DOI: 10.15593/2499-9873/2019.4.08
УДК 517.929:517.983:330.4

В.П. Максимов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия

ДОСТИЖИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Исследуется задача об описании множества значений целевых функционалов, достижимых в задаче управления для динамической экономико-математической модели при наличии ограничений на управляющие воздействия. Целевые функционалы задаются в общей форме, охватывающей широко распространенные конкретные виды функционалов. Динамика системы управления описывается совокупностью уравнений, связывающих фазовые переменные, одна часть которых зависит от непрерывного времени, вторая – от дискретного. Рассматриваемая модель позволяет учитывать эффекты последействия. Предлагаются конструкции и алгоритмы построения внешних полиэдральных оценок для множества достижимых значений целевых функционалов.

Ключевые слова: экономико-математические модели, задачи управления, гибридные системы с последействием, целевой функционал, множества достижимости.

V.P. Maksimov

Perm State University, Perm, Russian Federation

ATTAINABLE VALUES OF ON-TARGET FUNCTIONALS IN ECONOMIC DYNAMICS PROBLEMS

The problem of description of attainability sets is considered as applied to a control problem for an economic mathematical model with respect to a family of on-target functionals under some constraints according to control actions. The functionals are given in a general form covering a great many widely used cases. Dynamics of the system under control is governed by equations connecting state variables of continuous and discrete times with taking into account aftereffects. Some constructions and algorithms are proposed which allow to obtain external polyhedral estimates of the attainability sets.

Keywords: economic mathematical models, control problems, hybrid systems with aftereffect, on-target functional, attainability sets.

Введение

В прикладных задачах управления при заданных (предписанных) значениях целевых показателей ключевую роль играют ограничения на управляющие воздействия. От жесткости этих ограничений зависит разрешимость задачи, т.е. существование такого допустимого управления, реализация которого приводит к траектории, на которой достигаются целевые значения. Описание множества целевых значений, для которых задача управления оказывается разрешимой, является одной из центральных проблем во многих разделах теории управления (см., например, [1–5]), включая вопросы структуры множества достижимости для различных классов ограничений на управление [6, 7], их асимптотических [8] и статистических характеристик [9, 10]. При этом, как правило, достижимость понимается по отношению к значениям координат фазового вектора. В задачах управления для экономических систем весьма распространено задание показателей в более широком смысле: в качестве целевых показателей используются, например, линейные комбинации значений фазовых переменных в заданные моменты времени, интегральные характеристики траектории и др.

В настоящей работе для задания целевых показателей используются линейные функционалы общего вида, охватывающие упомянутые случаи и их естественные обобщения. Динамика системы управления описывается совокупностью дифференциальных уравнений с запаздыванием и разностных уравнений с дискретным аргументом. Такое описание оказывается актуальным для процессов экономической динамики, сочетающих взаимодействие переменных, имеющих различный характер изменения: непрерывный (непрерывное производство) и дискретный (финансирование). В центре внимания находятся внешние оценки множества достижимых значений показателей, а также соответствующие конструкции и алгоритмы. Излагаемые результаты основаны на использовании положений общей теории функционально-дифференциальных уравнений [11] в части условий разрешимости и представления решений, а также на результатах недавних работ [12–14].

1. Описание модели

Мы рассматриваем экономико-математическую модель взаимодействия производственной подсистемы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i:\, t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i:\, t_i < t} B_i(t)z(t_i) +$$

$$+\int_0^t F(t,s)u(s)\,ds + f(t),\ t \in [0,T], \qquad (1)$$

и финансовой подсистемы, описываемой уравнением

$$z(t_i) = \sum_{j<i} D_j\, x(t_j) + \sum_{j<i} H_j z(t_j) + \int_0^{t_i} G_i(s) v(s)\, ds + g(t_i),\ i = 1,\dots,\mu. \quad (2)$$

Для определенности будем считать, что в (1) $x = \mathrm{col}(x_1,\dots,x_n)$ – показатели функционирования многопродуктовой производственной системы, которые изменяются в непрерывном времени $t \in [0,T]$. На скорость их изменения влияют отчисления на производственное накопление в фиксированные моменты времени $t_i, i = 0,\dots,\mu,$ $t_i > t_{i-1},\ t_0 = 0,\ t_\mu = T,$ с заданной эффективностью их использования, характеризуемой соответствующими коэффициентами – элементами матрицы $A_i(t)$. Кроме того, используются инвестиции $z(t_i)$, $z = \mathrm{col}(z_1,\dots,z_\nu),$ динамика которых определяется уравнением (2).

Интегральное слагаемое в уравнении (1) моделирует прямое управляющее воздействие на динамику показателей $x(t)$ с применением распределенного управления $u(t),\ u:[0,T] \to R^{r_1}$, эффективность использования которого описывается ядром $F(t,s)$. В правую часть уравнения (2) входят предшествующие значения инвестиций: $z(t_j),\ j<i,$ предыдущие производственные накопления $x(t_j),\ j<i,$ и управляющее воздействие $v(t),\ v:[0,T] \to R^{r_2}$,– плотность финансового потока. При этом интегральное слагаемое характеризует накопленные к текущему моменту времени финансовые ресурсы. Эффективность использования упомянутых факторов характеризуется соответствующими матричными коэффициентами (H_j, D_j, G_i). Функции $f(t)$ и $g(t_i)$ можно интерпретировать как внешние воздействия на систему различной природы, например непредвиденные потери или возможные погрешности моделирования. Отметим, что специфический характер запаздывания компоненты $x(\cdot)$ с непрерывным временем (кусочно-постоянный аргумент) распространен в динамических моделях макроэкономики [15].

Начальное состояние системы (1), (2) считается заданным:

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta. \quad (3)$$

Для задания цели управления будем использовать определенный на компонентах $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ вектор-функционал ℓ:

$$\ell(x,z) = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \sum_{i=0}^{\mu} \Gamma_i z(t_i), \tag{4}$$

где постоянные $(N \times n)$-матрица Ψ и $(N \times \nu)$-матрицы $\Gamma_i, i = 1,...,\mu,$ и $(N \times n)$-матрица $\Phi(s)$ с измеримыми и ограниченными элементами считаются заданными. Общая форма (4) вектор-функционала ℓ со значениями в R^N позволяет охватить разнообразные конкретные случаи целевых условий, возникающих в прикладных задачах. С помощью вектор-функционала ℓ цель управления системой (1)–(2) задается равенством

$$\ell(x,z) = \beta,\ \beta \in R^N, \tag{5}$$

где β – заданный вектор целевых значений.

Приведем несколько примеров.

1. Если целью управления является достижение заданных значений в конечный момент времени по обеим векторным компонентам: $x(T) = \beta_1,\ z(T) = \beta_2,$ где $\beta_1 \in R^n, \beta_2 \in R^\nu$ – заданные значения, то в (4) имеем

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix},\quad \Phi(s) = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix},\quad \Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\nu \end{pmatrix},\quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ i \neq \mu,$$

где E_n – единичная $(n \times n)$-матрица.

2. В случае когда целевыми значениями являются интегральные показатели компоненты x и суммарные показатели компоненты z: $\int_0^T x(t)\,dt = \beta_1,\quad \sum_{i=0}^{\mu} z(t_i) = \beta_2,$ соответствующие матрицы в представлении целевого вектор-функционала имеют вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} T \cdot E_n \\ 0 \end{pmatrix},\quad \Phi(s) = \begin{pmatrix} (T-s) \cdot E_n \\ 0 \end{pmatrix},\quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\nu \end{pmatrix}, i = 0,1,...,\mu.$$

3. Пусть целевые условия заданы в виде

$$\int_0^T e^{-\lambda_1 t} \cdot F_1 \cdot x(t)\,dt + \sum\nolimits_{i=0}^{\mu} e^{-\lambda_2 t_i} \cdot F_2 \cdot z(t_i) = \beta,$$

где $\beta \in R^N$, F_1 и F_2 – заданные матрицы размерности $N \times n$ и $N \times \nu$ соответственно.

Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\lambda_1}[1 - e^{-\lambda_1 T}] \cdot F_1, \quad \Phi(s) = \frac{1}{\lambda_1}[e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_1 T}] \cdot F_1,$$

$$\Gamma_i = e^{-\lambda_2 t_i} \cdot F_2,\ i = 0,1,\ldots,\mu.$$

Задача достижения целей (5) решается в предположении, что управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ стеснены ограничениями

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \le \gamma,\ \gamma \in R^{N_1},\ t \in [0,T], \tag{6}$$

где Λ – заданная матрица размерности $N_1 \times (r_1 + r_2)$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{V} \subset R^{r_1 + r_2}$ решений системы линейных неравенств $\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \le \gamma$ непусто и ограничено.

2. Сведение к проблеме моментов

Воспользуемся представлением решений непрерывной и дискретной подсистем (см. [12, 16]). Для дискретной подсистемы (2) имеем

$$z(t_i) = Z(t_i) \cdot \delta + \sum_{j=1}^{i} C_2(i,j)\{\sum_{k<j} D_k x(t_k) +$$

$$+ \int_0^{t_j} G_j(s) v(s)\,ds + g(t_j)\},\ i = 1,\ldots,\mu, \tag{7}$$

где $Z(\cdot)$ – фундаментальная матрица однородной подсистемы (2), $C_2(\cdot,\cdot)$ – матрица Коши подсистемы с дискретным временем.

Подставим правую часть этого равенства в подсистему с непрерывным временем (1):

$$\dot{x}(t)=\sum_{i:t_i<t}A_i(t)x(t_i)+\sum_{i:\,t_i\,<\,t}B_i(t)[Z(t_i)\cdot\delta+\sum_{j=1}^{i}C_2(i,j)\{\sum_{k<j}D_k x(t_k)+$$

$$+\int_0^{t_j}G_j(s)v(s)\,ds+g(t_j)\}]+\int_0^{t}F(t,s)u(s)\,ds+f(t),\ t\in[0,T]. \tag{8}$$

Система (8) не содержит компоненты $z(\cdot)$ с дискретным временем и представляет собой специальный случай функционально-дифференциальной системы управления относительно компоненты $x(\cdot)$ с непрерывным временем. Запишем ее в виде

$$\dot{x}(t)=(\mathcal{T}\,x)(t)+[\int_0^{t}F(t,s)u(s)\,ds+\sum_{i:\,t_i\,<\,t}B_i(t)\sum_{j=1}^{i}C_2(i,j)\int_0^{t_j}G_j(s)v(s)\,ds]+$$

$$+[\sum_{i:\,t_i\,<\,t}B_i(t)(Z(t_i)\cdot\delta+g(t_i))+f(t)],\ t\in[0,T], \tag{9}$$

где оператор $\mathcal{T}$ определен равенством

$$(\mathcal{T}\,x)(t)=\sum_{i:t_i<t}A_i(t)x(t_i)+\sum_{i:\,t_i\,<\,t}B_i(t)[\sum_{j=1}^{i}C_2(i,j)\sum_{k<j}D_k x(t_k)].$$

Меняя порядок суммирования во втором слагаемом правой части и приводя подобные для оператора $\mathcal{T}$, можно получить представление

$$(\mathcal{T}\,x)(t)=\sum_{i:t_i<t}\mathcal{A}_i(t)x(t_i).$$

Используя фундаментальную матрицу $X(\cdot)$ и матрицу Коши $C(\cdot,\cdot)$ функционально-дифференциального оператора $(\mathcal{L}x)(t)=$ $=\dot{x}(t)-(\mathcal{T}x)(t)$, запишем решение системы в виде

$$x(t)=X(t)\alpha+\int_0^{t}C(t,s)\int_0^{s}[F\,(s,\tau)u(\tau)+$$

$$+F_1(s,\tau)v(\tau)]\,d\tau ds+q(t),\ t\in[0,T], \tag{10}$$

где ядро $F_1(s,\tau)$ и функция $q(t)$ определяются в результате элементарных преобразований.

Представления (10) и (7) позволяют записать целевые условия (5) в терминах управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$:

$$\int_0^T M(s)\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \tilde{\beta},\ \tilde{\beta} \in R^N, \tag{11}$$

где $M(s)$ – моментная матрица размерности $N \times (r_1 + r_2)$.

Обозначим через $z(t) = \mathrm{col}(u(t), v(t))$ вектор управляющих воздействий. Таким образом, задача описания множества достижимых значений целевого вектор-функционала свелась к обобщенной проблеме моментов [17]:

$$\int_0^T M(s)z(s)\,ds = \tilde{\beta}, \quad \tilde{\beta} \in R^N, \quad z(t) \in \mathcal{V}, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Следуя теореме 7.1 [17, с. 269] и теореме 1 [12], определим для каждого $\lambda \in R^N$ функцию

$$y(t,\lambda) = \max(\lambda' \cdot M(t) \cdot z : z \in \mathcal{V}), \tag{13}$$

где $(\cdot)'$ – символ транспонирования. Зафиксируем для каждого $t \in [0,T]$ и каждого $\lambda \in R^N$ совокупность точек $\{\nu_1(t,\lambda),...,\nu_k(t,\lambda)\}$ множества $\mathcal{V}$, доставляющих значение $y(t,\lambda)$ функционалу $z \to \lambda' \cdot M(t) \cdot z$, и обозначим

$$z(t,\lambda) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \nu_j(t,\lambda).$$

В таком случае множество S достижимых значений вектора $\tilde{\beta} \in R^N$ состоит из тех и только тех точек $\rho \in R^N$, для которых неравенство

$$\lambda'\rho \le \int_0^T \lambda' M(t)\, z(t,\lambda)\, dt \tag{14}$$

выполняется для всех $\lambda \in R^N$.

Исходя из соотношений (13), (14), можно дать следующее описание алгоритма построения внешней оценки множества S:

1. Построение элементов моментной матрицы $M(t)$ на основе соотношений (7), (10).

2. Задание конечного набора $\lambda_1,...,\lambda_K$ векторов, определяющих при каждом $t \in [0,T]$ вместе с матрицей $M(t)$ градиент целевой функции в задаче (13).

3. Построение многогранника, определяемого системой линейных неравенств,

$$\lambda'_j \rho \ \le \int_0^T \lambda'_j \, M(t)\, z(t,\lambda_j)\, dt, \quad j = 1,...,K.$$

3. Иллюстрирующий пример

В качестве конкретного примера системы (1)–(2) рассмотрим гибридную систему

$$\dot{x}(t) = 0.5\sum_{i<t} x(i) + 0.3\sum_{i<t} z(i) + \int_0^t u(s)\, ds, \quad t \in [0,4],$$

$$z(i) = 0.4\sum_{j<i} x(j) + 0.2\sum_{j<i} z(j) + \int_0^i v(s)\, ds, i = 1,2,3,4.$$

Считая нулевым начальное состояние этой системы:

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0,$$

зададим целевой вектор-функционал равенствами

$$\int_0^4 x(t)\, dt = \beta_1, \quad z(4) = \beta_2.$$

Управления u и v стеснены следующими ограничениями:

$$0 \le u(t) \le 1;\ 0 \le v(t) \le 1;\ u(t) + v(t) \le 1;$$
$$v(t) \le u(t) + 1;\ u(t) \le v(t) + 1; \quad t \in [0,4].$$

В этом примере внешняя оценка (оценка сверху по включению) для множества достижимых значений показателей β_1, β_2 представлена на рисунке.

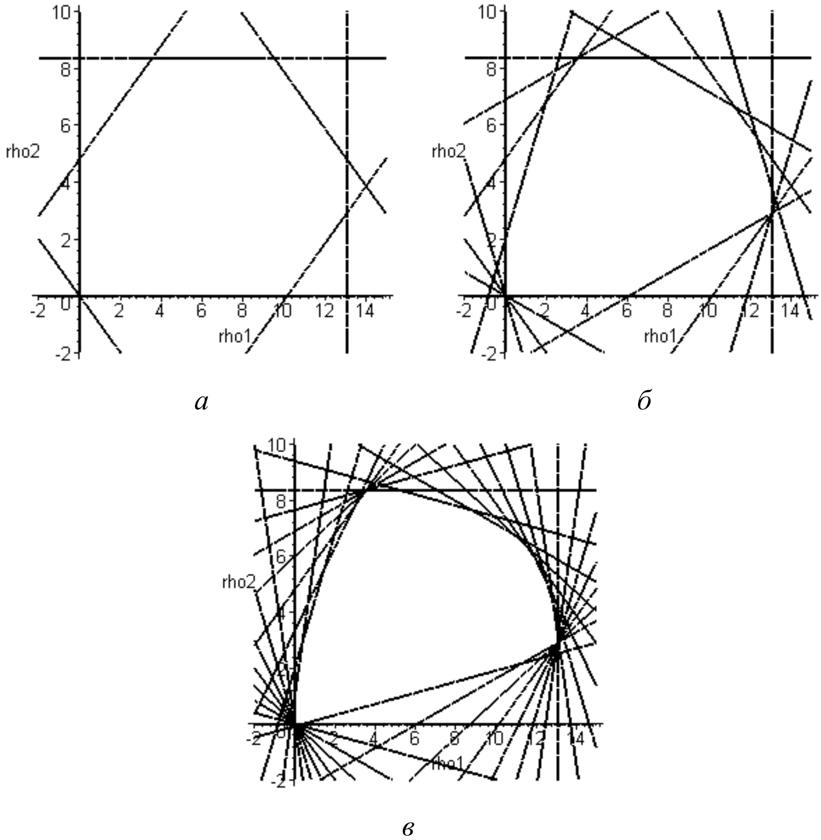

Рис. Внешняя оценка множества достижимости для различных случаев общего числа К направлений градиента: *а* – К = 8; *б* – К = 16; *в* – К = 32

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332).

Список литературы

1. Никольский М.С. Оценивание множества достижимости сверху по включению для некоторых нелинейных систем управления // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 163–170.

2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis // Optimization methods and software. – 2002. – Vol. 17. – P. 177–203.

3. Gurman V.I., Trushkova E.A. Estimates for attainability sets of control systems // Differential Equations. – 2009. – Vol. 45, no. 11. – P. 1636–1644.

4. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 4. – С. 195–210.

5. Digo G.B., Digo N.B. Approximation of domains of serviceability and attainability of control system on the basic of the inductive approach // Reliability: Theory & Applications. – 2011. – Vol. 6, no. 21. – P. 41–46.

6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A. Mathematical Analysis. Watam Press. – 2004. – Vol. 11, no. 2–3. – P. 255–267.

7. Пацко В.С., Федотов А.А. Структура множества достижимости для машины Дуббинса со строго односторонним поворотом // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 171–187.

8. Гусев М.С., Осипов И.О. Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 86–99.

9. Rodina L.I., Khammadi A.Kh. Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2014. – Vol. 58, no. 11. – P. 43–53.

10. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2013. – Vol. 57, no. 11. – P. 17–27.

11. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 384 с.

12. Maksimov V.P. On the ℓ-attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, no. 32. – P. 310–313.

13. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. – 2019. – Vol. 29, no. 1. – P. 40–51.

14. Максимов В.П. К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2019. – Т. 25, № 3. – С. 153–162.

15. Симонов П.М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Перм. ун-та. Сер. Экономика. – 2014. – № 1. – С. 14–27.

16. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. – 2012. – Vol. 19, no. 1–2. – P. 49–62.

17. Krein M.G., Nudel'man A.A. The Markov moment problem and extremal problems. – New York: AMS, 1977. – 417 p.

References

1. Nikolskii M.S. Otsenivanie mnozhestva dostizhimosti sverkhu po vklyucheniyu dlya nekotorykh nelineinykh system upravleniya [Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 163-170.

2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On ellipsoidal techniques for reachability analysis. *Optimization methods and software*, 2002, vol. 17, pp. 177-203.

3. Gurman V.I., Trushkova E.A., Estimates for attainability sets of control systems. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 11, pp. 1636-1644.

4. Kostousova E.K. O poliedral'nykh otsenkakh mnozhestv dostizhimosti differentsial'nykh system s bilineinoi neopredelennost'yu [On polyhedral estimates of attainability sets of differential systems with bilinear uncertainty]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 195-210.

5. Digo G.B., Digo N.B. Approximation of domains of serviceability and attainability of control system on the basic of the inductive approach. Reliability: Theory & Applications. 2011, vol. 6, no. 21, pp. 41-46.

6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A. Mathematical Analysis. Watam Press. 2004. vol. 11, no.2-3, pp. 255-267.

7. Patsko V.S., Fedotov A.A. Struktura mnozhestva dostizhimosti dlya mashiny Dubbinsa so strogo odnostoronnim povorotom [The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 171-187.

8. Gusev M.I., Osipov I.O. Asimptoticheskoe povedenie mnozhestv dostizhimosti na malykh vremennykh promezhutkakh [Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 86-99.

9. Rodina L.I., Khammadi A. Kh. Statistical characteristics of attainability set of controllable systems with random coefficients. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014, vol. 58, no. 11, pp. 43–53.

10. Rodina L.I. Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 17–27.

11. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya [Elements of the Modern Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications]. Moscow, *Institut kompjuternyh issledovanij*, 2002. 384 p.

12. Maksimov V.P. On the ℓ-attainability sets of continuous discrete functional differential systems. *IFAC PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 310-313.

13. Maksimov V.P. The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 40-51.

14. Maksimov V.P. K voprosu o postroenii i otsenkakh matritsy Koshi dlya system s posledeistviem [On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 153-162.

15. Simonov P.M. Ob odnom metode issledovaniya dinamcheskikh modelei ekonomiki [On a method of the study of macroeconomics dynamic models]. *Perm University Herald Ekonomy*, 2014, no. 1, pp. 14-27.

16. Chadov A.L., Maksimov V.P., Linear boundary value problems and control problems for a class functional differential equations with continuous and discrete times. *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49-62.

17. Krein M.G., Nudel'man A.A. The Markov moment problem and extremal problems. New York, AMS. 1977. 417 p.

Получено 29.10.2019

Сведения об авторе

Максимов Владимир Петрович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и математические методы в экономике», Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: maksimov@econ.psu.ru).

About the author

Vladimir P. Maksimov (Perm, Russian Federation) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (614990, Perm, Bukireva st., 15, e-mail: maksimov@econ.psu.ru).