. Empiricheskaiia proverka informatsionnoi tsennosti metodov tekhnicheskogo analiza na osnove kriteriia Kolmogorova–Smirnova [Empirical verification of the information value of technical analysis methods based on the Kolmogorov–Smirnov criterion]. *Matematicheskie modeli i sistemnyi analiz v ekonomike: sb. nauch. tr. molodykh uchenykh*, Perm, Perm university press, 2010, pp. 17–22. (In Russian).

17. Sornette D., Woodard R. (2010) Financial Bubbles, Real Estate Bubbles, Derivative Bubbles, and the Financial and Economic Crisis. In: Takayasu M., Watanabe T., Takayasu H. (eds) *Econophysics Approaches to Large-Scale Business Data and Financial Crisis*. Springer, Tokyo, pp. 101–148, DOI: 10.1007/978-4-431-53853-0_6.

18. Sornette D., Zhou W.-X. Importance of positive feedbacks and overconfidence in a self-fulfilling ising model of financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, vol. 370, pp. 704–726, DOI: 10.1016/j.physa.2006.02.022.

19. Filimonov V., Sornette D. A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2013, vol. 392 (17), pp. 3698–3707, DOI: 10.1016/j.physa.2013.04.012

20. Filimonov V., Sornette D. Power law scaling and «dragon-Kings» in distributions of intraday financial drawdowns. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, vol. 74, pp. 27–45. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.04.007

21. Arbuzov V.O. Modelirovanie krakha indeksa RTS v 2008 g. na osnove modeli LPPL [Modeling the collapse of the RTS index in 2008 based on the LPPL model] *Matematicheskie modeli i sistemnyi analiz v ekonomike: Sb. nauch. tr. molodykh uchenykh kaf. informatsionnykh sistem i matematicheskikh metodov v ekonomike*. Perm, Perm university press. 2010, pp. 5–11. (In Russian).
22. Arbuzov V.O. Diagnostika finansovykh puzyrei [Diagnostics of financial bubbles]. *Futures and Options*, 2012, no. 6, pp. 74–79. (In Russian).
23. Jacobsson E. How to predict crashes in financial markets with the Log-Periodic Power Law. Master's degree thesis. Department of Mathematical Statistics, Stockholm University. 2009. 50 p.
24. Roehner B.M., Sornette D. The sharp peak-flat trough pattern and critical speculation. *European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, 1998, vol. 4, pp. 387–399, DOI: 10.1007/s100510050394
25. Zhi-Qiang J., Zhou W.-X., Sornette D., Woodard R., Bastiaensen K., Cauwels P. Bubble diagnosis and prediction of the 2005–2007 and 2008–2009 Chinese stock market bubbles. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 2010, vol. 74, pp. 149–162, DOI:10.1016/j.jebo.2010.02.007
26. Lomb N.R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 1976, vol. 39, pp. 447–462, DOI: 10.1007/BF00648343
27. Scargle J. D. Studies in astronomical time series analysis. II. statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 1982, Vol. 263, pp. 835–853, DOI: 10.1086/160554
28. Vitiazhev V.V. Analiz neravnomernykh vremennykh riadov. [Analysis of uneven time series]. Saint Petersburg, Saint Petersburg state university Publisher, 2001, 68 p. (In Russian).
29. Sornette D., Johansen A. Significance of log-periodic precursors to financial crashes. *Quantitative Finance*, 2001, vol. 1, pp. 452–471.

Получено 23.11.2019

Принято 03.02.2020

Сведения об авторах

Адрианов Дмитрий Леонидович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: andrianov@econ.psu.ru).

Симонов Петр Михайлович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.ru).

About the authors

Dmitrii L. Andrianov (Perm, Russia Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: andrianov@econ.psu.ru).

Petr M. Simonov (Perm, Russia Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100-2018:

Андреанов, Д. Л. Обзор методов экономико-математического моделирования, основанных на принципах эконофизики. Часть I / Д. Л. Андреанов, П. М. Симонов – DOI 10.15593/2499-9873/2020.1.10. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 1. – С. 161–181.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Андреанов Д.Л., Симонов П.М. Обзор методов экономико-математического моделирования, основанных на принципах эконофизики. Часть I // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 1. – С. 161–181. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.10

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Andrianov D.L., Simonov P.M. A review of the methods of economic and mathematical modeling based on the principles of econophysics. Part I. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 1, pp. 161–181. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.10 (*in Russian*)