DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.06
УДК 517.92

Д.Л. Горбунов, С.А. Федосеев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КОНЪЮНКТУРОЙ РЫНКА ТРУДА ПРЕДПРИЯТИЯ В ВИДЕ ИНТЕГРИРУЕМОЙ В КВАДРАТУРАХ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается математическая модель конъюнктуры рынка труда предприятия, которая представляет собой общий конечномерный случай системы нелинейных дифференциальных уравнений. Найден прием, позволяющий представить ее точное аналитическое решение в виде квадратур. Полученные результаты применены к исследованию математической модели, пригодной для описания и прогнозирования конъюнктуры рынка труда предприятия, состоящего из нескольких структурных подразделений.

Ключевые слова: промышленные предприятия, управление персоналом, математическая модель конъюнктуры рынка труда, система нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемость в квадратурах.

D.L. Gorbunov, S.A. Fedoseev

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

THE MODEL OF CONTROL LABOR MARKET CONDITIONS COMPANY AS A INTEGRABILITY IN QUADRATURES SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENCIAL EQUATIONS

We propose a mathematical model of the labor market situation of the enterprise, which is a General finite-dimensional case of a system of nonlinear differential equations. A technique is found to represent its exact analytical solution in the form of quadratures. The obtained results are applied to the study of a mathematical model suitable for describing and predicting the labor market conditions of an enterprise consisting of several structural units.

Keywords: industrial companies, personnel management, mathematical model of labor market conditions. system of nonlinear differential equations, integrability in quadratures.

Введение

Сложно переоценить роль трудоспособного населения в экономике: труд, как один из главных факторов производства, есть пусковой механизм ее кровеносной системы. Вопросы предложения и спроса на рабочую силу в условиях рыночной экономики никогда не теряют своей актуальности. Определенные во времени динамические процессы любой сложной системы поддаются математическому моделированию с использованием аппарата дифференциальных уравнений. Наличие инструментов управления кадровой конъюнктурой рынка труда дает возможность подбора наиболее квалифицированного персонала.

В [1] предлагалась математическая модель конъюнктуры рынка труда для предприятия, состоящего из одного подразделения. Модель представляет собой двумерную систему нелинейных дифференциальных уравнений, для которой нашелся прием, позволяющий проинтегрировать ее в квадратурах [2]. Каждый тип систем нелинейных дифференциальных уравнений, который возможно свести к интегрированию в квадратурах, представляет научный интерес. В подавляющем большинстве случаев приходится применять приближенные и численные методы, поскольку не существует универсального алгоритма решения нелинейных дифференциальных уравнений в общем виде.

Целью настоящего исследования является разработка модели управления конъюнктурой рынка труда предприятия, состоящего из нескольких структурных подразделений. Модель будет исследована путем нахождения точного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Система, приведенная в [2], обобщается до $2q$-мерной, далее доказывается, что к ней применим аналогичный прием, вследствие чего становится возможным точное аналитическое решение $2q$-мерного обобщения математической модели конъюнктуры рынка труда, также упомянутой в [1, 2] для частного случая, когда коэффициент подготовки кадров одинаков для каждого подразделения предприятия.

Предлагаемая модель дает возможность выявить особенности распределения кадров среди подразделений промышленного предприятия на рынке труда, а также спрогнозировать потенциальное изменение конъюнктуры и, как следствие, оказать помощь представителям кадровых служб в принятии рациональных управленческих решений.

1. Математическая модель конъюнктуры рынка труда предприятия, состоящего из нескольких подразделений

1.1. Постановка задачи

Согласно предложенной в [1] концепции, субъекты рынка труда делятся на три квалификационных категории: специалисты высокой категории, в которых работодатель заинтересован в первую очередь; специалисты средней категории, потенциально имеющие возможность получить высокую категорию в данной области, но без гарантии реализации этой возможности; специалисты низкой категории, в которых работодатель не заинтересован.

Предлагаемое в настоящем исследовании обобщение модели из [1, 2] имеет вид $3q$-мерной системы дифференциальных уравнений ($q \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases}
\dot{\alpha}_1(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + k_1\beta_1(t)\right), \\
\dots \\
\dot{\alpha}_q(t) = \dfrac{A - M\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i(t)}{N}\left(\gamma_q(t) + k_q\beta_q(t)\right); \\
\\
\dot{\beta}_1(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{q}\beta_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + k_1\beta_1(t)\right) - k_1\beta_1(t), \\
\dots \\
\dot{\beta}_q(t) = \dfrac{B - M\sum\limits_{i=1}^{q}\beta_i(t)}{N}\left(\gamma_q(t) + k_q\beta_q(t)\right) - k_q\beta_q(t); \\
\\
\dot{\gamma}_1(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{q}\gamma_i(t)}{N}\left(\gamma_1(t) + k_1\beta_1(t)\right) - \gamma_1(t), \\
\dots \\
\dot{\gamma}_q(t) = \dfrac{G - M\sum\limits_{i=1}^{q}\gamma_i(t)}{N}\left(\gamma_q(t) + k_q\beta_q(t)\right) - \gamma_q(t),
\end{cases} \tag{1}$$

где A – общее число специалистов высокой категории на рынке труда; B – общее число специалистов средней категории на рынке труда; G – общее число специалистов низкой категории на рынке труда; M – общее число рабочих мест на предприятии; N – общее число безработных на рынке труда; q – количество подразделений предприятия; k_i – коэффициент подготовки кадров [1]. Далее $\alpha_i(t)$ – доля специалистов высокой категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\beta_i(t)$ – доля специалистов средней категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда; $\gamma_i(t)$ – доля специалистов низкой категории i-го подразделения среди всех трудоустроенных субъектов рынка труда. Отметим, что $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t), \gamma_i(t)$ – неизвестные функции, тогда как A, B, G, M, N, q, k_i – целые положительные константы, причем $k_i \in (0;1)$.

По определению функций $\alpha_i(t),\ \beta_i(t),\ \gamma_i(t)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i(t) + \sum_{i=1}^{q} \beta_i(t) + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i(t) \equiv 1.$$

Уравнения системы (1) для $\beta_i(t), \gamma_i(t)$ не содержат $\alpha_i(t),$ значит, их можно рассматривать как самостоятельную систему относительно двух неизвестных функций $\beta_i(t), \gamma_i(t).$ Для компактности записи обозначим $M/N = m,\ \ B/N = b,\ \ G/N = g$ и введем новые переменные $m\beta_i = x_i$, $m\gamma_i = y_i$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (b - \sigma_x)(y_1 + k_1 x_1) - k_1 x_1, \\ \dot{y}_1 = (g - \sigma_y)(y_1 + k_1 x_1) - y_1, \\ \ldots, \\ \dot{x}_q = (b - \sigma_x)(y_q + k_q x_q) - k_q x_q, \\ \dot{y}_q = (g - \sigma_y)(y_q + k_q x_q) - y_q, \end{cases} \qquad (2)$$

где b, g, k_p – наперед заданные константы, $\sigma_x = \sum_{i=1}^{q} x_i$; $\sigma_y = \sum_{i=1}^{q} y_i$.

Напомним, что коэффициент подготовки кадров k_i – доля специалистов средней категории i-го подразделения, которые в каждый момент времени будут уволены. Примем упрощающую, но вполне допустимую гипотезу: пусть $k_1 = k_2 = ... = \hat{k}$. Тогда система (1) путем почленного сложения сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_x = (b - \sigma_x)(\sigma_y + \hat{k}\sigma_x) - \hat{k}\sigma_x, \\ \dot{\sigma}_y = (g - \sigma_y)(\sigma_y + \hat{k}\sigma_x) - \sigma_y. \end{cases} \quad (3)$$

Эта система интегрируется в квадратурах, как показано в [1, 2]. Пользуясь приемом $\zeta = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$, имеем

$$\dot{\zeta} = -\hat{k}g\zeta^2 + (1 + \hat{k}b - \hat{k} - g)\zeta + b. \quad (4)$$

Корнями уравнения $-\hat{k}g\zeta^2 + (1 + \hat{k}b - \hat{k} - g)\zeta + b = 0$ являются следующие вещественные константы:

$$\zeta_1 = \frac{1 - \hat{k} + \hat{k}b - g - \sqrt{D}}{2\hat{k}g}, \ \zeta_2 = \frac{1 - \hat{k} + \hat{k}b - g + \sqrt{D}}{2\hat{k}g},$$

где $D = (1 - \hat{k} + \hat{k}b - g)^2 + 4\hat{k}gb.$ Отметим, что по физическому смыслу каждой из констант $D > 0.$

Согласно [1, 2], решением дифференциального уравнения (4) будет следующая функция:

$$\zeta(t) = \frac{C_\zeta \zeta_2 - \zeta_1 e^{-\hat{k}g(\zeta_2 - \zeta_1)t}}{C_\zeta - e^{-\hat{k}g(\zeta_2 - \zeta_1)t}}, C_\zeta \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где ζ_1, ζ_2 – корни уравнения $-\hat{k}g\zeta^2 + (1 + \hat{k}b - \hat{k} - g)\zeta + b = 0,$ а $C_\zeta = \dfrac{\zeta_0 - \zeta_1}{\zeta_0 - \zeta_2}.$

Ход дальнейшего исследования описан в [1]. Искомые функции имеют вид:

$$\sigma_y(t) = \frac{u(t)\sigma_y(0)}{\sigma_y(0)\int_0^t u(s)(1 + \hat{k}\zeta(s))ds + 1}; \ \sigma_x(t) = \frac{u(t)\zeta(t)\sigma_y(0)}{\sigma_y(0)\int_0^t u(s)(1 + \hat{k}\zeta(s))ds + 1}, \quad (6)$$

где $u(t) = e^{(g-1) + \hat{k}g\int_0^t \zeta(s)ds}$.

1.2. Точки равновесия для предприятия

Наиболее интересной и сложной задачей является изучение асимптотического поведения решения. Очевидно, что решение, построенное на конечном отрезке, не дает надежной информации о поведении решения при неограниченном увеличении аргумента. Исследование асимптотики решения возможно только методами качественной теории.

Начнем исследование асимптотического поведения решения системы (2) с определения ее точек равновесия [3, 4]. Эти константы являются решением следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (b-\sigma_x)(\sigma_y+\hat{k}\sigma_x)-\hat{k}\sigma_x=0, \\ (g-\sigma_y)(\sigma_y+\hat{k}\sigma_x)-\sigma_y=0. \end{cases} \tag{7}$$

Отметим, что система (5) имеет очевидное тривиальное положение равновесия: $\sigma_x{}^*=0$, $\sigma_y{}^*=0$. Далее считаем, что $\sigma_y{}^*\neq 0$. Домножим первое уравнение системы (7) на σ_y, второе на σ_x, вычтем из первого уравнения второе и разделим обе части полученного равенства на $\sigma_y{}^2$. Получим квадратное уравнение

$$-kg\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2+(1-k+kb-g)\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)+b=0,$$

которое с точностью до обозначения $\zeta=\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ совпадает с квадратным трехчленом (4). Вид корней ζ_1, ζ_2 уравнения (4) и их свойства описаны выше. Таким образом, $\sigma_x{}^*=\zeta_i\sigma_y{}^*$, где $i=1,2$.

Подставляя найденные соотношения в первое уравнение системы (7), получаем еще две точки равновесия: $\sigma_{y_i}{}^*=\dfrac{kg\zeta_i+(g-1)}{1+k\zeta_i}$, $\sigma_{x_i}{}^*=\dfrac{kg\zeta_i{}^2+(g-1)\zeta_i}{1+k\zeta_i}$, где $i=1,2$.

Таким образом, система (7) имеет три (и только три) точки равновесия:

• $\sigma_x{}^* = 0,\ \sigma_y{}^* = 0$;

• $\sigma_{x_1}{}^* = \dfrac{kg\zeta_1{}^2 + (g-1)\zeta_1}{1+k\zeta_1},\ \sigma_{y_1}{}^* = \dfrac{kg\zeta_1 + (g-1)}{1+k\zeta_1}$;

• $\sigma_{x_2}{}^* = \dfrac{kg\zeta_2{}^2 + (g-1)\zeta_2}{1+k\zeta_2},\ \sigma_{y_2}{}^* = \dfrac{kg\zeta_2 + (g-1)}{1+k\zeta_2}$.

Из положительности обеих функций следует положительность их пределов, при наличии оных. Значит, точка равновесия $(\sigma_{x_1}{}^*;\sigma_{y_1}{}^*)$ не может быть достигнута, так как в силу $\zeta_1 < 0$ одна из координат будет отрицательной, что противоречит физическому смыслу. Что касается точки равновесия $(\sigma_{x_2}{}^*;\sigma_{y_2}{}^*)$, каждая из ее координат является пределом соответствующей функции при $t \to \infty$.

2. Исследование одного подразделения

2.1. Аналитическое решение системы для одного подразделения

Вернемся к системе (2). Представим ее в виде ($p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (b-\sigma_x)(y_1 + \hat{k}x_1) - \hat{k}x_1, \\ \dot{y}_1 = (g-\sigma_y)(y_1 + \hat{k}x_1) - y_1, \\ \dots, \\ \dot{x}_{p-1} = (b-\sigma_x)(y_{p-1} + \hat{k}x_{p-1}) - \hat{k}x_{p-1}, \\ \dot{y}_{p-1} = (g-\sigma_y)(y_{p-1} + \hat{k}x_{p-1}) - y_{p-1}, \\ \dot{x}_p = (b-\sigma_x)(y_p + \hat{k}x_p) - \hat{k}x_p, \\ \dot{y}_p = (g-\sigma_y)(y_p + \hat{k}x_p) - y_p, \\ \dots, \\ \dot{x}_q = (b-\sigma_x)(y_q + \hat{k}x_q) - \hat{k}x_q, \\ \dot{y}_q = (g-\sigma_y)(y_q + \hat{k}x_q) - y_q. \end{cases} \tag{8}$$

В системе (8) начальные значения неизвестных функций $x_1, ..., x_{p-1}; y_1, ..., y_{p-1}$ связаны соотношением

$$\frac{x_1(0)}{y_1(0)} = \ldots = \frac{x_{p-1}(0)}{y_{p-1}(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{p-1} x_i(0)}{\sum_{i=1}^{p-1} y_i(0)}.$$

Отсюда следует, что $\frac{x_1}{y_1} = \ldots = \frac{x_{p-1}}{y_{p-1}} = \zeta$ и исследование подсистемы с 1-го по (p – 1)-е уравнение системы (8) сводится к исследованию системы (3). Таким образом, объектом нашего дальнейшего исследования становится подсистема следующего вида $(p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N})$:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = (b - \sigma_x)(y_p + \hat{k}x_p) - \hat{k}x_p, \\ \dot{y}_p = (g - \sigma_y)(y_p + \hat{k}x_p) - y_p, \\ \ldots, \\ \dot{x}_q = (b - \sigma_x)(y_q + \hat{k}x_q) - \hat{k}x_q, \\ \dot{y}_q = (g - \sigma_y)(y_q + \hat{k}x_q) - y_q, \end{cases} \tag{9}$$

где $\frac{x_p(0)}{y_p(0)} \neq \frac{\sum_{i=p}^{q} x_i(0)}{\sum_{i=p}^{q} y_i(0)}$.

Рассмотрим p-е подразделение:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = (b - \sigma_x)(y_p + \hat{k}x_p) - \hat{k}x_p, \\ \dot{y}_p = (g - \sigma_y)(y_p + \hat{k}x_p) - y_p. \end{cases} \tag{10}$$

Применим аналогичный прием. Пусть $z_p = \frac{x_p}{y_p}$, тогда

$$\dot{z}_p = \hat{k}(\sigma_y - g){z_p}^2 + (1 + \hat{k}b - \hat{k} - g - \hat{k}\sigma_x + \sigma_y)z_p + b - \sigma_x. \tag{11}$$

Имеем уравнение Риккати, которое, как известно, не решается в общем виде [5, 6]. Однако обратим внимание, что $z_p = \zeta(t)$ – частное решение уравнения (11). Поскольку нам известно частное решение уравнения Риккати (11), его можно свести к уравнению в разделяющихся переменных [5].

Подставим частное решение $z_{p1} = \zeta(t) + \dfrac{1}{\xi_p(t)}$ при начальных условиях $\dfrac{x_p(0)}{y_p(0)} = \zeta(0) + \dfrac{1}{\xi_p(0)}$, тогда $\dot{\xi}_p = -(1 + \hat{k}b - \hat{k} - g + \hat{k}\sigma_x + {}$ ${} + \sigma_y + 2\hat{k}g\zeta)\xi_p + \hat{k}(g - \sigma_y)$.

Это уравнение в разделяющихся переменных. Его решением будет следующая функция:

$$\begin{gathered}\xi_p = \xi_p(0) e^{-\int_0^t (1+\hat{k}b-\hat{k}-g+\hat{k}\sigma_x(s)+\sigma_y(s)+2\hat{k}g\zeta)ds} + \\ + \hat{k}\int_0^t (g - \sigma_y(s)) e^{-\int_s^t (1+\hat{k}b-\hat{k}-g+\hat{k}\sigma_x(\tau)+\sigma_y(\tau)+2\hat{k}g\zeta)d\tau} ds.\end{gathered} \tag{12}$$

Обозначим для удобства: пусть $e^{-\int_0^t (1+\hat{k}b-\hat{k}-g+\hat{k}\sigma_x(s)+\sigma_y(s)+2\hat{k}g\zeta)ds} = Z(t)$. Тогда

$$\xi_p = \xi_p(0) Z(t) + \hat{k}\int_0^t Z(t) Z^{-1}(s)(g - \sigma_y(s))ds$$

при следующих начальных условиях: $Z(0) = Z^{-1}(0) = 1$, $\xi_p(0) = \dfrac{1}{\dfrac{\sigma_x(0)}{\sigma_y(0)} - \dfrac{x_p(0)}{y_p(0)}}$.

Отсюда

$$z_p = \zeta(t) + \frac{1}{\xi_p(0) Z(t) + \hat{k}\int_0^t Z(t) Z^{-1}(s)(g - \sigma_y(s))ds}, \tag{13}$$

В силу того что $\lim\limits_{t\to\infty}(1+\hat{k}b-\hat{k}-g+\hat{k}\sigma_x+\sigma_y+2\hat{k}g\zeta)=$ $=\hat{k}(b-1)-2\hat{k}g\zeta_2<0,$ очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\xi_p}=0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}z_p(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=\zeta_2$.

Вернемся к системе (10). Если $x_p(0)>0, y_p(0)>0$, то $x_p=z_p y_p$, где функция z_p определяется равенством (13). Второе уравнение системы (10) принимает вид

$$\dot{y}_p=(g-\sigma_y)(y_p+\hat{k}z_p y_p)-y_p$$

и является уравнением в разделяющихся переменных [5]

$$\dot{y}_p=((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)y_p.$$

Откуда

$$y_p=y_p(0)e^{\int_0^t((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)ds},\ x_p=z_p y_p(0)e^{\int_0^t((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)ds}. \qquad (14)$$

Таким образом, система (10) имеет следующие решения:

– если $x_p(0)=y_p(0)=0,$ то $x_p(t)=y_p(t)\equiv 0,$

– иначе $y_p(t)=y_p(0)e^{\int_0^t((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)ds}$, $x_p(t)=z_p y_p(0)e^{\int_0^t((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)ds}$.

2.2. Точки равновесия для одного подразделения

Исследуем асимптотику функций (14). Представим показатель экспоненты в виде следующей суммы:

$$\int_0^t((g-\sigma_y)(1+\hat{k}z_p)-1)ds=$$

$$=\int_0^t(\hat{k}g\zeta+g-1)ds-\int_0^t\sigma_y(\hat{k}\zeta+1)ds+\int_0^t\frac{\hat{k}(g-\sigma_y)}{\xi_p}ds. \qquad (15)$$

Как видим, первое слагаемое представляет собой показатель функции $u(t)$ из (6). Исследуем второе слагаемое.

$$\int_0^t \sigma_y(\hat{k}\zeta(s)+1)ds = \int_0^t \frac{u(s)\sigma_y(0)(1+\hat{k}\zeta(s))}{1+\sigma_y(0)\int_0^s u(\tau)(1+\hat{k}\zeta(s))d\tau} ds =$$

$$= \ln(1+\sigma_y(0)\int_0^t (1+\hat{k}\zeta(s))u(s)ds).$$

Отсюда следует, что

$$y_p(t) = \frac{y_p(0)u(t)e^{\int_0^t \frac{\hat{k}(g-\sigma_y)}{\xi_p}ds}}{1+\sigma_y(0)\int_0^t u(s)(1+\hat{k}\zeta(s))ds} = \frac{y_p(0)}{\sigma_y(0)}\sigma_y(t)e^{\int_0^t \frac{\hat{k}(g-\sigma_y)}{\xi_p}ds}. \qquad (16)$$

Вернемся к (15) и исследуем третье слагаемое.

$$\int_0^t \frac{\hat{k}(g-\sigma_y)}{\xi_p} ds = \int_0^t \frac{\hat{k}(g-\sigma_y)Z^{-1}(s)ds}{\xi_p(0)+\int_0^s \hat{k}(g-\sigma_y)Z^{-1}(\tau)d\tau} =$$

$$= \ln(\xi_p(0)+\int_0^s \hat{k}(g-\sigma_y)Z^{-1}(\tau)d\tau) - \ln(\xi_p(0)).$$

Таким образом, функция (16) примет следующий вид:

$$y_p(t) = \frac{y_p(0)}{\sigma_y(0)}\sigma_y(t)\left(1+\frac{\int_0^t \hat{k}(g-\sigma_y)Z^{-1}(s)ds}{\xi_p(0)}\right).$$

Как уже отмечалось выше, $\lim_{t\to\infty}(1+\hat{k}b-\hat{k}-g+\hat{k}\sigma_x+\sigma_y+2\hat{k}g\zeta) =$ $=\hat{k}(b-1)-2\hat{k}g\zeta_2 < 0,$ следовательно, интеграл $\int_0^t \hat{k}(g-\sigma_y)Z^{-1}(s)ds$ сходится.

Обозначим $I(t)=\int\limits_0^t \hat{k}(g-\sigma_y(s))Z^{-1}(s)ds, \quad I=\int\limits_0^\infty \hat{k}(g-\sigma_y(t))Z^{-1}(t)dt.$

Легко увидеть, что I – несобственный сходящийся интеграл [3–6]. Функция (16) примет вид

$$y_p(t)=\frac{y_p(0)}{\sigma_y(0)}\sigma_y(t)\left(1+\frac{I(t)}{\xi_p(0)}\right).$$

Отсюда легко находится предел функций (14) при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y_p(t)=\frac{y_p(0)}{\sigma_y(0)}\left(1+\frac{I}{\xi_p(0)}\right)\sigma_{y_2}{}^*, \quad \lim_{t\to\infty} x_p(t)=\frac{y_p(0)}{\sigma_y(0)}\left(1+\frac{I}{\xi_p(0)}\right)\sigma_{x_2}{}^*,$$

где $(\sigma_{x_2}{}^*;\sigma_{y_2}{}^*)$ – нетривиальная точка равновесия системы (7), не противоречащая ее физическому смыслу.

Заключение

В работе был изучен тип систем нелинейных дифференциальных уравнений, поддающийся преобразованиям, приводящим к системе, интегрируемой в квадратурах. На ее примере рассмотрена модель конъюнктуры рынка труда для частного случая, когда коэффициент подготовки кадров одинаков на всех предприятиях. Работа дает исчерпывающую информацию о $2q$-мерном обобщении математической модели конъюнктуры рынка труда, упомянутой в [1, 2] для обозначенного ее частного случая.

Модель позволяет прогнозировать распределение кадров, спрос и предложение на рабочую силу в отдельно взятой отрасли, а также управлять конъюнктурой путем подстановки различных начальных условий. Она пригодна как для исследования рынка труда предприятия, состоящего из нескольких подразделений, так и для исследования рынка труда, представленного несколькими конкурирующими источниками спроса на труд. В дальнейшем возможен анализ общего случая данной модели, где для каждого подразделения предприятия установлен свой коэффициент подготовки кадров k_i с сохранением принятых концептуальных гипотез.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики Пермского национального исследовательского политехнического университета Малыгиной Вере Владимировне за помощь в оформлении математической части исследования модели.

Список литературы

1. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. – 2018. – Т. 13, № 3. – С. 357–371. DOI: 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371

2. Горбунов Д.Л. Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемой в квадратурах // Прикладная математика и вопросы управления. – 2018. – № 2. – С. 30–39. DOI: 10.15593/2499-9873/2018.2.02

3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 480 с.

4. Markus L. Quadratic differential equations and nonassociative algebras. – Princeton, 1960. – 413 p.

5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука: Физматлит, 1998. – 403 с.

6. Ньюком Р.У. Системы нелинейных дифференциальных уравнений. Канонические многомерные представления // ТИИЭР. – 1977. – Т. 65, № 6. – С. 138–145.

References

1. Gorbunov D.L. Modeling of a closed mono-branch labor market conditions. Perm. University Herald.Economy, 2018, vol. 13, no.3. pp. 357 – 371. doi: 10.17072/1994-9960-2018-3-357-371

2. Gorbunov D.L. Ob odnoj sisteme nelinejnyh differencialnyh uravnenij, integriruemoj v kvadraturah [On a system of nonlinear differential equations integrable in quadratures]. Applied Mathematics and Control Sciences, 2018, no. 2, pp. 30-39, DOI: 10.15593/2499-9873/2018.2.02

3. Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1998, 480 p.

4. Markus L. Quadratic differential equations and nonassociative algebras, Princeton, 1960, 413 p.

5. Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Differencialnye uravnenija [Differential equations]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1998, 403 p.

6. Njukom R.U. Sistemy nelinejnyh differencialnyh uravnenij. Kanonicheskie mnogomernye predstavlenija. *TIIJeR*, 1977, vol.65, no.6, pp. 138-145.

Получено 20.09.2019

Сведения об авторах

Горбунов Даниил Львович (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru).

Федосеев Сергей Анатольевич (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: fsa@gelicon.biz).

About the authors

Daniil L. Gorbunov (Perm, Russian Federation) – Ph.D. Student, Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru).

Sergey A. Fedoseev (Perm, Russian Federation) – Dr. Habil. in Engineering, Professor, Department of Computational Mathematics, Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, e-mail: fsa@gelicon.biz).