DOI: 10.15593/2499-9873/2019.3.02
УДК 517.929.2

А.А. Кандаков

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ЛИНЕЙЧАТОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена получению новых областей устойчивости линейных автономных разностных уравнений, а также демонстрации использования свойств линейчатости *D*-разбиений при решении этой задачи. Предлагается исследовать *D*-разбиения в виде набора плоских сечений, состоящих из прямых. Предлагаемым способом получен один из известных результатов и найдена новая область устойчивости. Указаны перспективы переноса подхода на исследование более широких классов уравнений.

Ключевые слова: разностное уравнение, характеристический многочлен, устойчивость, метод *D*-разбиения, линейчатая структура.

A.A. Kandakov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

LINEAR REPRESENTATION OF THE STABILITY AREAS OF SOME CLASSES OF DIFFERENCE EQUATIONS

The work is devoted to obtaining new stability domains for linear autonomous difference equations, as well as a demonstration of the use of the lined-structure property of *D*-decompositions in solving this problem. It is proposed to study *D*-decompositions in the form of a set of plane cross-sections consisting of lines. Using the proposed method, one of the known results is obtained and a new area is found. The prospects of transferring the approach to the study of wider classes of equations are indicated.

Keywords: difference equation, characteristic polynomial, stability, *D*-decomposition method, lined structure.

Введение

Рассмотрим линейное автономное разностное уравнение произвольного порядка на дискретной полуоси $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x(n-i), \quad n \in N_0, \tag{1}$$

где $a_i \in R, \ \ i = \overline{1, k}.$

Определение 1. *Решением* уравнения (1) назовем функцию $x : N_0 \to R,$ удовлетворяющую равенству (1) для всех $n \in N_0$.

Одним из фундаментальных свойств разностных уравнений является *устойчивость решений*. Оно отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции.

В данной работе изучается асимптотическая устойчивость уравнения (1), которая для автономных уравнений совпадает с экспоненциальной исходя из формулы представления решения [1].

Для уравнения (1), в силу его линейности и однородности, устойчивость определяется оценкой решения, а наличие одного такого решения дает гарантию устойчивости остальных, поэтому говорят об устойчивости всех решений как об *устойчивости уравнения*.

Определение 2. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если существует такая константа $\gamma > 0$, что для каждого решения $x = x(n)$ при некотором $M > 0$ для всех $n \in N_0$ имеем $\left|x(n)\right| \le Me^{-\gamma n}$.

Теорема 1 [1, с. 77]. *Уравнение (1) экспоненциально устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена* $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^{k-i}$ *принадлежат единичному кругу* $\{z : \left|z\right| < 1\}$.

При изучении устойчивости автономных уравнений целесообразно стремиться получить признаки устойчивости, выраженные в терминах параметров уравнения и соответствующие *области устойчивости* в пространстве параметров.

Определение 3. *Областью устойчивости* называется множество точек пространства параметров, соответствующих устойчивым уравнениям.

Для решения такого рода задач Ю.И. Неймарк [2] на основе идей И.А. Вышнеградского разработал *метод D-разбиений*. Суть метода заключается в построении границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменяется количество корней характеристического уравнения, находящихся внутри заданной области комплексной плоскости. Областью устойчивости является объединение всех областей разбиения, которым соответствует нулевое число корней характеристического уравнения в единичном круге.

Области устойчивости некоторых классов уравнений могут иметь свойства, которые облегчают исследование. Таким свойством является *линейчатость*.

Определение 4. Назовем область *линейчатой* или обладающей *линейчатой структурой*, если ее граница является объединением отрезков, полупрямых и прямых.

Замечание 1. Если *D*-разбиение обладает линейчатой структурой, то любая часть пространства, ограниченная поверхностями *D*-разбиения, тоже линейчата. Поэтому и область устойчивости оказывается линейчатой.

Очевидно, что исследовать область устойчивости, обладающую линейчатой структурой, намного удобнее в силу ее простоты.

Конечно, этим свойством обладают области устойчивости далеко не всяких уравнений. Однако это встречается чаще, чем кажется на первый взгляд. Подтверждение можно найти, в частности, в работах М.В. Мулюкова [3, 4]. В своей диссертации он эффектно и эффективно использует линейчатую структуру *D*-разбиений для получения признаков устойчивости квазиполиномов и приводит несколько классов дифференциальных уравнений с последействием, обладающих этим свойством.

1. Об одной известной области

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$x(n) = ax(n-1) + bx(n-2) + cx(n-3). \tag{2}$$

Область устойчивости уравнения (2) получена, например, в [5, 6].

Теорема 2 [5]. *Уравнение (2) экспоненциально устойчиво, если и только если выполнены неравенства*

$$b < a + c + 1, \quad b < -a - c + 1, \quad b > c^2 - ac - 1.$$

Представленная на рис. 1 область является линейчатой. Покажем это, получив ту же область другим способом.

Характеристический полином уравнения (2) имеет вид

$$1 = a\lambda^{-1} + b\lambda^{-2} + c\lambda^{-3}. \tag{3}$$

Воспользуемся методом *D*-разбиения. Положим в (3) $\lambda = e^{i\varphi}$:

$$1 = ae^{-i\varphi} + be^{-2i\varphi} + ce^{-3i\varphi},$$

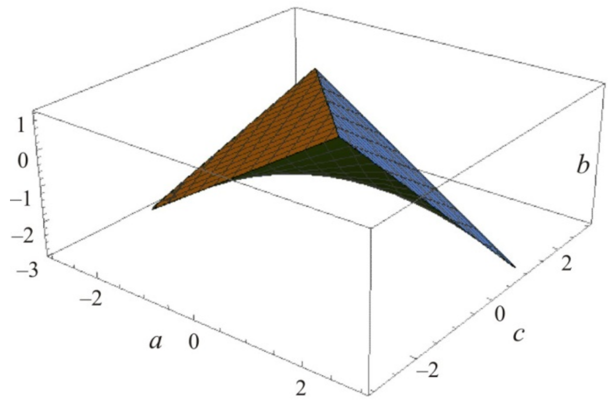

Рис. 1. Область устойчивости уравнения (2)

домножим обе части полученного равенства на $e^{2i\varphi}$:

$$e^{2i\varphi} = ae^{i\varphi} + b + ce^{-i\varphi},$$

затем сделаем замену $a = \frac{1}{2}(\chi + \xi)$, $c = \frac{1}{2}(\chi - \xi)$:

$$e^{2i\varphi} = \chi\cos\varphi + b + i\xi\sin\varphi.$$

В последнем уравнении разделим действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi = \chi\cos\varphi + b, \\ \sin 2\varphi = \xi\sin\varphi. \end{cases}$$

В случае $\sin\varphi = 0$ получаем прямые

$$b = 1 \pm \chi,$$

для остальных ситуаций можно делить второе уравнение системы на $\sin\varphi$. Обозначим $s = \cos\varphi$. В итоге поверхности D-разбиения задаются уравнениями

$$b = 1 \pm \chi, \quad \begin{cases} b = 2s^2 - 1 - \chi s, \\ \xi = 2s, \ s \in [-1, 1]. \end{cases} \tag{4}$$

Обратим внимание, что все сечения $\xi = \text{const}$ состоят из набора прямых. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *D-разбиение и область устойчивости уравнения (2) имеют линейчатую структуру.*

Теперь легко строить сечения, фиксируя ξ. Для этого строим прямые $b = 1 \pm \chi$, подставляем значение $s = \xi / 2$ в уравнение $b = 2s^2 - 1 - \chi s$ и строим третью прямую (рис. 2).

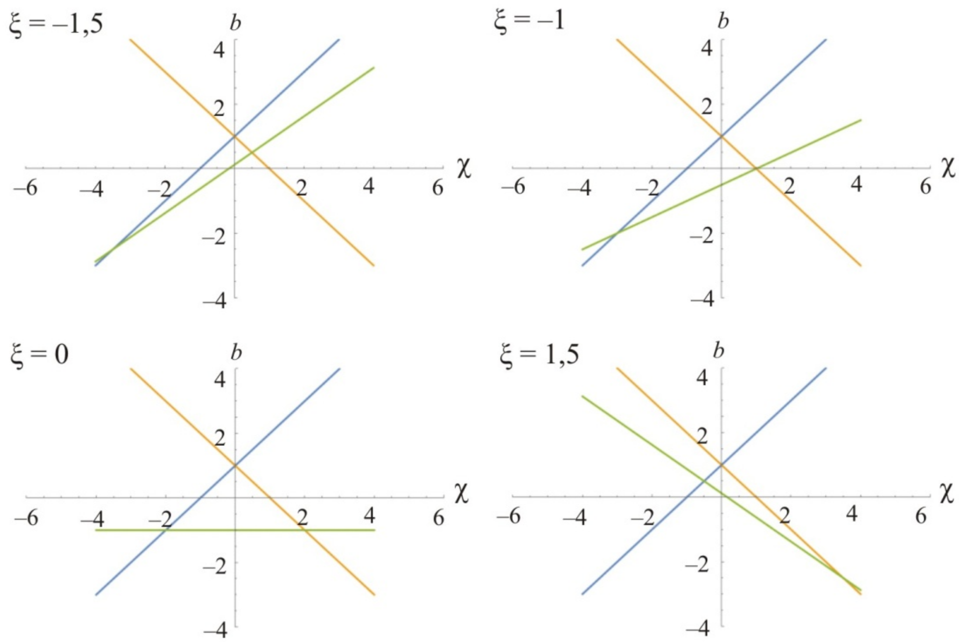

Рис. 2. Сечения *D*-разбиения при разных ξ

Замечание 2. Осуществленная ранее замена соответствует повороту системы относительно оси ξ. Поэтому можно с уверенностью сказать, где находится область устойчивости. На рис. 2 она попадает в треугольник, образованный в результате пересечения прямых.

Соберем сечения при всевозможных ξ «в стопку» и сформируем область устойчивости уравнения (2) (рис. 3).

Повернув изображение (рис. 4), получим область, описанную в теореме 2.

Теорема 4. *Уравнение (2) экспоненциально устойчиво, если и только если точка* $(a - c, b, a + c)$ *попадает в область пространства* (ξ, b, χ), *содержащую точку* $(0; 0; 0)$ *и ограниченную поверхностями (4).*

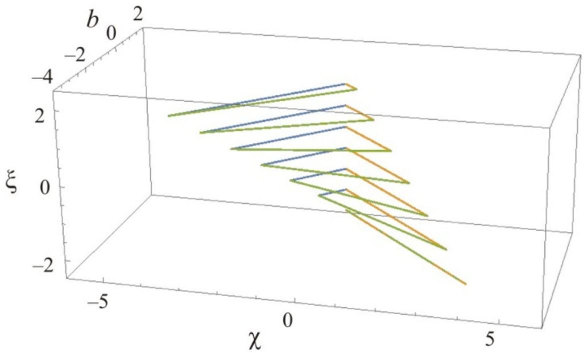

Рис. 3. Набор сечений области устойчивости уравнения (2)

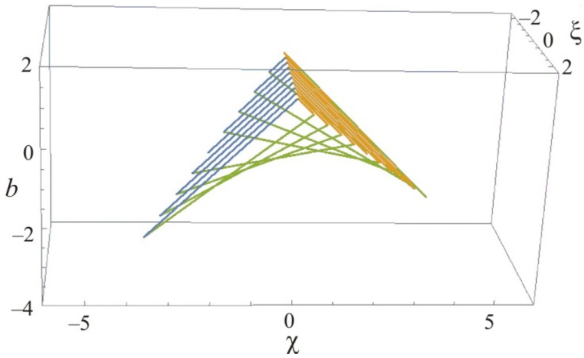

Рис. 4. Область устойчивости уравнения (2) в линейчатом виде

2. Область устойчивости уравнения четвертого порядка

Разовьем предложенный подход: будем рассуждать с точки зрения линейчатости *D*-разбиения, построенного для получения новой области устойчивости. Увеличив все запаздывания аргумента в уравнении (2) на единицу, получим уравнение четвертого порядка с тремя запаздываниями:

$$x(n) = ax(n-2) + bx(n-3) + cx(n-4), \quad n \in N_0. \tag{5}$$

Будем действовать аналогично изложенному выше. Возьмем характеристическое уравнение и положим $\lambda = e^{i\varphi}$:

$$1 = ae^{-2i\varphi} + be^{-3i\varphi} + ce^{-4i\varphi}. \tag{6}$$

Домножаем на $e^{3i\varphi}$ и делаем замену $a = \frac{1}{2}(\chi + \xi)$, $c = \frac{1}{2}(\chi - \xi)$:

$$e^{3i\varphi} = \chi \cos\varphi + b + i\xi \sin\varphi.$$

Разделяем мнимую и действительную части:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \chi \cos\varphi + b, \\ \sin 3\varphi = \xi \sin\varphi. \end{cases}$$

В случае $\sin\varphi = 0$ получаем прямые

$$b = 1 - \chi, \ \ b = -1 + \chi,$$

для остальных ситуаций разделим обе части второго уравнения на $\sin\varphi$. Имеем:

$$\begin{cases} \cos 3\varphi = \chi \cos\varphi + b, \\ 4\cos^2\varphi - 1 = \xi. \end{cases}$$

Преобразуем и обозначим $s = \cos\varphi$. В итоге можно представить D-разбиение в следующем виде:

$$\begin{gathered} b = 1 - \chi, \quad b = -1 + \chi, \\ \begin{cases} 4s^3 - 3s - \chi s - b = 0, \\ 4s^2 - 1 = \xi, \ s \in [-1, 1]. \end{cases} \end{gathered} \tag{7}$$

Так же, как для уравнения (2), есть возможность построить D-разбиение пространства параметров уравнения (5) по сечениям при фиксированных ξ. Формулы (7) показывают, что любое такое сечение будет состоять из набора прямых, т.е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *D-разбиение и область устойчивости уравнения (5) имеют линейчатую структуру.*

Сечения формируются из прямых $\chi \pm b = 1$ и прямых вида $4s_i^3 - s_i(3 + \chi) - b = 0,$ где в роли s_i выступают корни уравнения $4s^2 - 1 = \xi$. При этом количество корней меняется при различных ξ, а следовательно, меняется количество прямых (рис. 5).

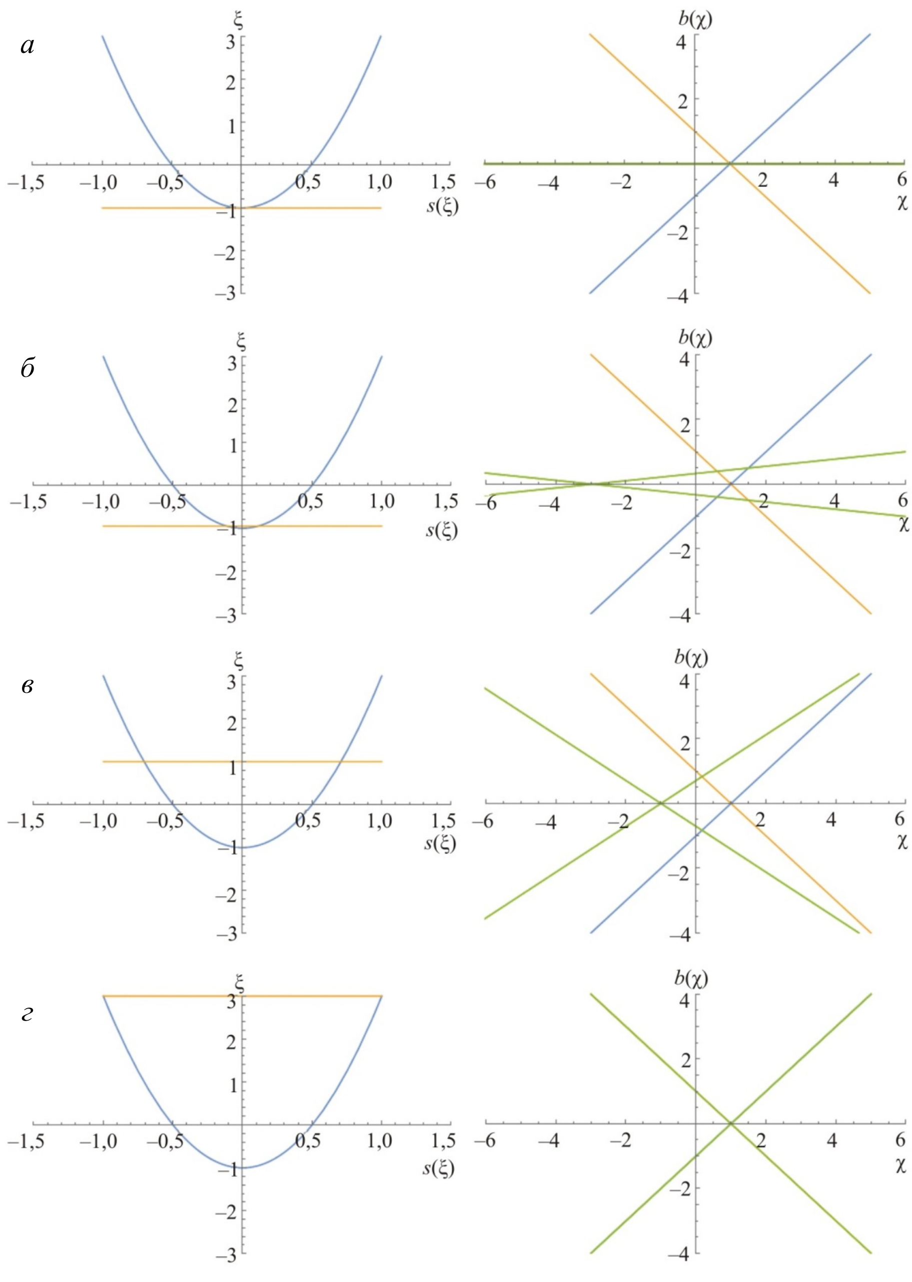

Рис. 5. График уравнения $4s^2 - 1 = \xi$ и вид сечений *D*-разбиения:
а – при $\xi = -1$; *б* – $\xi = -0{,}9$; *в* – $\xi = 1$; *г* – $\xi = 3$

Собираем сечения при различных ξ «в стопку» и получаем объемный вид *D*-разбиения (рис. 6).

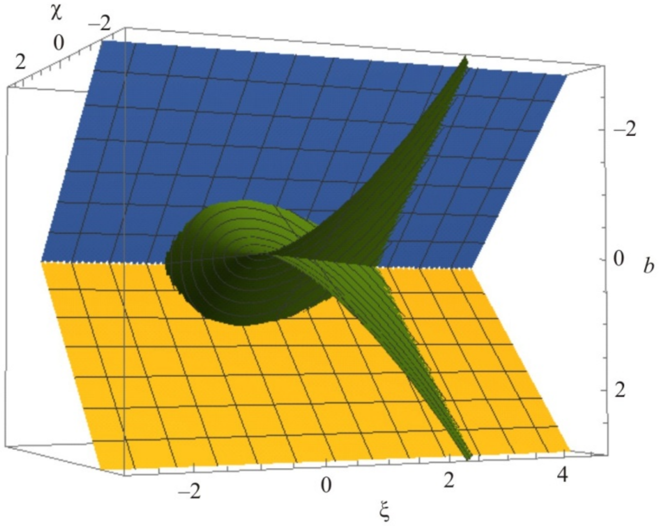

Рис. 6. Объемное представление *D*-разбиения

Теорема 6. *Уравнение (5) экспоненциально устойчиво, если и только если точка* $(a-c, b, a+c)$ *попадает в область пространства* (ξ, b, χ), *содержащую точку* $(0,0,0)$ *и ограниченную поверхностями (7).*

Доказательство. Достаточно выяснить, какие из областей *D*-разбиения составляют область устойчивости. В этом поможет линейчатость *D*-разбиения.

Корни характеристического уравнения (6) непрерывно зависят от параметров *a*, *b*, *c*. Пусть $z = re^{i\varphi}$ – корень характеристического уравнения. Если z принадлежит поверхностям (7), то $r = 1$. Исследуем, как изменяется модуль корня при пересечении поверхностей.

Полагая в (6) $\lambda = re^{i\varphi}$, получим множества точек пространства параметров, которым соответствуют характеристические уравнения, имеющие корень с модулем r. Производя замены $\chi = ar + \frac{c}{r}$ и $\xi = ar - \frac{c}{r}$, получим *D*-разбиение в виде

$$b = r^3 - \chi, \quad b = -r^3 + \chi,$$
$$\begin{cases} r^3(4s^3 - 3s) - \chi s - b = 0, \\ r^3(4s^2 - 1) = \xi, \ s \in [-1, 1]. \end{cases} \tag{8}$$

Поверхности (7) являются частным случаем поверхностей (8) при $r=1$.

Зададимся целью определить знак производных от r по направлениям пересечения поверхностей (8).

Для границ, не зависящих от ξ или s, удобно рассматривать изменение модуля r при движении вдоль оси Ob. Для этого достаточно знать знак производных $\frac{\partial r}{\partial b}$ для b, r, связанных неявно выражениями (8). Он виден из производных, найденных явно:

$$\frac{\partial b}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(r^3-\chi)=3r^3, \quad \frac{\partial b}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(-r^3-\chi)=-3r^3.$$

Для прямых (8), заданных параметрически, поступим иным образом. Найдем значение производной не для всех точек поверхностей, а только для пересечения с плоскостью $\xi=0$. Ниже покажем, что этого достаточно.

Для случая $\xi=0$ можно явно вычислить корни $s_1=1/2, \quad s_2=-1/2$ и в дальнейшем найти производную для соответствующих прямых:

$$\frac{\partial b}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(r^3(4s_i^3-3s_i)-\chi s_i-b)=3r^2(4s_i^3-3s_i), \quad i=1,2.$$

Оценим динамику корней характеристического многочлена, попадающих в единичный круг. Если производная уравнения границы положительна в точке $r=1$, то количество корней, попавших в единичный круг при пересечении границы в направлении Ob, увеличивается (так как рассмотрена обратная зависимость $\partial b/\partial r$), соответственно, если производная отрицательна, количество корней уменьшается.

Благодаря полученной информации мы можем определить область, в которой все корни характеристического многочлена попадают в единичный круг, она и будет областью устойчивости (согласно теореме 1).

Все области D-разбиения рассекаются плоскостью $\xi=0$. На рис. 7 сечение области устойчивости – окрашенный четырехугольник, а неокрашенные области содержат как минимум один корень характеристического уравнения, не попадающий в единичный круг.

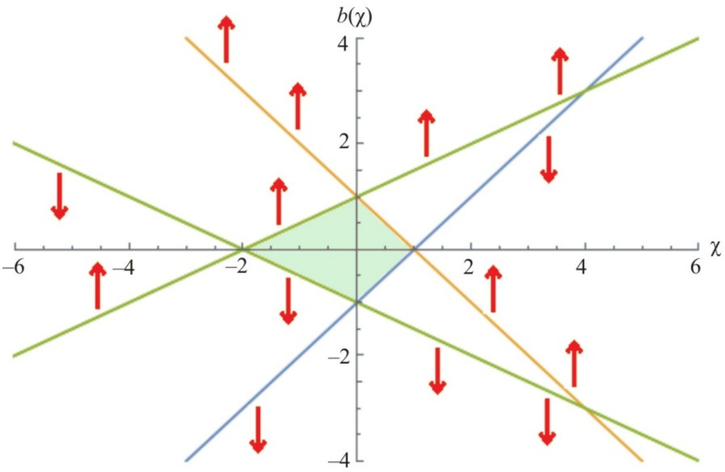

Рис. 7. Динамика корней характеристического полинома (6) при $\xi = 0$

Исследуем область пространства, сечением которого является окрашенный четырехугольник. Очевидно, что уравнение, соответствующее точке (0, 0, 0), устойчиво. Следовательно, эта область пространства и является областью экспоненциальной устойчивости уравнения (5). Теорема доказана.

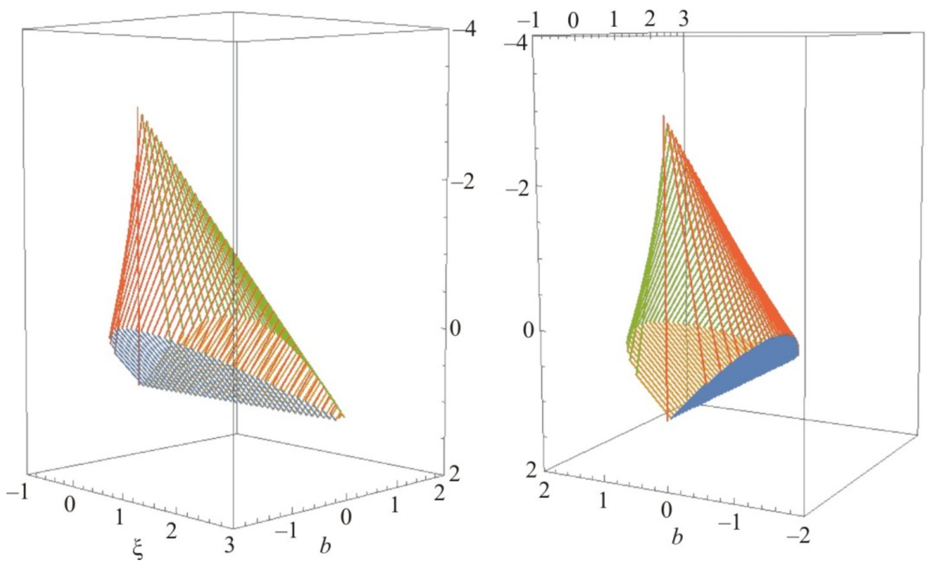

Рис. 8. Область устойчивости уравнения (5) по сечениям

Полученная область представляет собой своеобразный квазиконус, срезанный углом, однако при этом она обладает линейчатой структурой. Вид области с различных ракурсов представлен на рис. 8 (по сечениям) и рис. 9.

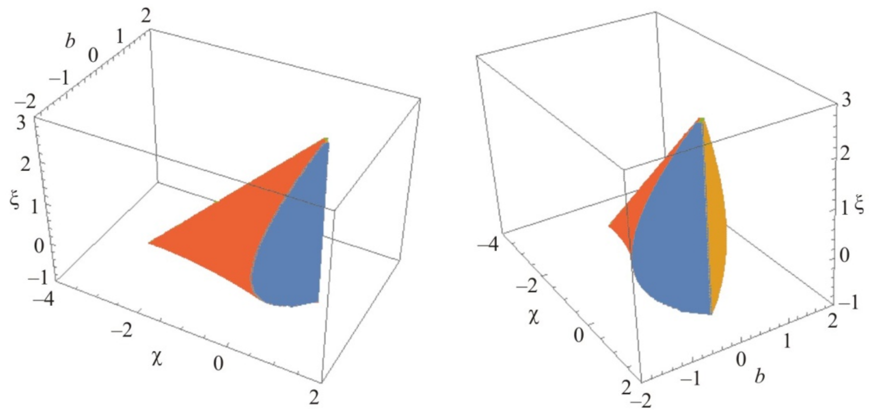

Рис. 9. Область устойчивости уравнения (4)

Замечание 3. Следует указать, что $4s^3-3s=T_3(s)$, $4s^2-1=U_2(s)$ – многочлены Чебышёва первого и второго рода. Есть предположение, что многочлены этих классов дают описание областей устойчивости и для уравнений более высоких порядков. Это может существенно упростить решение задач устойчивости.

Выводы

В работе рассмотрены некоторые разностные уравнения вида (1), при этом использовано свойство линейчатости *D*-разбиений пространства параметров. Представлен способ исследования областей устойчивости в виде набора сечений.

Итогом работы стало получение области устойчивости уравнения с тремя запаздываниями (4).

Основываясь на полученном опыте, можно выдвинуть гипотезу о возможности получения областей устойчивости уравнений более высоких или даже произвольных порядков аналогичными способами.

Автор выражает свою признательность участникам пермского семинара по функционально-дифференциальным и разностным уравнениям за активный интерес к работе, советы и обсуждения.

Отдельная благодарность научному руководителю, старшему научному сотруднику К.М. Чудинову, а также ведущему научному сотруднику В.В. Малыгиной за постановку задачи и всестороннюю поддержку в процессе выполнения работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Список литературы

1. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. – N.Y.: Springer, 2005. – 539 p.

2. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: Изд-во ЛКВВИА, 1949. – 140 с.

3. Мулюков М.В. Устойчивость двупараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Изв. Ин-та матем. и информ. – 2018. – Т. 51. – С. 79–122.

4. Мулюков М.В. Устойчивость систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2018. – 150 с.

5. Баландин А.С., Малыгина В.В. О разрешимости одного класса разностных уравнений // Вычислительная механика: сб. науч. тр. – Пермь, 2006. – № 4. – С. 67–72.

6. Нигматулин Р.М., Кипнис М.М. Свойства дискретных систем третьего порядка на границе их области устойчивости // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9. – С. 39–43.

References

1. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. N.Y., Springer, 2005, 539 p.

2. Nejmark Ju.I. Ustojchivost' linearizovannyh sistem. L.: LKVVIA, 1949, 140 p.

3. Muljukov M.V. Ustojchivost' dvuparametricheskih sistem linejnyh avtonomnyh differencial'nyh uravnenij s ogranichennym zapazdyvaniem. Izv. In-ta matem. i inform., 2018, vol. 51, pp. 79-122.

4. Muljukov M.V. Ustojchivost' sistem linejnyh avtonomnyh differencial'nyh uravnenij s ogranichennym zapazdyvaniem. Abstract Ph.D. thesis. Perm', 2018. 150 p.

5. Balandin A.S., Malygina V.V. O razreshimosti odnogo klassa raznostnyh uravnenij. Vychislitel'naja mehanika: sb. nauch. tr. Perm', 2006, no. 4, pp. 67-72.

6. Nigmatulin R.M., Kipnis M.M. Svojstva diskretnyh sistem tret'ego porjadka na granice ih oblasti ustojchivosti. Fundamental'nye issledovanija, 2015, no. 9, pp. 39-43.

Получено 07.08.2019

Сведения об авторе

Кандаков Александр Андреевич (Пермь, Россия) – студент 2-го курса магистратуры, факультет «Прикладная математика и механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com).

About the author

Alexandr A. Kandakov (Perm, Russian Federation) – 2nd year Graduate Student, Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, 29, Komsomolsky av., e-mail: kandakov.sasha@gmail.com).