DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.01
УДК 519.6

А.А. Халджигитов[1], У.Э. Адамбаев[2], М.Р. Бабаджанов[3]

[1]Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологии, Самарканд, Узбекистан

[2]Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

[3]Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Обычно для численного решения упругопластических краевых деформационной теории пластичности используется метод упругих решений, предложенный А.А. Ильюшиным. Метод упругих решений относительно краевых задач теории пластического течения в литературе называют методом начальных напряжений или методом начальных деформаций. В данной работе для решения краевых задач деформационной теории пластичности трансверсально изотропных тел используется относительно простой конечно-разностный метод, рассматриваемый в сочетании с итерационным методом, т.е. методом упругих решений. Суть метода заключается в построении симметричных конечно-разностных уравнений, отдельно для внутренних и граничных узлов рассматриваемой области, и их решении относительно центральных или граничных узловых перемещений и организации итерационного процесса. Решены численно упругопластические задачи для изотропного и трансверсально изотропного параллелепипеда при различных краевых и граничных условиях. Полученные результаты совпадают с известными решениями, что показывает справедливость применяемой методики. Исследовано распространение зон пластичности и влияние анизотропии на их распределение.

Ключевые слова: деформационная теория, метод упругих решений, пластичность, перемещение, деформация, напряжение, численный метод, итерационный процесс, упругопластическая краевая задача, трансверсально-изотропный материал.

A.A. Khaldjigitov[1], U.E. Adambaev[2], M.R. Badadjanov[3]

[1]Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies, Samarkand, Uzbekistan

[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[3]Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING THE ELASTOPLASTIC PROBLEMS OF ANISOTROPIC BODIES

Usually, for the numerical solution of elastoplastic boundary value problems based on deformation theory of plasticity is used an elastic solutions method proposed by A.A. Ilyushin. In literatures the method of elastic solutions relative to boundary value problems of the theory of plastic flow is called the method of initial stresses or the method of initial deformations. In this paper, to solve the boundary value problems of the deformation theory of plasticity of transversally isotropic bodies, it is used relatively "simple" finite-difference method considered in combination with the iterative method, that is, the elastic solution method. The essence of the method is to construct symmetric finite-difference equations, separately for internal and boundary nodes of the area under consideration, and to solve them with respect to "central" or boundary node displacements and the organization of the iterative process. Elastoplastic problems are solved numerically for isotropic and transversely isotropic parallelepipeds under various boundary and boundary conditions. The obtained results are consistent with the known solutions, which shows the validity of the applied methodology. It is explored the spreading of the zone of plasticity and the effect of anisotropy on their distribution.

Keywords: deformation theory, elastic solutions method, plasticity, displacements, strain, stress, numerical method, iterative process, elastoplastic boundary value problems, transversely isotropic material.

Введение

Основными методами решения упругопластических краевых задач являются метод конечных разностей [1], вариационно-разностный метод [2], метод конечных элементов (МКЭ) [3], метод граничных элементов (МГЭ) [4] и др. Известно, что если область задания упругопластических краевых задач имеет сложную форму, то удобно использовать методы МКЭ и МГЭ. Метод упругих решений, разработанный А.А. Ильюшиным [5], позволяет свести упругопластическую краевую задачу к последовательности упругих задач с переменной правой частью в уравнениях.

В этой статье метод упругих решений применяется для конечно-разностных уравнений разрешенных относительно центральных узловых перемещений во внутренних точках. Заметим, что конечно-разностные аналоги краевых условий второго типа также решены относительно граничных узловых перемещений. Рассмотрены упругопластические краевые задачи для изотропного и трансверсально изотропного параллелепипедов при различных краевых и граничных условиях. Упругопластические краевые задачи были сформулированы на основе деформационных теорий пластичности изотропных [5] и трансверсально изотропных тел [2]. Заметим, что аналогичные задачи об упругом изотропном параллелепипеде были решены в работах Филоненко – Бородича [7], Победри [2] и др.

Во втором параграфе сформулирована упругопластическая краевая задача, основанная на деформационной теории пластичности для изотропных и трансверсально изотропных тел, которые состоят из уравнения равновесия, определяющего соотношения деформационной теории пластичности и соотношения Коши с соответствующими краевыми и граничными условиями. Задача сведена к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений. Определяющие соотношения деформационных теорий пластичности записаны для кусочно-линейной диаграммы деформирований.

В третьем параграфе построены конечно-разностные уравнения для параллелепипеда по деформационной теории трансверсально изотропных тел [8, 9].

Приведены разностные уравнения и граничные условия, разрешенные относительно узловых перемещений и организация итерационных процессов для этих уравнений. При этом начальные приближения считаются тривиальными. Решена задача о равновесии упругопластического трансверсально изотропного параллелепипеда под действием куполообразной нагрузки, приложенной по двум противоположным граням, перпендикулярным к оси *OX*. При этом остальные грани свободны от нагрузок. Результаты были сопоставлены с известными решениями, показана их достаточная близость.

1. Краевые задачи деформационных теорий пластичности для изотропных и трансверсально изотропных тел

Упругопластическая краевая задача, основанная на деформационной теории пластичности [10], состоит:

– из уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0\,; \tag{1}$$

– определяющего соотношения деформационной теории Ильюшина [5]

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \qquad (2)$$

где $\sigma = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)\theta$,

$$\sigma_u = \sigma_u\left(\varepsilon_u\right); \qquad (3)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (4)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \qquad \sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0, \qquad (5)$$

где λ, μ – коэффициенты Ляме; θ– девиатор тензора деформации; X_i – объемная сила; δ_{ij} – символ Кронекера.

В уравнении (2) в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования значение напряжения σ_{ij} может быть заменено выражением

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_{ij} - 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*), \qquad (6)$$

где μ' – касательный модуль; ε_u – интенсивность тензора деформации; ε_u^* – предел текучести.

С учетом последнего соотношения (6) определяющие соотношения деформационной теории пластичности принимают вид:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) e_{11},$$

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) e_{22},$$

$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) e_{33},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) e_{12}, \qquad (7)$$

$$\sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{13},$$

$$\sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{23}.$$

Подставляя уравнения (6) и (2) в уравнение (1), получаем:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right) - F_1 = 0, \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - F_2 = 0, \\ (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - F_3 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где F_i при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ имеет следующую форму:

$$F_i = 2(\mu - \mu')\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j}.$$

Определяющее соотношение (2)–(3) в случае трансверсально изотропных тел принимает вид [6]:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}\left(\delta_{ij} - \delta_{3i}\delta_{3j}\right) + \sigma_{33}\delta_{3i}\delta_{3j} + \frac{P_u}{p_u}p_{ij} + \frac{Q_u}{q_u}q_{ij}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma} = \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\tilde{\theta} + \lambda_3\varepsilon_{33}\ ,\ \tilde{\theta} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ &\sigma_{33} = \lambda_3\tilde{\theta} + \lambda_4\varepsilon_{33}, \\ &P_u = P_u\left(p_u\right), \\ &Q_u = Q_u\left(q_u\right) \end{aligned} \quad (10)$$

и представляет собой деформационную теорию для трансверсально изотропных тел. В уравнениях (9)–(10), P_u, Q_u и p_u, q_u – интенсивности тензора напряжений и деформаций соответственно.

По аналогии с выражением (6) в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования P_u, Q_u могут быть представлены в следующем виде:

$$P_u = 2\lambda_2 p_u - 2(\lambda_2 - \lambda_2')(p_u - p_u^*),$$
$$Q_u = 2\lambda_5 q_u - 2(\lambda_5 - \lambda_5')(q_u - q_u^*), \tag{11}$$

где

$$p_u = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}}\ ,\ q_u = \sqrt{q_{ij} q_{ij}}\ ,\ p_{11} = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} = -p_{22},$$

$$p_{12} = \varepsilon_{12},\ q_{13} = \varepsilon_{13},\ q_{23} = \varepsilon_{23}.$$

Подставляя выражение (11) в уравнения (9)–(10), получаем определяющее соотношение деформационной теории пластичности трансверсально изотропных тел для кусочно-линейной диаграммы деформирования:

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{kl} - 2(\lambda_2 - \lambda_2')\left(1 - \frac{p^*}{p_u}\right) p_{ij} - 2(\lambda_5 - \lambda_5')\left(1 - \frac{q^*}{q_u}\right) q_{ij} \tag{12}$$

$$\text{при} \quad p_u \geq p^*,\ q_u \geq q^*,$$

где p^*, q^* – пределы упругости; C_{ijkl} – трансверсально изотропный тензор четвертого ранга:

$$\lambda_1 = C_{2211},\ \lambda_2 = C_{1212},\ \lambda_3 = C_{1133},\ \lambda_4 = C_{3333},\ \lambda_5 = C_{1313},$$

$$C_{1111} = C_{2222} = \lambda_1 + 2\lambda_2,\ C_{2233} = \lambda_3,\ C_{2323} = \lambda_5. \tag{13}$$

Подставляя соотношения (13) и (12) в уравнение (1), получаем:

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ + (C_{1133} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - F_1 = 0, \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + (C_{2233} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - F_2 = 0, \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \\ + (C_{3322} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - F_3 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где F_i представляет собой пластическую часть рассматриваемых уравнений и имеет вид

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^p}{\partial x_j} = 2\left(\lambda_2 - \lambda_2'\right)\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + 2\left(\lambda_5 - \lambda_5'\right)\frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} \text{ при } p_u \geq p^*,\ q_u \geq q^*. \quad (15)$$

F_i согласно методу упругих решений [1] вычисляется на основе результатов из предыдущего приближения. Заметим, что уравнения (8), (14) представляют собой конечно-разностные уравнения краевых задач для изотропного и трансверсально изотропного параллелепипедов $\Omega\{0 \leq x \leq \ell_1,\ \ 0 \leq y \leq \ell_2,\ \ 0 \leq z \leq \ell_3\}$ соответственно. Боковые поверхности параллелепипеда свободны от нагрузок, а на противоположных сторонах параллелепипеда, перпендикулярных оси *OX*, применяется куполообразная нагрузка, т.е.

$$\begin{aligned} x = 0:&\ \ \sigma_{11} = S, \quad \sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = 0, \\ x = \ell_1:&\ \ \sigma_{11} = -S,\ \ \sigma_{12} = 0,\ \sigma_{13} = 0, \end{aligned} \quad (15a)$$

где

$$S = \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{\ell_2}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{\ell_3}\right).$$

Граничные условия (15а) в случае деформационной теории пластичности Ильюшина при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}\big|_{x=0,\ell_1} &= \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} - 2\left(\mu - \mu'\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{11}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1} = \pm S, \\ \sigma_{12}\big|_{x=0,\ell_1} &= \left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2\left(\mu - \mu'\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{12}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1} = 0, \quad (16) \\ \sigma_{13}\big|_{x=0,\ell_1} &= \left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - 2\left(\mu - \mu'\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{13}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1} = 0. \end{aligned}$$

С учетом (10) граничные условия для деформационной теории пластичности трансверсально изотропных тел при $p_u \geq p^*$, $q_u \geq q^*$ могут быть записаны в следующей форме:

$$\sigma_{11}\Big|_{x=0,\ell_1}=\left[\mathrm{C}_{1111}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{C}_{1122}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{C}_{1133}\frac{\partial w}{\partial z}-2\left(\lambda_2-\lambda_2'\right)\left(1-\frac{p^*}{p_u}\right)p_{11}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1}=\pm S,$$

$$\sigma_{12}\Big|_{x=0,\ell_1}=\left[C_{1212}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-2\left(\lambda_2-\lambda_2'\right)\left(1-\frac{p^*}{p_u}\right)p_{12}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1}=0, \qquad (17)$$

$$\sigma_{13}\Big|_{x=0,\ell_1}=\left[C_{1313}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-2\left(\lambda_5-\lambda_5'\right)\left(1-\frac{q^*}{q_u}\right)q_{13}\right]\Bigg|_{x=0,\ell_1}=0.$$

2. Конечно-разностные аналоги краевых задач деформационной теории пластичности трансверсально изотропных тел

Пусть упругопластическая краевая задача (1)–(5), основанная на деформационной теории пластичности, рассматривается в области $\Omega\{0\le x\le \ell_1,\ 0\le y\le \ell_2,\ 0\le z\le \ell_3\}$. Для построения сеточных уравнений рассмотрим три набора $x_i=ih_1$ $(i=\overline{0,N_1})$, $y_j=jh_2$ $(j=\overline{0,N_2})$, $z_k=kh_3$ $(k=\overline{0,N_3})$ параллельных линий, где $h_1=l_1/N_1$, $h_2=l_2/N_2$, $h_3=l_3/N_3$. Тогда, заменяя производные в (1)–(5) с соответствующими конечно-разностными отношениями, можно найти следующие уравнения:

$$\begin{gathered}C_{1111}\frac{u_{i+1,j,k}-2u_{i,j,k}+u_{i-1,j,k}}{h_1^2}+C_{1212}\frac{u_{i,j+1,k}-2u_{i,j,k}+u_{i,j-1,k}}{h_2^2}+\\+C_{1313}\frac{u_{i,j,k+1}-2u_{i,j,k}+u_{i,j,k-1}}{h_3^2}+\\+\left(C_{1122}+C_{1212}\right)\frac{v_{i+1,j+1,k}-v_{i-1,j+1,k}-v_{i+1,j-1,k}+v_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+\\+(C_{1133}+C_{1313})\frac{w_{i+1,j,k+1}-w_{i-1,j,k+1}-w_{i+1,j,k-1}+w_{i-1,j,k-1}}{4h_1h_3}-F1_{ijk}=0,\end{gathered} \qquad (18)$$

$$C_{1212}\frac{v_{i+1,j,k}-2v_{i,j,k}+v_{i-1,j,k}}{h_1^2}+C_{2222}\frac{v_{i,j+1,k}-2v_{i,j,k}+v_{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$

$$+C_{2323}\frac{v_{i,j,k+1}-2v_{i,j,k}+v_{i,j,k-1}}{h_3^2}+$$

$$+\left(C_{2211}+C_{1212}\right)\frac{u_{i+1,j+1,k}-u_{i-1,j+1,k}-u_{i+1,j-1,k}+u_{i-1,j-1,k}}{4h_1h_2}+ \qquad (19)$$

$$+(C_{2233}+C_{2323})\frac{w_{i,j+1,k+1}-w_{i,j-1,k+1}-w_{i,j+1,k-1}+w_{i,j-1,k-1}}{4h_2h_3}-F2_{ijk}=0,$$

$$C_{1313}\frac{w_{i+1,j,k}-2w_{i,j,k}+w_{i-1,j,k}}{h_1^2}+C_{2323}\frac{w_{i,j+1,k}-2w_{i,j,k}+w_{i,j-1,k}}{h_2^2}+$$

$$+C_{3333}\frac{w_{i,j,k+1}-2w_{i,j,k}+w_{i,j,k-1}}{h_3^2}+$$

$$+\left(C_{3311}+C_{1313}\right)\frac{u_{i+1,j,k+1}-u_{i-1,j,k+1}-u_{i+1,j,k-1}+u_{i-1,j,k-1}}{4h_1h_3}+ \qquad (20)$$

$$+(C_{3322}+C_{2323})\frac{v_{i,j+1,k+1}-v_{i,j-1,k+1}-v_{i,j+1,k-1}+v_{i,j-1,k-1}}{4h_1h_2}-F3_{ijk}=0.$$

Разрешая конечно-разностные уравнения (18)–(20) относительно $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$, $w_{i,j,k}$, организуем следующий итерационный процесс:

$$u^{(n+1)}_{i,j,k}=\left[\frac{c_{1111}}{h_1^2}\left(u^{(n)}_{i+1,j,k}-u^{(n)}_{i-1,j,k}\right)+\frac{c_{1212}}{h_2^2}\left(u^{(n)}_{i,j+1,k}+u^{(n)}_{i,j-1,k}\right)+\right.$$

$$+\frac{c_{1313}}{h_3^2}\left(u^{(n)}_{i,j,k-1}+u^{(n)}_{i,j,k+1}\right)+\frac{c_{1122}+c_{1212}}{4h_1h_2}\left(v^{(n)}_{i+1,j+1,k}-v^{(n)}_{i+1,j-1,k}-v^{(n)}_{i-1,j+1,k}+v^{(n)}_{i-1,j-1,k}\right)+ \qquad (21)$$

$$\left.+\frac{c_{1133}+c_{1313}}{4h_1h_3}\left(w^{(n)}_{i+1,j,k+1}-w^{(n)}_{i+1,j,k-1}-w^{(n)}_{i-1,j,k+1}+w^{(n)}_{i-1,j,k-1}\right)-F1_{i,j,k}\right]/$$

$$/\left(\frac{2c_{1111}}{h_1^2}+\frac{2c_{1212}}{h_2^2}+\frac{2c_{1313}}{h_3^2}\right),$$

$$v^{(n+1)}_{i,j,k}=\left[\frac{c_{1212}}{h_1^2}\left(v^{(n)}_{i+1,j,k}+v^{(n)}_{i-1,j,k}\right)+\frac{c_{2222}}{h_2^2}\left(v^{(n)}_{i,j+1,k}+v^{(n)}_{i,j-1,k}\right)+\right.$$

$$+\frac{c_{2323}}{h_3^2}\left(v^{(n)}_{i,j,k+1}+v^{(n)}_{i,j,k-1}\right)+\frac{c_{2211}+c_{1212}}{4h_1h_2}\left(u^{(n)}_{i+1,j+1,k}-u^{(n)}_{i+1,j-1,k}-u^{(n)}_{i-1,j+1,k}+u^{(n)}_{i-1,j-1,k}\right)+ \qquad (22)$$

$$\left.+\frac{c_{2233}+c_{2323}}{4h_2h_3}\left(w^{(n)}_{i,j+1,k+1}-w^{(n)}_{i,j-1,k+1}-w^{(n)}_{i,j+1,k-1}+w^{(n)}_{i,j-1,k-1}\right)-F2_{i,j,k}\right]/$$

$$/\left(\frac{2c_{1212}}{h_1^2}+\frac{2c_{2222}}{h_2^2}+\frac{2c_{1313}}{h_3^2}\right),$$

$$
\begin{gathered}
w_{i,j,k}^{(n+1)} = [\frac{c_{1313}}{h_1^2}(w_{i+1,j,k}^{(n)} + w_{i-1,j,k}^{(n)}) + \frac{c_{2323}}{h_2^2}(w_{i,j+1,k}^{(n)} + w_{i,j-1,k}^{(n)}) + \\
+\frac{c_{3333}}{h_3^2}(w_{i,j,k+1}^{(n)} + w_{i,j,k-1}^{(n)}) + \frac{c_{3311}+c_{1313}}{4h_1h_3}(u_{i+1,j,k+1}^{(n)} - u_{i+1,j,k-1}^{(n)} - u_{i-1,j,k+1}^{(n)} + \\
+u_{i-1,j,k-1}^{(n)}) + \frac{c_{3322}+c_{2323}}{4h_2h_3}(v_{i,j+1,k+1}^{(n)} - v_{i,j-1,k+1}^{(n)} - v_{i,j+1,k-1}^{(n)} + v_{i,j-1,k-1}^{(n)}) - F3_{i,j,k}]/ \\
/\left(\frac{2c_{1313}}{h_1^2} + \frac{2c_{2323}}{h_2^2} + \frac{2c_{3333}}{h_3^2}\right).
\end{gathered} \tag{23}
$$

Следует отметить, что соотношения (21)–(23) рассматриваются во внутренних точках параллелепипеда. Напомним, что боковые поверхности параллелепипеда свободны от нагрузок, а куполообразная нагрузка приложена на противоположных гранях, перпендикулярных к оси OX. Дискретный аналог граничных условий на гранях, перпендикулярных к оси OX (16), имеет вид:

$$
\sigma_{11}\big|_{x=0} = \left.\left[\begin{gathered} C_{1111}\frac{u_{1,j,k}-u_{0,j,k}}{h_1} + C_{1122}\frac{v_{0,j,k}-v_{0,j-1,k}}{2h_2} + \\ +C_{1133}\frac{w_{0,j,k+1}-w_{0,j,k-1}}{2h_3} - 2(\lambda_2-\lambda_2')\left(1-\frac{p^*}{p_u}\right)p_{11}\end{gathered}\right]\right|_{x=0} = S,
$$

$$
\sigma_{12}\big|_{x=0} = \left.\left[\begin{gathered} C_{1212}\left(\frac{u_{0,j+1,k}-u_{0,j-1,k}}{2h_2} + \frac{v_{1,j,k}-v_{0,j,k}}{h_1}\right) - \\ -2(\lambda_2-\lambda_2)\left(1-\frac{p^*}{p_u}\right)p_{12}\end{gathered}\right]\right|_{x=0} = 0, \tag{24}
$$

$$
\sigma_{13}\big|_{x=0} = \left.\left[\begin{gathered} C_{1313}\left(\frac{u_{0,j,k+1}-u_{0,j,k-1}}{2h_3} + \frac{w_{1,j,k}-w_{0,j,k}}{h_1}\right) - \\ -2(\lambda_5-\lambda_5')\left(1-\frac{q^*}{q_u}\right)q_{13}\end{gathered}\right]\right|_{x=0} = 0,
$$

$$
\sigma_{11}\big|_{x=\ell_1} = \left.\left[\begin{gathered} C_{1111}\frac{u_{N_1,j,k}-u_{N_1-1,j,k}}{h_1} + C_{1122}\frac{v_{N_1,j+1,k}-v_{N_1,j-1,k}}{2h_2} + \\ +C_{1133}\frac{w_{N_1,j,k+1}-w_{N_1,j,k-1}}{2h_3} - 2(\lambda_2-\lambda_2')\left(1-\frac{p^*}{p_u}\right)p_{11}\end{gathered}\right]\right|_{x=\ell_1} = -S,
$$

$$\sigma_{12}\big|_{x=\ell_1}=\left[\begin{array}{c} C_{1212}\left(\dfrac{u_{N_1,j+1,k}-u_{N_1,j-1,k}}{2h_2}+\dfrac{v_{N_1,j,k}-v_{N_1-1,j,k}}{h_1}\right)- \\ -2(\lambda_2-\lambda_2')\left(1-\dfrac{p^*}{p_u}\right)p_{12} \end{array}\right]_{x=\ell_1}=0, \quad (25)$$

$$\sigma_{13}\big|_{x=\ell_1}=\left[\begin{array}{c} C_{1313}\left(\dfrac{u_{N_1,j,k+1}-u_{N_1,j,k-1}}{2h_3}+\dfrac{w_{N_1,j,k}-w_{N_1-1,j,k}}{h_1}\right)- \\ -2(\lambda_5-\lambda_5')\left(1-\dfrac{q^*}{q_u}\right)q_{13} \end{array}\right]_{x=\ell_1}=0.$$

Разрешая конечно-разностное уравнение (24)–(25) относительно перемещений относительно граничных узловых точек, можно найти, что

$$u^{(n+1)}_{N_1,j,k}=u^{(n)}_{N_1-1,j,k}-h_1/C_{1111}\left(\begin{array}{l} C_{1122}\dfrac{v^{(n)}_{N_1,j+1,k}-v^{(n)}_{N_1,j-1,k}}{2h_2}-C_{1133}\dfrac{w^{(n)}_{N_1,j,k+1}-w^{(n)}_{N_1,j,k-1}}{2h_3}- \\ -2\left(\left(\lambda_2-\lambda_2'\right)\left(1-\dfrac{p_u^*}{p_u}\right)\right)p_{11}-S \end{array}\right),$$

$$v^{(n+1)}_{N_1,j,k}=v^{(n)}_{N_1-1,j,k}-h_1\left(C_{1122}\frac{u^{(n)}_{N_1,j+1,k}-u^{(n)}_{N_1,j-1,k}}{2h_2}+2\left(\left(\lambda_2-\lambda_2'\right)\left(1-\frac{p_u^*}{p_u}\right)\right)p_{12}\right), \quad (26)$$

$$w^{(n+1)}_{N_1,j,k}=w^{(n)}_{N_1-1,j,k}-h_1\left(C_{1313}\frac{u^{(n)}_{N_1,j,k+1}-u^{(n)}_{N_1,j,k-1}}{2h_3}+2\left(\left(\lambda_5-\lambda_5'\right)\left(1-\frac{q_u^*}{q_u}\right)\right)q_{13}\right).$$

Граничные условия для перемещений не вызывают особых усилий. Начальное приближение итерационного процесса считается тривиальным. На основе описанного алгоритма разработано программное обеспечение на языке C++, где упругие константы имели следующие значения:

$$C_{1111}=C_{2222}=6,00,\ C_{1122}=0,21,\ C_{1133}=0,19,\ C_{2233}=C_{3311}=0,19,$$
$$C_{3333}=5,35,\ \mathrm{C}_{1212}=2,735,\quad C_{1313}=C_{2323}=2,39,\ \mu'=0,1,\ \ell_1=\ell_2=\ell_3=1.$$

В табл. 1 приведены точные и приближенные значения перемещений задачи о сжатии параллелепипеда равномерно распределенной нагрузкой по противоположным граням различными методами в некоторых узлах.

Таблица 1

Значения перемещений

Методы	$u(3,4,3)$	$v(3,2,1)$	$w(3,5,4)$
Одноступенчатый метод	4.79e–02	–8.05e–03	–7.55e–04
Двухступенчатый метод	4.80e–02	–8.19e–03	–7.56e–04
Предлагаемый метод	4.55e–02	–8.09e–03	–7.36e–04

В табл. 2 приведены значения компонентов тензора напряжений в некоторых точках параллелепипеда, полученных методом упругих решений.

Таблица 2

Значения компонентов тензора напряжений

Методы	$\sigma_{11}(1,5,5)$	$\sigma_{22}(1,3,5)$	$\sigma_{33}(1,3,4)$
Метод упругих решений	–3,76	–0,578	–0,765
Одноступенчатый метод	–3,76	–0,578	–0,776
Двухступенчатый метод	–3,75	–0,582	–0,765
Предлагаемый метод	–3,78	–0,3974	–0,5218

Заметим, что задача является симметричной и максимальное значение перемещения достигается в середине параллелепипеда, в граничных узлах значения перемещения, полученные по предлагаемому методу, равны нулю. В первых трех методах в табл. 2 используется вариационно-разностный метод построения разностных схем [11]. В этих методах значения перемещения в граничных узлах не будет равным нулю. Ниже приводятся значения перемещения (табл. 3).

Таблица 3

Значения перемещения в плоскости *YOZ* при $x = 0,2$

z \ y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,0597	0,1409	0,2290	0,2978	0,3238	0,2978	0,2290	0,1409	0,0597
0,2	0,1386	0,3268	0,5324	0,6933	0,7541	0,6933	0,5324	0,3268	0,1386
0,3	0,2228	0,5268	0,8604	1,1218	1,2208	1,1218	0,8604	0,5268	0,2228
0,4	0,2880	0,6823	1,1159	1,4561	1,5849	1,4561	1,1159	0,6823	0,2880
0,5	0,3126	0,7409	1,2124	1,5824	1,7225	1,5824	1,2124	0,7409	0,3126

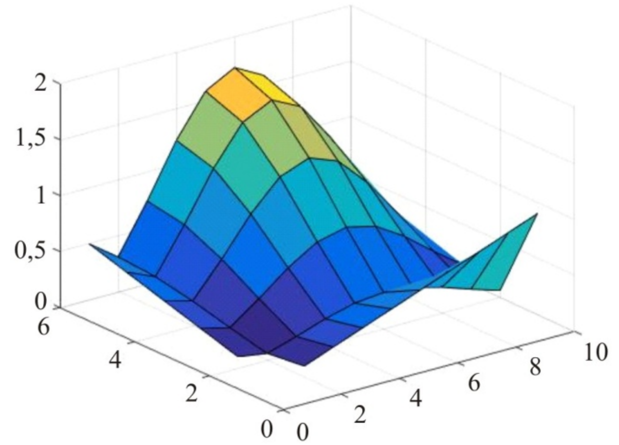

Рис. 1. Графическое представление значения перемещения в плоскости *YOZ* при $x = 0{,}2$

Значения перемещения в плоскости *YOZ* при $x = 0{,}5$ равно нулю, так как задача является симметричной.

Исследованы распространение зоны пластичности и влияние анизотропии на их распределение.

Значение интенсивности деформации в изотропном случае:

Сечения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ε_u	0,1	0,25	0,4	0,5	0,6	0,5	0,4	0,25	0,1

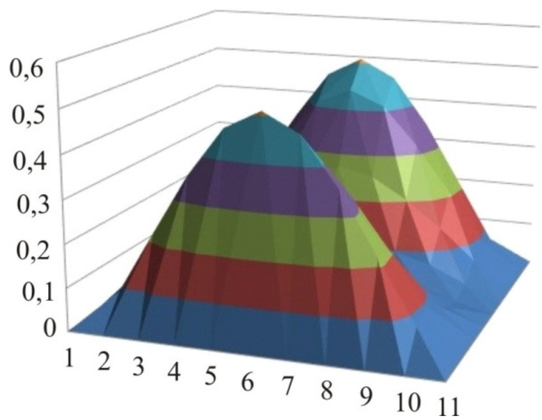

Рис. 2. Интенсивность деформации в изотропном случае при $x = 0{,}5$

Значение интенсивности деформации по p_u:

Сечения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_u	0,35	0,3	0,24	0,14	0,04	0,14	0,24	0,3	0,35

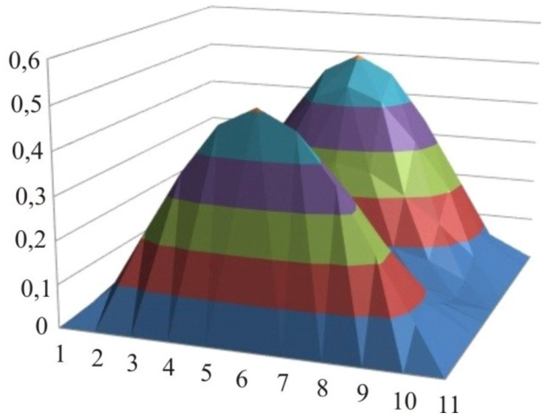

Рис. 3. Интенсивность деформации по p_u
при x = 0,1 и 0,9

Значение интенсивности деформации по q_u

Сечения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_u	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06

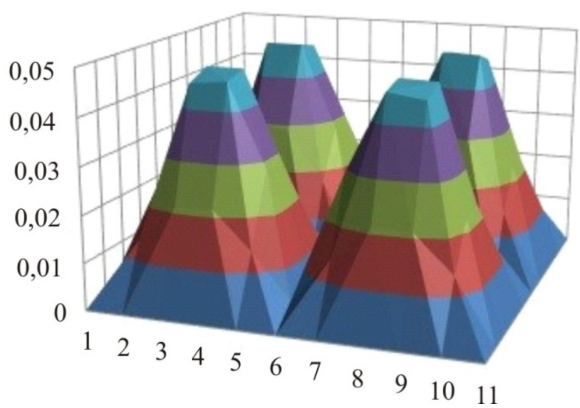

Рис. 4. Интенсивность деформации по q_u
при x = 0,1 и 0,9

Вывод

Сформулированы упругопластические краевые задачи для изотропных и трансверсально изотропных параллелепипедов. Конечно-разностные уравнения, построенные отдельно для внутренних и краевых условий, разрешены относительно центральных и граничных узловых перемещений. Итерационный процесс, организованный на основе полученных нелинейных конечно-разностных соотношений, при тривиальных начальных данных показывает хорошую сходимость и это, по-видимому, связано с выполнением условия диагонального преобладания для матриц системы разностных уравнений. С другой стороны, разностные уравнения являются симметричными и имеют порядок аппроксимации $O(h^2)$ во внутренних точках. Необходимо отметить, что в случае второй краевой задачи теории пластичности граничные условия удовлетворяются также итерационным методом в рамках требуемой точности. В качестве примера решены упругопластические задачи о равновесии изотропного и трансверсально изотропного параллелепипеда при двух краевых условиях и получены совпадающие с известными решениями результаты, что показывает справедливость применяемой методики.

Список литературы

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

2. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1996. – 343 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: МИР, 1979. – 392 с.

4. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел А. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

5. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

7. Филоненко-Бородич М.М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, № 2. – С. 37–48.

8. Nik Long N.M.A., Khaldjigitov A.A., Adambaev U. On the constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 14–15. – P. 7726–7740.

9. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems / A.A. Khaldjigitov, A. Qalandarov, N.M.A. Nik Long, Z. Eshquvatov // International Journal of Modern Physics. – 2012. – Vol. 9. – P. 503–510.

10. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. – М.: МИР, 1979. – 302 с.

11. Халджигитов А.А., Бабаджанов М.Р., Адамбаев У.Э. Равновесие параллелепипеда по деформационной теории тансверсально изотропных сред // Проблемы механики. – 2000. – № 4–5. – С. 12–16.

References

1. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Metody resheniia setochnykh uravnenii. [Methods for solving qrid equations]. Moscow, Nauka, 1978, 592 p.

2. Pobedria B.E. Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1996, 343 p.

3. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Boundary-element method application]. Moscow, MIR, 1979. 392 p.

4. Brebbiia K., Teles Zh., Vroubel A. Metody granichnykh elementov [Boundary-element methods]. Moscow, Mir, 1987, 524 p.

5. l'iushin A.A. Plastichnost' [Plasticity]. Moscow, Gostehizdat, 1948. 376 p.

6. Pobedria B.E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. 1984. 336 p.

7. Filonenko-Borodich M.M. Zadacha o ravnovesii uprugogo parallelepipeda pri zadannykh nagruzkakh na ego graniakh [The problem of equilibrium of an elastic parallelepiped under given loads on its faces]. Prikladnaia matematika i mekhanika, 1951, vol. 15, no. 2, pp. 37-48.

8. Nik Long N.M.A., Khaldjigitov A.A., Adambaev U. On the constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials. Applied Mathematical Modelling, 2013, vol.37, iss. 14–15, pp. 7726-7740.

9. Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A.Asri Long., Eshquvatov Z. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems. International journal of modern physics, 2012, vol. 9, pp. 503-510.

10. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. Mekhanika plasticheskikh sred [Mechanics of plastic solids]. Moscow, MIR, 1979, 302 p.

11. Khaldzhigitov A.A., Babadzhanov M.R., Adambaev U.E. Ravnovesie parallelepipeda po deformatsionnoi teorii tansversal'no izotropnykh sred [Parallelepiped equilibrium according to the deformation theory of transversally isotropic environments]. Problemy mekhaniki, 2000, no. 4-5, pp. 12-16.

Получено 16.09.2019

Сведения об авторах

Халджигитов Абдували Абдусамадович (Самарканд, Узбекистан) – доктор физико-математических наук, профессор, директор Самаркандского филиала Ташкентского университета информационных технологии (140100, Самарканд, ул. Шохрух Мирзо, 47а, e-mail: akhald@mail.ru).

Адамбаев Учкунбек Эркинович (Ташкент, Узбекистан) – кандидат физико-математических наук, докторант Национального университета Узбекистана (100174, Ташкент, ул. Университетская, 4, e-mail: a_uchqun@mail.ru).

Бабаджанов Мумин Раджабович (Ташкент, Узбекистан) – базовый докторант (Ph.D.) Ташкентского университета информационных технологии (100200, Ташкент, ул. Амира Темура, 108, e-mail: mum1975@mail.ru).

About the authors

Abduvali A. Khaldjigitov (Samarkand, Uzbekistan) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Director of Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies (140100, Samarkand, Shohruh Mirzo st., 47a, e-mail: akhald@mail.ru).

Uchkunbek E. Adambaev (Tashkent, Uzbekistan) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Doctoral Student, National University of Uzbekistan (100174, Tashkent, Universitet st., 4, e-mail: a_uchqun@mail.ru).

Mumin R. Babadjanov (Tashkent, Uzbekistan) – Doctoral student (Ph.D.), Tashkent University of Information Technologies (100200, Tashkent, Amir Temur st., 108, e-mail: mum1975@mail.ru).