DOI: 10.15593/2499-9873/2019.3.01
УДК 517.977.56

К.Б. Мансимов[1, 2], Ш.Ш. Сулейманова[1]

[1] Институт Систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика
[2] Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджанская Республика

КВАЗИОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ГУРСА – ДАРБУ

Изучается одна задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая системой Гурса – Дарбу. В предположении выпуклости области управления установлено необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума. Рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: квазиособые управления, линеаризованный принцип максимума, необходимые условия оптимальности, выпуклая область управления, необходимое условие.

K.B. Mansimov[1, 2], Sh.Sh. Suleimanova[1]

[1] Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic
[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic

QUASI SINGULAR CONTROL IN ONE WITH VARIABLE STRUCTURE OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBEDBY THE QOURSAT – DARBOUX SYSTEM

We study one optimal control problem with a variable structure described by the Goursat – Darboux system.

Under the assumption that the control region is convex, the necessary optimality condition is proved in the form of a linearized maximum condition. The case of degeneration of the linearized maximum condition is considered (a quasi-special case). The necessary optimality conditions for quasi-singular controls are established.

Keywords: quasi-singular controls, linearized maximum principle, necessary optimality conditions, convex control domain, necessary conditions.

Введение

Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи оптимального управления системами Гурса – Дарбу. Разработка теории необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума начата А.И. Егоровым [1, 2]; в работах О.В. Васильева [3, 4] строится теория особых управлений для таких систем. Обзор работ, посвященных необходимым и достаточным условиям оптимальности, теоремам существования оптимальных решений и скользящим режимам в системах Гурса – Дарбу можно найти в работах [5–20].

На практике многие процессы являются многоэтапными, т.е. имеют переменную структуру [21–25]. Задачи оптимального управления подобными системами называются задачами оптимального управления составными системами [23] или системами с переменной структурой [25]. Ряд задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследован в работах [21–25].

Настоящая работа посвящена исследованию одной задачи оптимального управления с переменной структурой, которая описывается системой Гурса – Дарбу.

В предположении выпуклости области управления установлено необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума [26–30]. Далее рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай [30]). В квазиособом случае найдены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в интегральной форме.

При этом используется схема, предложенная и развитая в работах [12, 32–37].

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений гиперболического типа:

$$z_{tx} = f(t,x,z,u), \quad (t,x) \in D_1 = [t_0,t_1] \times [x_0,X], \tag{1}$$

$$y_{tx} = g(t,x,y,v), \quad (t,x) \in D_2 = [t_1,t_2] \times [x_0,X] \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, X], \\
z(t, x_0) = b_1(t), \; t \in [t_0, t_1], \\
a(x_0) = b_1(t_0),
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$$
\begin{gathered}
y(t_1, x) = G(z(t_1, x)), \quad x \in [x_0, X], \\
y(t, x_0) = b_2(t), \; t \in [t_1, t_2], \\
G(z(t_1, x_0)) = b_2(t_1),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $f(t,x,z,u)$ – n-мерная, а $g(t,x,y,v)$ – m-мерная вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по третьему и четвертому аргументам до второго порядка включительно; $G(z)$ – дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция; $a(x)$, $b_i(t)$ – липшицевы функции, $i = 1,2$; t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданные числа, причем $t_0 < t_1 < t_2$, $x_0 < X$, $u(t,x)$ – r-мерная, а $v(t,x)$ – q-мерная измеримые и ограниченные (в D_1 и D_2 соответственно) вектор-функции со значениями в заданных непустых, ограниченных и выпуклых множествах U и V, т.е.

$$
\begin{gathered}
u(t,x) \in U \subset R^r, \quad (t,x) \in D_1, \\
v(t,x) \in V \subset R^q, \quad (t,x) \in D_2.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Пару $(u(t,x), v(t,x))$, удовлетворяющую приведенным ограничениям, назовем *допустимым управлением.*

Предполагается, что каждому допустимому управлению $\left(u^{\circ}(t,x), v^{\circ}(t,x)\right)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное (в смысле [5, 6]) решение $\left(z^{\circ}(t,x), y^{\circ}(t,x)\right)$ краевой задачи (1)–(4).

На решениях краевой задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминального типа функционал

$$
S(u,v) = \phi_1(z(t_1, X)) + \phi_2(y(t_2, X)). \tag{6}
$$

Допустимое управление $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$, доставляющее минимум функционалу (6) при ограничениях (1)–(4), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x),z^{o}(t,x),y^{o}(t,x)\right)$ – *оптимальным процессом*.

В работе при предположении существовании оптимального управления устанавливаются необходимые условия оптимальности.

2. Специальное приращение критерия качества

Предположим, что $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$ – фиксированное допустимое управление, а $\left(\overline{u}(t,x),\overline{v}(t,x)\right)$, где $\overline{u}(t,x)=u^{o}(t,x)+\Delta u(t,x)$, $\overline{v}(t,x)=v^{o}(t,x)+\Delta v(t,x)$ – произвольное допустимое управления.

Через $\left(z^{o}(t,x),y^{o}(t,x)\right)$ и $\left(\overline{z}(t,x)=z^{o}(t,x)+\Delta z(t,x),\overline{y}(t,x)=\right.$ $\left.=y^{o}(t,x)+\Delta y(t,x)\right)$ обозначим соответствующие им решения краевой задачи (1)–(4).

Тогда ясно, что приращение $\left(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x)\right)$ состояния $\left(z^{o}(t,x),y^{o}(t,x)\right)$ будет решением краевой задачи

$$\Delta z_{tx}=f\left(t,x,\overline{z},\overline{u}\right)-f\left(t,x,z^{o},u^{o}\right),\ (t,x)\in D_1, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in[x_0,X],\\ \Delta z(t,x_0)=0,\ t\in[t_0,t_1],\end{gathered} \tag{8}$$

$$\Delta y_{tx}=g\left(t,x,\overline{y},\overline{v}\right)-g\left(t,x,y^{o},v^{o}\right),\ (t,x)\in D_2, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t_1,x)=\Delta G\left(z^{o}(t_1,x)\right)=G\left(\overline{z}(t_1,x)\right)-G\left(z^{o}(t_1,x)\right),\\ \Delta y(t,x_0)=b_2(t),\ t\in[t_1,t_2],\end{gathered} \tag{10}$$

$$G\left(z^{o}(t_1,x_0)\right)=b_2(t_1).$$

Через $\psi_i^{o}(t,x)$, $i=1,2$, обозначим пока неизвестные, n- и m-мерные соответственно вектор-функции. Домножим обе части равенства (7) слева скалярно на $\psi_1^{\text{o}}(t,x)$ и проинтегрируем по области D_1; аналогично домножим равенство (9) на $\psi_2^{\text{o}}(t,x)$ и проинтегрируем по области D_2. Введя обозначения

$$H\left(t,x,z,u,\psi_1^{\text{o}}\right)=\psi_1^{\text{o}\prime}\cdot f\left(t,x,z,u\right),\ M\left(t,x,y,v,\psi_2^{\text{o}}\right)=\psi_2^{\text{o}\prime}\cdot g\left(t,x,y,v\right),$$

получим

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\psi_1^{\text{o}\prime}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\\=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[H\left(t,x,\overline{z}(t,x),\overline{u}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)-\\-H\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\Big]dx\,dt,\end{gathered}\tag{11}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\psi_2^{\text{o}\prime}(t,x)\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\\=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[M\left(t,x,\overline{y}(t,x),\overline{v}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)-\\-M\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)\Big]dx\,dt.\end{gathered}\tag{12}$$

Здесь и в дальнейшем штрих обозначает операцию транспонирования.

Считая $\psi_i^{\text{o}}(t,x)$, $i=1,2$, достаточно гладкими вектор-функциями и учитывая краевые условия (8), (10), несложно убедиться в справедливости тождеств

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\psi_1^{\text{o}\prime}(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\psi_1^{\text{o}\prime}(t_1,X)\Delta z(t_1,X)-\\-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{\text{o}\prime}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)\,dx-\\-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{\text{o}\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{\text{o}\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)\,dx\,dt,\end{gathered}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\psi_2^{o\prime}(t,x)\,\Delta y_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\psi_2^{o\prime}(t_2,X)\,\Delta y(t_2,X)-$$

$$-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t_2,x)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)\,dx-\psi_2^{o\prime}(t_1,X)\,\Delta y(t_1,X)+$$

$$+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t_1,x)}{\partial x}\Delta y(t_1,x)\,dx-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,x)\,dx\,dt.$$

С учетом (11), (12) и равенства $\Delta y(t_1,x)=G(\bar z(t_1,x))-$ $-G(z^o(t_1,x))$ запишем формулу для приращения критерия качества (6) в виде

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar u,\bar v)-S(u^o,v^o)=\left[\varphi_1(\bar z(t_1,X))-\varphi_1(z^o(t_1,X))\right]+$$

$$+\left[\varphi_2(\bar y(t_2,X))-\varphi_2(y^o(t_2,X))\right]+\psi_1^{o\prime}(t_1,X)\,\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{o\prime}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)\,dx-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{o\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{o\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)\,dx\,dt+\psi_2^{o\prime}(t_2,X)\,\Delta y(t_2,X)-$$

$$-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t_2,x)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)\,dx-\psi_2^{o\prime}(t_1,X)\,\Delta y(t_1,X)+$$

$$+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t_1,x)}{\partial x}\Delta y(t_1,x)\,dx-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[H\big(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x)\big)-$$

$$-H\big(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\big)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[M\Big(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\Big)-$$
$$-M\Big(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\Big)\Big]dx\,dt. \tag{13}$$

Полагая

$$N\left(x,\frac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z(t_1,x)\right)=\frac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_1,x)}{\partial x}y(t_1,x)=\frac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_1,x)}{\partial x}G\big(z(t_1,x)\big),$$

$$Q\Big(\psi_2^{\mathrm{o}},z(t_1,X)\Big)=\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_1,X)G\big(z(t_1,X)\big)$$

и используя формулу Тейлора, из (13) получим

$$\Delta S\Big(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\Big)=\frac{\partial\varphi_1'\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\Big)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\Big)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)+o_1\Big(\big\|\Delta z(t_1,X)\big\|^2\Big)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_2'\Big(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\Big)}{\partial z}\Delta y(t_2,X)+\frac{1}{2}\,\Delta y'(t_2,X)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\Big(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\Big)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)+o_2\Big(\big\|\Delta y(t_2,X)\big\|^2\Big)+$$
$$+\psi_1^{\mathrm{o}\prime}(t_1,X)\Delta z(t_1,X)-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_1^{\mathrm{o}\prime}(t_1,x)}{\partial x}\Delta z(t_1,x)\,dx-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial\psi_1^{\mathrm{o}\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta z(t,X)\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_1^{\mathrm{o}\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta z(t,x)\,dx\,dt+$$
$$+\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_2,X)\Delta y(t_2,x)-\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_2,X)}{\partial x}\Delta y(t_2,x)\,dx-$$
$$-\frac{\partial Q\Big(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\Big)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\Big(\psi_2^{\mathrm{o}},z(t_1,X)\Big)}{\partial z^2}\times$$

$$\times \Delta z(t_1,X)+o_3\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+\int_{x_0}^{X}\frac{\partial N'\left(x,\frac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{X}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\frac{\partial\psi_2^{o}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)\,dx+\int_{x_0}^{X}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)dx-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\psi_2^{o\prime}(t,X)}{\partial t}\Delta y(t,X)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial^2\psi_2^{o\prime}(t,x)}{\partial t\,\partial x}\Delta y(t,X)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[H_u'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)-$$

$$-H_z'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[M_v'\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta v(t,x)-$$

$$-M_y'\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\Delta u'(t,x)\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+2\Delta v'(t,x)\times \tag{14}$$

$$\times M_{vy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+$$

$$+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}o_5\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}o_6\left(\left[\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt.$$

Здесь и в дальнейшем $o(\alpha)$ – величина более высокого порядка, чем α, т.е. $o(\alpha)/\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$, а $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \in R^n$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$.

Если предполагать, что $\psi_i^{o}(t,x)$, $i = 1,2$, удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 \psi_1^{o}(t,x)}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial H\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)}{\partial z}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \psi_1^{o}(t_1,x)}{\partial x} = \frac{\partial N\left(x, \dfrac{\partial \psi_2^{o}}{\partial x}, z^{o}(t_1,x)\right)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \psi_1^{o}(t,X)}{\partial t} = 0,$$

$$\psi_1^{o}(t_1,X) = -\frac{\partial \phi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z} + \frac{\partial Q\left(\psi_2^{o}, z(t_1,X)\right)}{\partial z}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{o}(t,x)}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial M\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)}{\partial y}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \psi_2^{o}(t_2,x)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2^{o}(t,X)}{\partial t} = 0,$$

$$\psi_2^{o}(t_2,X) = \frac{\partial \varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y}, \tag{18}$$

то формула приращения (14) примет вид

$$\begin{gathered}\Delta S\left(u^{o},v^{o}\right) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X} H'_u\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\,dx\,dt - \\ -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} M'_v\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\,dx\,dt +\end{gathered} \tag{19}$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial\varphi_1\left(z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)+\frac{1}{2}\,\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial z^2}\times$$

$$\times\Delta y(t_2,X)-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\circ},z^{\circ}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{X}\Delta z'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+2\Delta u'(t,x)\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\Delta u(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta y(t,x)+$$

$$+2\Delta v'(t,x)\times M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\Delta y(t,x)+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\Delta v(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)+o_3\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{X}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)dx-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}o_5\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}o_6\left(\left[\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt.$$

Краевую задачу (15)–(18) назовем *сопряженной системой* в задаче оптимального управления (1)–(6).

Поскольку множества U и V выпуклые, то специальное приращение допустимого управления $\left(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\right)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t,x)=\varepsilon\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right),\quad \Delta v_{\varepsilon}(t,x)=\varepsilon\left(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\right),\qquad(20)$$

где ε – произвольное число, $\varepsilon \in [0,1]$, а $u(t,x)$ и $v(t,x)$ – произвольные измеримые и ограниченные соответственно r- и q-мерные вектор-функции со значениями в U и V соответственно.

Через $\left(\Delta z(t,x;\varepsilon), \Delta y(t,x;\varepsilon)\right)$ обозначим специальное приращение состояния $\left(z^{o}(t,x), y^{o}(t,x)\right)$, отвечающее специальному приращению (20) управления $\left(u^{o}(t,x), v^{o}(t,x)\right)$.

Из оценок, установленных в [1–3, 8, 10], следует, что

$$\left\|\Delta z(t,x)\right\| \le L_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{X} \left\|\Delta u(\tau,s)\right\| ds\, d\tau, \tag{21}$$

$$\left\|\Delta y(t,x)\right\| \le L_2 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{X} \left\|\Delta v(\tau,s)\right\| ds\, d\tau + \left\|\Delta z(t_1,x)\right\| \right], \tag{22}$$

где L_i, $i = 1,2,$ – некоторые положительные постоянные.

Из (22) с учетом (21) получаем, что

$$\left\|\Delta y(t,x)\right\| \le L_3 \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{X} \left\|\Delta v(\tau,s)\right\| ds\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{X} \left\|\Delta u(\tau,s)\right\| d\tau\, ds \right], \tag{23}$$

где L_3 – некоторое положительное число.

Из оценок (21), (23) следует, что $\left\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\right\|$ и $\left\|\Delta y(t,x;\varepsilon)\right\|$ имеют порядок малости ε.

Из краевых задач (7)–(10) получаем, что $\left(\Delta z_{\varepsilon}(t,x), \Delta y_{\varepsilon}(t,x)\right)$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx}(t,x;\,\varepsilon) &= f_z\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x;\,\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon f_u\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x)\right)\delta u(t,x) + o(\varepsilon;\,t,x), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\Delta z(t_0,x;\,\varepsilon) = 0, \quad x \in [x_0, X], \quad \Delta z(t,x_0;\,\varepsilon) = 0, \; t \in [t_0,t_1], \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{tx}(t,x;\,\varepsilon) &= g_y\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)\Delta y(t,x;\,\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon g_v\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)\delta v(t,x) + o(\varepsilon;t,x), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\Delta y\left(t_1,x;\,\varepsilon\right)=G_z\left(z^{\mathrm{o}}\left(t_1,x\right)\right)\Delta z\left(t_1,x;\,\varepsilon\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon;x\right),\quad x\in\left[x_0,X\right],\\ \Delta y\left(t,x_0;\varepsilon\right)=0,\quad t\in\left[t_1,t_2\right].\end{gathered}\tag{27}$$

При помощи (24)–(27) по схеме, аналогичной примененной в работе [30], доказывается:

Теорема 1. *Для специального приращения* $\left(\Delta z\left(t,x;\varepsilon\right),\Delta y_{\varepsilon}\left(t,x;\varepsilon\right)\right)$ *состояния* $\left(z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)$ *имеют место представления*

$$\begin{gathered}\Delta z\left(t,x;\varepsilon\right)=\varepsilon\,\ell\left(t,x\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon;t,x\right),\quad \left(t,x\right)\in D_1,\\ \Delta y\left(t,x;\varepsilon\right)=\varepsilon\,q\left(t,x\right)+\mathrm{o}\left(\varepsilon;t,x\right),\quad \left(t,x\right)\in D_2,\end{gathered}\tag{28}$$

где $\left(\ell\left(t,x\right),q\left(t,x\right)\right)$ *является решением краевой задачи*

$$\begin{gathered}\ell_{tx}=f_z\left(t,x,z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\ell+\\ +f_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\left(u\left(t,x\right)-u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right),\end{gathered}\tag{29}$$

$$\begin{gathered}\ell\left(t_0,x\right)=0,\quad x\in\left[x_0,X\right],\\ \ell\left(t,x_0\right)=0,\quad t\in\left[t_0,t_1\right],\end{gathered}\tag{30}$$

$$\begin{gathered}q_{tx}=g_y\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)q+\\ +g_v\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\left(v\left(t,x\right)-v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right),\end{gathered}\tag{31}$$

$$\begin{gathered}q\left(t_1,x\right)=G_z\left(z^{\mathrm{o}}\left(t_1,x\right)\right)\ell\left(t_1,x\right),\quad x\in\left[x_0,X\right],\\ q\left(t,x_0\right)=0,\quad t\in\left[t_1,t_2\right].\end{gathered}\tag{32}$$

Используя равенства (28) и (20), из формулы приращения (19) получаем:

$$\begin{gathered}\Delta S_{\varepsilon}\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=S\left(u^{\mathrm{o}}+\Delta u_{\varepsilon},v^{\mathrm{o}}+\Delta v_{\varepsilon}\right)-S\left(u^{\mathrm{o}},v^{\mathrm{o}}\right)=\\ =-\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}H_u'\left(t,x,z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_1^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\left(u\left(t,x\right)-u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)dx\,dt+\right.\\ \left.+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}M_v'\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\left(v\left(t,x\right)-v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)dx\,dt\right]+\end{gathered}\tag{33}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{\ell'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,X)-\ell'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\times$$

$$\times\ell(t_1,X)-\int\limits_{x_0}^{X}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x)\,dx+$$

$$+q'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}q(t_2,X)-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}\times$$

$$\times\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times\ell(t,x)+2\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'\times$$

$$\times H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\ell(t,x)+$$

$$+\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Big]dx\,dt-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big[q'(t,x)\times$$

$$\times M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)q(t,x)+$$

$$+2\left(v(t,x)-v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'M_{vy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)q(t,x)+$$

$$+\left(v(t,x)-v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'M_{vv}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(v(t,x)-v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Big]dx\,dt\Bigg\}+o\left(\varepsilon^2\right).$$

Специальное приращение (33) функционала качества (6) позволяет получить различные необходимые условия оптимальности.

3. Необходимые условия оптимальности

Из разложения (33) следует, что вдоль оптимального процесса $\left(u^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),z^{\mathrm{o}}(t,x),y^{\mathrm{o}}(t,x)\right)$

$$-\varepsilon\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}H_u'\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)dx\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} M'_v\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt\Bigg]+o(\varepsilon)\geq 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon\in[0,1]$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X} H'_u\Big(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\Big)\Big(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} M'_v\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt\leq 0.$$

В последнем неравенстве по очереди полагая $v(t,x)=v^{\circ}(t,x)$ и $u(t,x)=u^{\circ}(t,x)$, приходим к следующему утверждению:

Теорема 2. *Для оптимальности допустимого управления* $\Big(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\Big)$ *в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:*

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X} H'_u\Big(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\Big)\Big(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt\leq 0$$

$$\forall u(t,x)\in U,\ (t,x)\in D_1, \tag{34}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X} M'_v\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt\leq 0,$$

$$\forall v(t,x)\in V\ (t,x)\in D_2. \tag{35}$$

Соотношения (34), (35) являются аналогом интегрального линеаризованного условия максимума Понтрягина (см. например, [26–29, 31]).

Применяя двумерный аналог леммы из [38, с. 8], получаем поточечное линеаризованное условие максимума.

Теорема 3. *Для оптимальности допустимого управления* $\Big(u^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x)\Big)$ *в задаче* (1)–(6) *необходимо, чтобы для всех* $u\in U$, $v\in V$ *и* $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,X)$, $(\theta,\xi)\in[t_1,t_2)\times[x_0,X)$ *выполнялись неравенства*

$$H'_u\left(\theta,\xi x^{\mathrm{o}}\left(\theta\xi\right),u^{\mathrm{o}}\left(\theta\xi\right),\psi_1^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)\left(u-u^{\mathrm{o}}\left(\theta\xi\right)\right)\le 0\,, \tag{36}$$

$$M'_v\left(\theta,\xi,y^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),v^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)\left(v-v^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)\le 0\,. \tag{37}$$

Здесь и в дальнейшем $\left(\theta,\xi\right)\in\left[t_0,t_1\right)\times\left[x_0,X\right)$ $\left(\left(\theta,\xi\right)\in\left[t_1,t_2\right)\times\left[x_0,X\right)\right)$ – произвольная точка Лебега (или правильная точка, см. [6, 9, 11, 12]) управления $u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)$ $\left(v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)$.

Теперь рассмотрим случай вырождения необходимого условия оптимальности (36), (37). Следуя [30], введем:

Определение 1. Допустимое управление $\left(u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)$ назовем *квазиособым управлением* в задаче (1)–(6), если для всех $u\in U$, $v\in V$ и $\left(\theta,\xi\right)\in\left[t_0,t_1\right)\times\left[x_0,X\right)$, $\left(\theta,\xi\right)\in\left[t_1,t_2\right)\times\left[x_0,X\right)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&H'_u\left(\theta,\xi,x^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),u^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),\psi_1^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)\left(u-u^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)=0,\\
&M'_v\left(\theta,\xi,y^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),v^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)\left(v-v^{\mathrm{o}}\left(\theta,\xi\right)\right)=0.
\end{aligned} \tag{38}$$

В квазиособом случае из разложения (33) с учетом (38) следует

Теорема 4. *Для оптимальности квазиособого управления* $\left(u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)$ *необходимо, чтобы неравенство*

$$\begin{aligned}
&\ell'\left(t_1,X\right)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}\left(t_1,X\right)\right)}{\partial x^2}\ell\left(t_1,X\right)-\ell'\left(t_1,X\right)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z^2}\right]\times\\
&\quad\times\ell\left(t_1,X\right)+q'\left(t_2,X\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2,X\right)\right)}{\partial y^2}q\left(t_2,X\right)-\\
&\quad-\int_{x_0}^{X}\ell'\left(t_1,x\right)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z^{\mathrm{o}}\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}\ell\left(t_1,x\right)dx-\\
&\quad-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\ell'\left(t,x\right)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_1^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\times
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\times\ell(t,x)+2\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)'\times H_{uz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\ell(t,x)+\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)' H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)\Big]dx\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}\Big[q'(t,x)M_{yy}\times$$

$$\times\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)q(t,x)+2\left(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\right)'\times$$

$$\times M_{vy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)q(t,x)+$$

$$+\left(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\right)' M_{vv}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\right)\Big]dx\,dt\Big\}\geq 0$$

выполнялось для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$ *и всех* $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$.

Неравенство (39) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. С его помощью удается получить необходимое условие оптимальности, выраженное через параметры задачи (1)–(6).

Через $R_i(t,x;\tau,s)$, $i=1,2$, обозначим решения матричных интегральных уравнений:

$$R_1(t,x;\tau,s)=E_1+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R_1(t,x;\alpha,\beta)\,f_z\left(\alpha,\beta,z^{\circ}(\alpha,\beta),u^{\circ}(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta,$$

$$(t,x)\in D_1,$$

$$R_2(t,x;\tau,s)=E_2+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R_2(t,x;\alpha,\beta)\,g_y\left(\alpha,\beta,y^{\circ}(\alpha,\beta),v^{\circ}(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta.$$

$$(t,x)\in D_2.$$

Уравнения (29), (31) являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями гиперболического типа с краевыми условиями Гурса (30), (32) соответственно. Решения краевых задач (29)–(30) и (31)–(32) допускают соответственно следующие представления [39]:

$$\ell(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_1(t,x;\tau,s)f_u\times$$
$$\times\Big(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)\Big(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau, \tag{40}$$

$$q(t,x)=\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)g_v\Big(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)\times$$
$$\times\Big(v(\tau,s)-v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau+\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;t_1,s)\frac{\partial q(t_1,s)}{\partial s}ds. \tag{41}$$

Из (41) получим

$$q(t,x)=R_2(t,x;t_1,x)q(t_1,x)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s}q(t_1,s)ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)g_v\Big(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)\Big(v(\tau,s)-v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau.$$

Поскольку $q(t_1,s)=G_z\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,s)\Big)\ell(t,s)$, последнее соотношение имеет вид

$$q(t,x)=R_2(t,x;t_1,x)G_z\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\Big)\ell(t_1,x)-$$
$$-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s}G_z\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,s)\Big)\ell(t_1,s)ds+ \tag{42}$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)g_v\Big(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)\Big(v(\tau,s)-v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau.$$

Вводя обозначения $f_u(t,x)\equiv f_u\Big(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x)\Big)$, $g_v(t,x)\equiv$ $\equiv g_v\Big(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)\Big)$ и принимая во внимание представление (40), из (42), получаем

$$q(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;t_1,x)G_z\Big(z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\Big)R_1(t_1,x;\tau,s)\times$$
$$\times f_u(\tau,s)\Big(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{s}\frac{\partial R_2(t,x;t_1,s)}{\partial s}G_z\left(z^{\circ}(t_1,s)\right)R_1(t_1,x;\tau,\beta)\times\right.$$

$$\left.\times f_u(\tau,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\circ}(\alpha,\beta)\right)d\tau\, d\beta\right]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)\,g_v(\tau,s)\left(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\right)ds\,d\tau.$$

Далее, используя формулу Дирихле [28], имеем

$$q(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;t_1,x)\,G_z\left(z^{\circ}(t_1,x)\right)\times$$

$$\times R_1(t_1,x;\tau,s)\,f_u(\tau,s)\left(u(\tau,s)-u^{\circ}(\tau,s)\right)ds\,d\tau-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{s}^{x}\frac{\partial R_2(t,x;t_1,\beta)}{\partial s}G_z\left(z^{\circ}(t_1,\beta)\right)R_1(t_1,x;\tau,s)\,d\beta\right]\times$$

$$\times f_u(\tau,s)\left(u(\tau,s)-u^{\circ}(\tau,s)\right)d\tau\,ds+ \tag{43}$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)\,g_v(\tau,s)\left(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\right)ds\,d\tau.$$

Полагая

$$Q(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;t_1,x)\,G_z\left(z^{\circ}(t_1,x)\right)R_1(t_1,x;\tau,s)-$$

$$-\int_{s}^{x}\frac{\partial R_2(t,x;t_1,\beta)}{\partial s}G_z\left(z^{\circ}(t_1,\beta)\right)R_1(t_1,x;\tau,s)\,d\beta,$$

перепишем формулу (43) в окончательном виде:

$$\begin{aligned}q(t,x)&=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}Q(t,x;\tau,s)\,f_u(\tau,s)\left(u(\tau,s)-u^{\circ}(\tau,s)\right)ds\,d\tau+\\&+\int_{t_1}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,x;\tau,s)\,g_v(\tau,s)\left(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\right)ds\,d\tau.\end{aligned} \tag{44}$$

Представления (40), (44) позволяют вывести необходимые условия оптимальности второго порядка, явно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Используя произвольность $u(t,x)$ и $v(t,x)$, предположим, что $v(t,x)=v^{\mathrm{o}}(t,x)$. Тогда неравенство (37) примет вид

$$\ell'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,X)-\ell'(t_1,X)\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,X)-$$

$$-\int_{x_0}^{X}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x)\,dx+q'(t_2,X)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}q(t_2,X)- \tag{45}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\Big[\ell'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\ell(t,x)+$$

$$+2\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\ell(t,x)+$$

$$+\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)'H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(u(t,x)-u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Big]dx\,dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_0}^{X}q'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)q(t,x)\,dx\,dt\ge 0.$$

При этом представление (44) примет вид

$$q(t,x)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}Q(t,x;\tau,s)f_u(\tau,s)\left(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)ds\,d\tau. \tag{46}$$

На основе соотношений (40), (46) доказывается справедливость тождеств:

$$\ell'(t_1,X)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]\ell(t_1,X)=$$

$$
=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)\times
$$

$$
\times R_1'(t,x;\tau,s)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]\times \tag{47}
$$

$$
\times R_1(t_1,X;\alpha,\beta)f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\mathrm{o}}(\alpha,\beta)\right)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta,
$$

$$
\int_{x_0}^{X}\ell'(t_1,x)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}\ell(t_1,x)\,dx=
$$

$$
\int_{x_0}^{X}\left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\left(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)R_1'(t_1,x;\tau,s)\times\right.
$$

$$
\times\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)f_u\times
$$

$$
\left.\times(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\mathrm{o}}(\alpha,\beta)\right)d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta\right]dx=
$$

$$
=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)\times \tag{48}
$$

$$
\times\left[\int_{\max(s,\beta)}^{X}R_1'(t_1,x;\tau,s)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\mathrm{o}}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx\right]\times
$$

$$
\times f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\mathrm{o}}(\alpha,\beta)\right)d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta,
$$

$$
\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\ell'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\ell(t,x)\,dx\,dt=
$$

$$
=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)\times
$$

$$\times\left[\int\limits_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} R_1'(t_1,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\times\right.$$
$$\left.\times R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]\times f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\text{o}}(\alpha,\beta)\right)d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta, \tag{49}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\left(u(t,x)-u^{\text{o}}(t,x)\right)' H_{uz}\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\ell(t,x)\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\int\limits_{x}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\text{o}}(\tau,s)\right)' H_{uz}\left(\tau,s,z^{\text{o}}(\tau,s),u^{\text{o}}(\tau,s),\psi_1^{\text{o}}(\tau,s)\right)\times\right.$$
$$\left.\times R_1(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]\times f_u'(t,x)\left(u(t,x)-u^{\text{o}}(t,x)\right)dx\,dt,$$

$$q(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\text{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}q(t_2,X)=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\text{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\text{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\times$$
$$\times Q(t_2,X;\alpha,\beta)f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\text{o}}(\alpha,\beta)\right)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta, \tag{50}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}q'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)q(t,x)\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{x_0}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\text{o}}(\tau,s)\right)' f_u'(\tau,s)\times$$
$$\times\left[\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X}Q'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)\times\right.$$
$$\left.\times Q(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]\times f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\text{o}}(\alpha,\beta)\right)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta.$$

Введя обозначение

$$K(\tau,s;\,\alpha,\beta)=-\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\text{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q\left(\psi_2^{\text{o}},z^{\text{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\right]+$$

$$+\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} R_1'(t_1,x;\tau,s)\frac{\partial^2 N\left(x,\dfrac{\partial\psi_2^{\circ}}{\partial x},z(t_1,x)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,x;\alpha,\beta)\,dx-$$

$$-Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\alpha,\beta)+$$

$$+\int\limits_{\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} R_1'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times R_1(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\max(s,\beta)}^{X} Q'(t,x;\tau,s)M_{yy}\times$$

$$\times\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)Q(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt$$

и учитывая тождества (47)–(50), из неравенства (45) получим

$$\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_1}\left(u(\tau,s)-u^{\circ}(\tau,s)\right)'f_u(\tau,s)K(\tau,s;\alpha,\beta)\times$$
$$\times f_u(\alpha,\beta)\left(u(\alpha,\beta)-u^{\circ}(\alpha,\beta)\right)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta+ \tag{51}$$

$$+2\int\limits_{D_1}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\int\limits_{x}^{X}\left(u(\tau,s)-u^{\circ}(\tau,s)\right)'H_{uz}\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s),\psi_1^{\circ}(\tau,s)\right)\times\right.$$

$$\left.\times R_1(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]\times f_u(t,x)\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{D_1}\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)'H_{uu}\left(t,x,z^{\circ}(t,x),u^{\circ}(t,x),\psi_1^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(u(t,x)-u^{\circ}(t,x)\right)dx\,dt\le 0.$$

Теперь предположим, что $u(t,x)\equiv u^{\circ}(t,x)$, $v(t,x)\ne v^{\circ}(t,x)$. В этом случае неравенство (37) примет вид

$$q'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}q(t_2,X)-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\left[q'(t,x)M_{yy}\times\right.$$

$$\times\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)q(t,x)+2\times$$
$$\times\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)' M_{vy}\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)q(t,x)+$$
$$+\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)' M_{vv}\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)\times \tag{52}$$
$$\times\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)\Big]dx\,dt\geq 0,$$

где $q(t,x)=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}R_2(t,x;\,\tau,s)\,g_v(\tau,s)\Big(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\Big)ds\,d\tau.$

Используя это представление, получим

$$q'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\Big(y^{\circ}(t_2,X)\Big)}{\partial y^2}q(t_2,X)=$$
$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\Big)' g_v'(\tau,s)R_2'(t_2,X;\tau,s)\times$$
$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\Big(y^{\circ}(t_2,X)\Big)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\alpha,\beta)\times \tag{53}$$
$$\times g_v(\alpha,\beta)\Big(v(\alpha,\beta)-v^{\circ}(\alpha,\beta)\Big)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)' M_{vy}\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)\times$$
$$\times q(t,x)\,dx\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\left[\int\limits_{t}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}\Big(v(\tau,s)-v^{\circ}(\tau,s)\Big)'\times\right. \tag{54}$$
$$\times M_{vy}\Big(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s),\psi_2^{\circ}(\tau,s)\Big)\times$$
$$\left.\times R_2(\tau,s;t,x)\,ds\,d\tau\right]\times g_v(t,x)\Big(v(t,x)-v^{\circ}(t,x)\Big)dx\,dt.$$

Отметим, что справедливо следующее тождество:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_0}^{X}q'(t,x)M_{yy}\Big(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\Big)q(t,x)\,dx\,dt=$$

$$= \int_{D_1}\int_{D_2} \left(v(\tau,s)-v^{o}(\tau,s)\right)' g_v'(\tau,s)\times$$

$$\times\left[\int_{t=\max(\tau,\,x)}^{t_2}\int_{x=\max(s,\beta)}^{X} R_2'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(\tau,s,y^{o}(\tau,s),v^{o}(\tau,s),\psi_2^{o}(\tau,s)\right)\times\right. \tag{55}$$

$$\left.\times R_2(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt\right]\times g_v(\alpha,\beta)\left(v(\alpha,\beta)-v^{o}(\alpha,\beta)\right)d\alpha\,d\beta.$$

Введя обозначение

$$N(\tau,s;\alpha,\beta)=\int_{t=\max(\tau,\,x)}^{t_2}\int_{x=\max(s,\beta)}^{X} R_2'(t,x;\tau,s)\times$$

$$\times M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)R_2(t,x;\alpha,\beta)\,dx\,dt-$$

$$-R_2(t_2,x;\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,x;\alpha,\beta)$$

и учитывая тождества (53)–(55), из неравенства (52) получим

$$\int_{D_1}\int_{D_2}\left(v(\tau,s)-v(\tau,s)\right)' g_v'(\tau,s)N(\tau,s;\alpha,\beta)\times$$

$$\times g_v(\alpha,\beta)\left(v(\alpha,\beta)-v(\alpha,\beta)\right)d\tau\,ds\,d\alpha\,d\beta+$$

$$+2\int_{D_2}\left[\int_t^{t_2}\int_x^{X}\left(v(\tau,s)-v^{o}(\tau,s)\right)' M_{vy}\left(\tau,s,y^{o}(\tau,s),v^{o}(\tau,s),\psi_2^{o}(\tau,s)\right)\times\right.$$

$$\left.\times R_2(\tau,s;t,x)\,d\tau\,ds\right]g_v(t,x)\times\left(v(t,x)-v^{o}(t,x)\right)dt\,dx+ \tag{56}$$

$$+\int_{D_2}\left(v(t,x)-v^{o}(t,x)\right)' M_{vv}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(v(t,x)-v^{o}(t,x)\right)dx\,dt\le 0.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Для оптимальности квазиособой экстремали* $\left(u^{o}(t,x),v^{o}(t,x)\right)$ *в задаче* (1)–(6) *необходимо, чтобы неравенства* (51) *и* (56) *выполнялись для всех* $\delta u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$ *и* $\delta v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ *соответственно.*

Неравенства (51) и (56) являются довольно общими интегральными условиями оптимальности квазиособых управлений. Из них при некоторых дополнительных предположениях можно получить ряд легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений и, в частности, исследовать квазиособые второго порядка [12, 33–36] управления.

Заключение

Изучена одна задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая системой нелинейных гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. Применен один вариант метода приращений, на основе которого получено специальное разложение второго порядка функционала качества. С его помощью установлен аналог линеаризованного условия максимума. Рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Список литературы

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1964. – № 5. – С. 613–623.

2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – 1965. – Т. 29, № 6. – С. 1205–1260.

3. Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами // Управляемые системы. – Новосибирск, 1972. – Вып. 10. – С. 27–34.

4. Васильев О.В. Принцип максимума в теории оптимальных систем с распределенными параметрами // Прикладная математика. – Новосибирск, 1976. – С. 109–138.

5. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системой Гурса – Дарбу // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. – 1972. – № 1. – С. 61–77.

6. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: Изд-во Горьков. гос. ун-та, 1986. – 87 с.

7. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. – 1972. – № 5. – С. 12–16.

8. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения: в 2 ч. Оптимальное управление. – Новосибирск: Наука, 1990. – Ч. 2. – 151 с.

9. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами: в 2 ч. – Нижний Новгород, 1992. – Ч. 1. – 110 с.

10. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1989. – 160 с.

11. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса – Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестник Удмуртск. ун-та. Матем.-мех. компьют. науки. – 2011. – № 2. – С. 52–67.

12. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса – Дарбу. – Баку: ЭЛМ, 2010. – 360 с.

13. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса – Дарбу. – Баку: ЭЛМ, 2003. – 96 с.

14. Багиров А.М. Некоторые вопросы теории оптимальных скользящих режимов в системах с распределенными параметрами: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Баку, 1982. – 46 с.

15. Багиров А.М. Многомерная апроксимационная лемма и некоторые ее применения // Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3431-80. – 46 с.

16. Матвеев А.С., Якубович В.А. Абстрактная теория оптимального управления. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1994. – 362 с.

17. Марданов М.Дж. Исследование оптимальных процессов с запаздываниями при наличии ограничений: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 28 с.

18. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журнал; 1978. – № 5. – С. 1109–1140.

19. Suryanarayana M.B. Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial diferential equations // SIAM Journal on Control. – 1973. – Vol. 11, № 1. – P. 130–147.

20. Гасанов К.К. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. – 1973. – № 3. – С. 599–608.

21. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. – 2006. – № 10. – С. 1158–1170.

22. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральными функционалом // Вестник РУДН. Сер. Прикл. и комп. математика. – 2002. – № 1 (1). – С. 131–136.

23. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 754–756.

24. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 11. – С. 72–80.

25. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ. Сер. Вычислит. матем. и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.

26. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Альсевич [и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с.

27. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – М., 2013. – 272 с.

28. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2005. – 335 с.

29. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 168 с.

30. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Либроком, 2013. – 256 с.

31. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. – Баку: ЭЛМ, 2013. – 224 с.

32. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса – Дарбу // Изв. АН Азербайджана. – 1981. – № 2. – С. 100–104.

33. Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса – Дарбу // Дифференц. уравнения. – 1996. – № 10. – С. 1952–1960.

34. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса – Дарбу // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 5. – С. 36–43.

35. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Баку: Изд-во Бакин. гос. ун-та, 1994. – 42 с.

36. Мансимов К.Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – № 10. – С. 1505–1520.

37. Мансимов К.Б. Условия оптимальности второго порядка в системах Гурса – Дарбу при наличии ограничений // Дифференц. уравнения. – 1990. – № 6. – С. 954–965.

38. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1982. – 110 с.

39. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук. – 1973. – № 2. – С. 116–120.

References

1. Egorov A.I. (1964) Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On the optimal control of processes in some systems with distributed parameters] Avtomatika i telemekhanika, no. 5, pp. 613-623.

2. Egorov A.I. (1965) Optimal'nyye protsessy v sistemakh s raspredelennymi parametrami i nekotoryye zadachi invariantnosti [Optimal Processes in Systems with Distributed Parameters and Some Invariance Problems] Izv. AN SSSR. Ser. matematika, v. 29, no. 6, pp. 1205-1260.

3. Vasil'yev O.V. (1972) Ob optimal'nosti osobykh upravleniy v sistemakh s raspredelennymi parametrami [On the optimality of special controls in systems with distributed parameters] sb.: Upravlyayemyye sistemy. N., v. 10, pp. 27-34.

4. Vasil'yev O.V. (1976) Printsip maksimuma v teorii optimal'nykh sistem s raspredelennymi parametrami [The maximum principle in the theory of optimal systems with distributed parameters] sb.: Prikladnaya matematika. Novosibirsk, pp. 109-138.

5. Plotnikov V.I., Sumin V.I. (1972) Optimizatsiya ob"yektov s raspredelennymi parametrami, opisyvayemyye sistemoy Gursa-Darbu [Optimization of objects with distributed parameters, described by the Goursat-Darboux system] Zhurn. vychisl. mat. i matem. fiziki, no. 1, pp. 61-77.

6. Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I. (1986) Metody optimal'nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki [Methods of optimal control of systems of mathematical physics] Gor'kiy. Izd-vo GGU, 87 p.

7. Akhmedov K.T., Akhiyev S.S. (1972) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary Optimality Conditions for Some Problems in Optimal Control Theory] Dokl. AN Azerb. SSR, no. 5, pp. 12-16.

8. Vasil'yev O.V., Srochko V.A., Terletskiy V.A. (1990) Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Chast' 2. Optimal'noye upravleniye [Optimization methods and their applications] N. Nauka, 151 p.

9. Sumin V.I. (1992) Funktsional'nyye vol'terrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami [Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems], 110 p.

10. Srochko V.A. (1989)Variatsionnyy printsip maksimuma i metody linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya[Variational Maximum Principle and Linearization Methods in Optimal Control Problems]Irkutsk. Izd-vo IGU, 160 p.

11. Lisachenko I.V., Sumin V.I. (2011) Printsip maksimuma dlya terminal'noy zadachi optimizatsii sistemy Gursa-Darbu v klasse funktsiy s summiruyemoy smeshannoy proizvodnoy [The maximum principle for the terminal optimization problem of the Goursat-Darboux system in the class of functions with a summable mixed derivative] Vestnik Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki, no. 2, pp. 52-67.

12. Mansimov K.B., Mardanov M.J. (2010) Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems]. Baku. Izd-vo ELM. 360 p.

13. Melikov T.K. (2003) Osobyye v klassicheskom smysle upravleniya v sistemakh Gursa-Darbu [Special in the classical sense of control in Goursat-Darboux systems] Baku, Izd-vo ELM, 96 p.

14. Bagirov A.M. (1982) Nekotoryye voprosy teorii optimal'nykh skol'zya-shchikh rezhimov v sistemakh s raspredelennymi parametrami [Some questions in the theory of optimal sliding regimes in systems with distributed parameters]. Abstract Ph.D. thesis. Baku, 46 p.

15. Bagirov A.M. Mnogomernaya aproksimatsionnaya lemma i nekotoryye yeye primeneniya [A multidimensional approximation lemma and some of its applications] rukopis' dep. v VINITI AN SSSR, no. 3431-80, 46 p.

16. Matveyev A.S., Yakubovich V.A. (1994) Abstraktnaya teoriya optimal'nogo upravleniya [Abstract theory of optimal control] S.-Peterburg. Izd-vo S.-Peterburgskogo un-ta, 362 p.

17. Mardanov M.Dj. (1989) ssledovaniye optimal'nykh protsessov s zapazdyvaniyami pri nalichii ogranicheniy [Investigation of optimal processes with delays in the presence of constraints]. Abstract of Doctor’s degree dissertation. Kiyev, 28 p.

18. Matveyev A.S., Yakubovich V.A. (1978) Optimal'noye upravleniye nekotorymi sistemami s raspredelennymi parametrami [Optimal control of some systems with distributed parameters] Sib. matem. zhurnal, no. 5, pp. 1109-1140.

19. Suryanarayana M.B. (1973) Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial diferential equations. SIAM Journal on Control. vol. 11, no. 1, pp. 130-147.

20. Gasanov K.K. (1973) O sushchestvovanii optimal'nykh upravleniy dlya protsessov opisyvayemykh sistemoy giperbolicheskikh uravneniy [On the existence of optimal controls for processes described by a system of hyperbolic equations]. Zhurn. Vychisl. mat. i matem. fiziki, no. 3, pp. 599-608.

21. Ismaylov R.R., Mansimov K.B. (2006) Ob usloviyakh optimal'nosti v odnoy stupenchatoy zadache upravleniya [On optimality conditions in a stepped control problem] zhurn. vychisl. mat. i matem. fiziki, no. 10, pp. 1158-1170.

22. Rozova V.N. (2002) Optimal'noye upravleniye stupenchatymi sistemami s neintegral'nymi funktsionalom [Optimum control of stepwise systems with nonintegral functional] Vestnik RUDN. Ser. Prikl. i komp. matematika, no. 1 (1), pp. 131-136.

23. Velichenko V.V. (1967) Optimal'noye upravleniye sostavnymi sistemami [Optimal control of composite systems] Dokl. AN SSSR, v. 176, no. 4, pp. 754-756.

24. Gabelko K.N. (1974) Posledovatel'noye uluchsheniye mnogoetapnykh protsessov [Consecutive improvement of multi-stage processes] Avtomatika i telemekhanika, no. 11, pp. 72-80.

25. Nikol'skiy M.S. (1987) Ob odnoy variatsionnoy zadache s peremennoy strukturoy [On a variational problem with a variable structure] Vestnik MGU. Ser. Vych. mat. i kibern., no. 1, pp. 36-41.

26. Gabasov R., Kirillova F.M., Al'sevich V.V. i dr. (2011) Metody optimizatsii [Methods of optimization] Minsk. Izd-vo «Chetyre chetverti», 472 p.

27. Gabasov R., Kirillova F.M. (2013) Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya [The maximum principle in the theory of optimal control] M. URSS, 272 p.

28. Alekseyev V.M., Fomin S.V., Tikhomirov V.M. (1979) Optimal'noye upravleniye [Optimal control] M. Nauka, 429 p.

29. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. (1968) Priblizhennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach [Approximate methods for solving extremal problems] Izd-vo LGU, 168 p.

30. Gabasov R., Kirillova F.M. (2013) Osobyye optimal'nyye upravleniya [Special optimal controls], «Librocom», 2013, 256 p.

31. Abdullayev A.A., Mansimov K.B. (2013) Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvayemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type]. Baku. Izd-vo «ELM», 224 p.

32. Mansimov K.B. (1981) Ob odnoy skheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa-Darbu [On a scheme for investigating a special case in Goursat-Darboux systems] Izv. AN Azerb. No. 2, pp. 100-104.

33. Mansimov K.B. (1996) Ob optimal'nosti kvaziosobykh upravleniy v sistemakh Gursa-Darbu [On the optimality of quasi-singular controls in Goursat-Darboux systems]. Diff. uravneniya, no. 10, pp. 1952-1960.

34. Mansimov K.B. (1993) Integral'nyye neobkhodimyye usloviya optimal'nosti kvaziosobykh upravleniy v sistemakh Gursa-Darbu [Integral necessary conditions for optimality of quasi-singular controls in Goursat-Darboux systems] Avtomatika i telemekhanika, no. 5, pp. 36-43.

35. Mansimov K.B. (1994) Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Investigation of special processes in optimal control problems]. Abstract Ph.D. thesis. Baku, BGU, 42 p.

36. Mansimov K.B. (2001) K teorii neobkhodimykh usloviy optimal'nosti v odnoy zadache s raspredelennymi parametrami [On the theory of necessary optimality conditions in a problem with distributed parameters] Zhurn. vychisl. matem. i matem. fiz., no. 10, pp. 1505-1520.

37. Mansimov K.B. (1990) Usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemakh Gursa-Darbu pri nalichii ogranicheniy [Second order optimality conditions in Goursat-Darboux systems in the presence of constraints] Differents. uravneniya, no. 6, pp. 954-965.

38. Srochko V.A. (1982) Vychislitel'nyye metody optimal'nogo upravleniya[Computational methods of optimal control]. Irkutsk. Izd-vo IGU, 110 p.

39. Akhiyev S.S., Akhmedov K.T. (1973) Ob integral'nom predstavlenii resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy [On the integral representation of solutions of certain differential equations]. Izv. AN Azerb. Ser. fiz.-tekhn. i matem. nauk, no. 2, pp. 116-120.

Получено 07.08.2019

Сведения об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах», Институт систем управления НАН Азербайджана (Az1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Сулейманова Шабнам Шакир кызы – диссертант Института систем управления НАН Азербайджана (Az1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 68, e-mail: kmansimov@mail.ru).

About the authors

Mansimov Kamil Bayramali – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Baku State University, Chair of “Mathematical Cybernetics”, Institute of Control problems of ANAS, head of the laboratory of “Control with complex dynamic systems” (Az1141, Baku, B. Vahabzade st., 68, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Suleymanova Shabnam Shakir gizi (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences (Az1141, Baku, B. Vahabzade st., 68, e-mail: kmansimov@mail.ru).