DOI: 10.15593/2499-9873/2019.2.01
УДК 517.9

К.Б. Мансимов[1, 2], В.А. Сулейманова[3]

[1] Институт Систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика
[2] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика
[3] Сумгаитский государственный университет,
Сумгаит, Азербайджанская Республика

АНАЛОГ СПОСОБА РАЗДЕЛЕНИЯ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА НА СЛАГАЕМЫЕ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА – ДАРБУ

Изучается граничная задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса. Установлено необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина при обычных условиях гладкости на данные задачи. Для его обоснования применяется схема доказательства, аналогичная предложенной в работе [8].

Ключевые слова: граничная задача оптимального управления, система Гурса – Дарбу, приращение функционала качества, принцип максимума Понтрягина, множитель Лагранжа.

K.B. Mansimov[1, 2], V.A. Suleymanova[3]

[1] Institute of Control Systems of Azerbaijan NAS, Baku, Azerbaijan Republic
[2] Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic
[3] Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan Republic

ANALOG OF THE METHOD OF DIVIDING THE LAGRANGE MULTIPLIER TO SUMMANDS IN A BOUNDARY PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR GOURSAT – DARBOUX SYSTEMS

We study a boundary problem of optimal control, described by a system of second-order hyperbolic equations with Goursat boundary conditions. A necessary optimality condition of the Pontryagin maximum principle type is established under the usual smoothness conditions for such problems. For the proof we use an analog of the scheme proposed in [8].

Keywords: boundary problem of optimal control, Goursat – Darboux system, quality functional increment, Pontryagin maximum principle, Lagrange multiplier.

Введение

В работах [1–3] А.И. Егоров при помощи аналога метода приращений впервые получил необходимое условие оптимальности типа принципа Понтрягина в задачах оптимального управления системами Гурса – Дарбу. При этом, как и в случае оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями, сопряженное уравнение имело классический вид линейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка, дополненного краевыми условиями в классе кусочно-непрерывных управлений. Но во многих случаях подобные сопряженные уравнения не всегда имеют корректный вид без дополнительных очень жестких условий гладкости на данные задачи. В дальнейшем в работах В.И. Плотникова и В.И. Сумина [4], В.И. Сумина [5], С.С. Ахиева [6], С.С. Ахиева и К.Т. Ахмедова [7] и др. были введены сопряженные уравнения в виде операторного или двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с одномерными слагаемыми, носящие корректный характер и имеющие измеримое ограниченное решение в классе измеримых ограниченных управляющих функций. В работе [8] С.С. Ахиев для задачи оптимального управления системами Гурса – Дарбу ввел новое сопряженное уравнение при помощи метода, получившего название «метод разделения множителя Лагранжа на слагаемые». Отметим, что в [8] рассматривался случай распределенного управления. В настоящей работе (на основе модифицированной методики из [8]) изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса – Дарбу и доказывается аналог принципа максимума Понтрягина.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi\big(a(t_1)\big)+G\big(z(t_1,x_1)\big)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big[D(t,x)z_t+E(t,x,z,z_x)\big]dx\,dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ \ t\in T=[t_0,t_1], \quad (2)$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f(t,x,z,z_x),\ \ (t,x)\in D=[t_0,t_1]\times[x_0,x_1], \quad (3)$$

$$z(t,x_0)=a(t),\ \ t\in T=[t_0,t_1],$$

$$z(t_0,x)=b(\mathrm{x}),\ \ x\in X=[x_0,x_1], \quad (4)$$

$$a(t_0)=b(x_0)=a_0,$$

$$\dot{a} = g\left(t,a,u\right),\ t \in T, \tag{5}$$

$$a\left(t_0\right) = a_0, \tag{6}$$

где $f\left(t,x,z,z_x\right)$, $E\left(t,x,z,z_x\right)$ – заданные n-мерная вектор-функция и скалярная функция соответственно, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по z, z_x; $B\left(t,x\right)$, $D\left(t,x\right)$ – заданные измеримые и ограниченные $n \times n$ матричные функции; $b\left(x\right)$ – заданная n-мерная абсолютно непрерывная вектор-функция; $t_0 < t_1$, $x_0 < x_1$ – заданные числа; a_0 – заданный постоянный вектор; $g\left(t,a,u\right)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по a; $\varphi\left(a\right)$ и $G\left(z\right)$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции; U – заданное непустое и ограниченное множество; $u\left(t\right)$ – измеримая и ограниченная r-мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию $u\left(t\right)$ с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u\left(t\right)$ задача Коши (5)–(6) и задача Гурса (3)–(4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [4, 9–11]) $a\left(t\right)$ и $z\left(t,x\right)$ соответственно.

Допустимое управление $u\left(t\right)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $\left(u\left(t\right),a\left(x\right),z\left(t,x\right)\right)$ – *оптимальным процессом*. Целью данной работы является дать новое доказательство принципа максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче с помощью введения нетрадиционного сопряженного уравнения.

2. Формула приращения критерия качества

Считая $\left(u\left(t\right),a\left(x\right),z\left(t,x\right)\right)$ фиксированным допустимым процессом, через $\left(\bar{u}\left(t\right) = u\left(t\right) + \Delta u\left(t\right), \bar{a}\left(x\right) = a\left(x\right) + \Delta a\left(x\right), \bar{z}\left(t,x\right) = \right.$

$= z(t,x) + \Delta z(t,x))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества:

$$\Delta S(u) = \varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) + G(\bar{z}(t_1,x_1)) - G(z(t_1,x_1)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[D(t,x)\Delta z_t(t,x) + \left[E(t,x,\bar{z},\bar{z}_x) - E(t,x,z,z_x) \right]\right] dx\,dt.$$

С другой стороны, ясно, что

$$\Delta z_{tx}(t,x) = B(t,x)\Delta z_t(t,x) +$$

$$+ \left[f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t)) - f(t,x,z(t,x),u(t)) \right], \tag{7}$$

$$\Delta z(t,x_0) = \Delta a(t),\ t \in T,$$

$$\Delta z(t_0,x) = 0,\ \ x \in X,$$

$$\Delta\dot{a}(t) = g(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t)) - g(t,a(t),u(t)), \tag{8}$$

$$\Delta a(t_0) = 0.$$

Пусть $\psi(t,x)$ – некоторая n-мерная вектор-функция из $L_\infty(D)$, такая, что ее можно представить в виде суммы двух n-мерных вектор-функций $\lambda(t,x)$ и $q(t,x)$ из $L_\infty(D)$. Кроме того, $\lambda(t,x)$ абсолютно непрерывна по x на X при почти всех $t \in T$, $q(t,x)$ абсолютно непрерывна по t на T при почти всех $x \in X$, причем $\lambda(t,x_1)$ и $q(t_1,x)$ абсолютно непрерывны соответственно по t на T и по x на X, а $c = c(t)$ – пока неизвестная n-мерная вектор-функция.

Умножая обе части соотношения (7) слева скалярно на $\psi(t,x) = \lambda(t,x) + q(t,x)$ (и соответственно (8) на $q(t)$), а затем, интегрируя полученные равенства по D (по T), получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (\lambda(t,x) + q(t,x))' \Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (\lambda(t,x) + q(t,x))' B(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)'\left[f\left(t,x,\bar{z},\bar{y}\right)-f\left(t,x,z,y\right)\right]dx\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}c'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}c'(t)\left[g\left(t,\bar{a},\bar{u}\right)-g\left(t,a,u\right)\right]dt,$$

или, в обозначениях:

$$H\left(t,x,z,z_x,\psi\right)=\psi' f\left(t,x,z,y\right)-E\left(t,x,z,z_x\right)=$$

$$=\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)' f\left(t,x,z,y\right)-E\left(t,x,z,z_x\right),$$

$$M\left(t,a,u,c\right)=c' g\left(t,a,u\right),$$

$$\Delta S(u)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)'\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H\left(t,x,\bar{z},\bar{z}_x\right)-H\left(t,x,z,z_x\right)\right]dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}c'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[M\left(t,\bar{a},\bar{u}\right)-M\left(t,a,u\right)\right]dt+\varphi\left(\bar{a}\left(t_1\right)\right)-\varphi\left(a\left(t_1\right)\right)+$$

$$+G\left(\bar{z}\left(t_1,x_1\right)\right)-G\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}D(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt. \qquad (9)$$

Для упрощения записи обозначим:

$$H_z[t,x]=H_z\left(t,x,z,z_x,\psi\right),\ H_{z_x}[t,x]=H_{z_x}\left(t,x,z,z_x,\psi\right);$$

$$f_z[t,x]=f_z\left(t,x,z,z_x,\psi\right),\ f_{z_x}[t,x]=f_{z_x}\left(t,x,z,z_x,\psi\right);$$

$$E_z[t,x]=E_z\left(t,x,z,z_x,\psi\right),\ E_{z_x}[t,x]=E_{z_x}\left(t,x,z,z_x,\psi\right);$$

$$\Delta_{\bar{u}}M[t]=M\left(t,a,\bar{u},c\right)-M\left(t,a,u,c\right).$$

Используя формулу Тейлора и учитывая введенные обозначения, формулу (9) можно представить в следующем виде:

$$\Delta S(u)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)'\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z[t,x]\Delta z(t,x)\,dx\,dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt + c(t_1)\Delta a(t_1) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} c'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} M_a[t]\Delta a(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} M[t]\,dt + \varphi_a(a(t_1))\Delta a(t_1) + G_z(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} D(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt + R(u;\Delta u). \qquad (10)$$

Здесь и в дальнейшем полагаем, что

$$R(u;\,\Delta u) = o_1(\|\Delta a(t_1)\|) + o_2(\|\Delta z(t_1,x_1)\|) + o_3(\|\Delta z(t,x)\|) + o_6(\|\Delta z_x(t,x)\|) +$$
$$+ o_4(\|\Delta a(t)\|) + \Delta_{\bar{u}} M_a[t]\Delta a(t),$$

а величины o_i, $i=\overline{1,4}$, определяются из соответствующих разложений:

$$\varphi(\bar{a}(t_1)) - \varphi(a(t_1)) = \varphi_a'(a(t_1))\Delta a(t_1) + o_1(\|\Delta a(t_1)\|),$$

$$G(\bar{z}(t_1,x_1)) - G(z(t_1,x_1)) = G_z(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1) + o_2(\|\Delta z(t_1,x_1)\|),$$

$$H(t,x,\bar{z},\bar{z}_x,\psi) - H(t,x,z,z_x,\psi) = H_z[t,x]\Delta z(t,x) + H_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x) +$$
$$+ o_3(\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta z_x(t,x)\|),$$

$$M(t,\bar{a},\bar{u},c) - M(t,a,u,c) = \Delta_{\bar{u}(t)} M[t] + \Delta_{\bar{u}} M_a'[t]\Delta a(t) + o_4(\|\Delta a(t)\|).$$

Далее, применяя аналог формулы интегрирования по частям в определенном интеграле, получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (\lambda(t,x) + q(t,x))' \Delta z_{tx}\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \lambda(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\lambda(t,x_1)\Delta z_t(t,x_1)-\lambda(t,x_0)\Delta z_t(t,x_0)\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_x(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[q(t_1,x)\Delta z_x(t_1,x)-\lambda(t_0,x)\Delta z_x(t_0,x)\right]dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q_t'(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_x'(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+\lambda(t_1,x_1)\Delta z(t_1,x_1)-\lambda(t_0,x_1)\Delta z(t_0,x_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\lambda_t'(t,x_1)\Delta z(t,x_1)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q_t(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt+q'(t_1,x_1)\Delta z(t_1,x_1)-$$

$$-q(t_1,x_0)\Delta z(t_1,x_0)-\int_{x_0}^{x_1} q_x(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx-\int_{x_0}^{x_1} q'(t_0,x)\Delta z_x(t_0,x)\,dx=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_x(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q_t(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt-q(t_1,x_0)\Delta a(t_1)+$$

$$+\left(\lambda(t_1,x_1)+q(t_1,x_1)\right)'\Delta z(t_1,x_1)-\int_{t_0}^{t_1}\lambda_t(t,x_1)\Delta z(t,x_1)\,dt-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1} q_x(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx. \tag{11}$$

Учитывая (11), в формуле приращения (10) имеем:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar{u}}M[t]\,dt+\varphi_a\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1)+G_z\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} D(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\lambda_x(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} q_t(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-q(t_1,x_0)\Delta a(t_1)+\left(\lambda(t_1,x_1)+q(t_1,x_1)\right)'\Delta z(t_1,x_1)-\int_{t_0}^{t_1}\lambda_t(t,x_1)\Delta z(t,x_1)\,dt-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}q_x(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z[t,x]\Delta z(t,x)\,dxdt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)\,dxdt+c(t_1)\Delta a(t_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}M_a[t]\Delta a(t)\,dt+R. \qquad (12)$$

Предположим, что существуют измеримые и ограниченные n-мерные вектор-функции $\xi(t,x)$ и $\eta(t,x)$, такие, что $\xi(t,x)$ абсолютно непрерывна по x в X при почти всех $t\in T$, а $\eta(t,x)$ абсолютно непрерывна по t в T при почти всех $x\in X$.

Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\xi(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\xi(t,x)\Delta z(t,x_1)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\xi(t,x_0)\Delta a(t)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\xi_x(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt, \qquad (13)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta'(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt=\int_{x_0}^{x_1}\eta(t_1,x)\Delta z(t_1,x)\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_t(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt\,. \qquad (14)$$

Учитывая формулы (13) и (14) в (12), получаем:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar{u}}M[t]\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\eta_t(t,x)+\xi_x(t,x)+\left(\lambda(t,x)+q(t,x)\right)f_z[t,x]-E_z[t,x]\right]\Delta z(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\eta(t,x)+\lambda_x(t,x)+\big(\lambda(t,x)+q(t,x)\big)B(t,x)\Big]\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\xi(t,x)+q_t(t,x)+\big(\lambda(t,x)+q(t,x)\big)f_{z_x}[t,x]-E_{z_x}[t,x]\Big]\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\Big[\varphi_a\big(a(t_1)\big)-q(t_1,x_0)+c(t_1)\Big]\Delta a(t_1)+$$

$$+\Big[G_z\big(z(t_1,x_1)\big)+\big(\lambda(t_1,x_1)+q(t_1,x_1)\big)\Big]\Delta z(t_1,x_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\dot c(t)+M_a[t]-\xi(t,x_0)\Big]\Delta a(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\lambda_t(t,x_1)-\xi(t,x_1)\Big]\Delta z(t,x_1)\,dt-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Big[q_x(t_1,x)-\eta(t_1,x)\Big]\Delta z(t_1,x)\,dx+R(u;\Delta u).$$

Далее, предположим, что для $\big(\lambda(t,x),q(t,x),\xi(t,x),\eta(t,x),\ c(t)\big)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\eta_t(t,x)+\xi_x(t,x)+\big(\lambda(t,x)+q(t,x)\big)f_z[t,x]-E_z[t,x]=0,\\ \eta(t,x)+\lambda_x(t,x)+\big(\lambda(t,x)+q(t,x)\big)B(t,x)=0,\\ \xi(t,x)+q_t(t,x)+\big(\lambda(t,x)+q(t,x)\big)f_{z_x}[t,x]-E_{z_x}[t,x],\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}q_t(t,x_1)&=\xi(t,x_1),\\ q_x(t_1,x)&=\eta(t_1,x),\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{gathered}\lambda(t_1,x_1)+q(t_1,x_1)=-G_z\big(z(t_1,x_1)\big),\\ \dot c(t)+M_a[t]-\xi(t,x_0)=0,\\ \varphi_a\big(a(t_1)\big)=q(t_1,x_0)-c(t_1).\end{gathered}\tag{17}$$

Тогда формулу приращения (12) функционала качества (1) можно преобразовать к виду

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\Delta_{\bar u}M[t]\,dt+R(u;\Delta u).\tag{18}$$

Задачу (15)–(17) назовем *сопряженной системой* для задачи (1)–(6).

3. Необходимое условие оптимальности

Считая $u(t)$, $t \in T$, оптимальным управлением в рассматриваемой задаче (1)–(6), его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \tag{19}$$

где ε – достаточно малое число, $\varepsilon > 0$; θ – произвольная правильная точка (точка Лебега (см., например, [5, 11])) управления $u(t)$, $\theta \in [t_0, t_1)$.

Через $(\Delta a_{\varepsilon}(t); \Delta z_{\varepsilon}(t,x))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(a(t), z(t,x))$, отвечающее приращению (19) управления.

Из оценок, приведенных, например, в работах [4, 9–11], следует, что

$$\|\Delta a_{\varepsilon}(t)\| \le L\varepsilon, \; \|\Delta z_{\varepsilon}(t,x)\| \le L\varepsilon, \; \|\Delta z_{x}(t,x)\| \le L\varepsilon,$$

значит, $R(u;\Delta u) = o(\varepsilon)$, а из разложения (18) на основе теоремы о среднем получаем

$$\Delta S_{\varepsilon}(u) = S(u + \Delta u_{\varepsilon}) - S(u) = -\varepsilon \, \Delta_{v} M[\theta] + o(\varepsilon) \ge 0,$$

откуда, в силу малости ε, имеем $\Delta_{v} M[\theta] \le 0$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления* $u(t)$ *в задаче* (1)–(6) *необходимо, чтобы выполнялось условие максимума*

$$\max_{v \in U} M(\theta, a(\theta), v, c(\theta)) = M(\theta, a(\theta), u(\theta), c(\theta)).$$

4. О сопряженном уравнении

Перепишем задачу (15)–(17) в следующем эквивалентном виде:

$$\eta_t(t,x) = d_1(t,x),$$

$$\xi_x(t,x) = E_z[t,x] - (\lambda(t,x) + q(t,x)) f_z[t,x] - d_1(t,x),$$

$$\lambda_x(t,x) = -\left(\lambda(t,x) + q(t,x)\right) B(t,x) - \eta(t,x), \tag{20}$$

$$q_t(t,x) = E_{z_x}[t,x] - \left(\lambda(t,x) + q(t,x)\right) f_{z_x}[t,x] - \xi(t,x),$$

$$\eta(t_1,x) = d_2(x),$$

$$\xi(t,x_1) = d_3(t),$$

$$q_x(t_1,x) = d_2(x),$$

$$\lambda_t(t,x_1) = d_3(t),$$

$$q(t_1,x_1) = d_4, \tag{21}$$

$$\lambda(t_1,x_1) = -G_z\left(z(t_1,x_1)\right) - d_4,$$

где $d_1 \in L_\infty(D)$, $d_2 \in L_1([x_0,x_1])$, $d_3 \in L_\infty([t_0,t_1])$ – произвольные функции, $d_4 \in R^n$ – произвольный вектор.

Совокупность этих параметров обозначим $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$.

При каждом фиксированном d задача (20)–(21) является задачей Коши и имеет для каждого d единственное решение $(\lambda_d, q_d, \xi_d, \eta_d)$. Все решения задачи (20)–(21) обладают важным свойством, которое отражено в следующей теореме.

Теорема 2. *Для всех решений* $(\lambda_d, q_d, \xi_d, \eta_d)$ *задачи* (20)–(21) *сумма* $\lambda_d(t,x) + q_d(t,x)$ *инвариантна, т.е. не меняется при изменении* d *и является единственным в классе* $L_\infty(D)$ *решением системы интегральных уравнений типа Вольтерра:*

$$\psi(t,x) = -G_z\left(z(t_1,x_1)\right) + \int_t^{t_1}\int_x^{x_1}\left[\psi'(\tau,s) f_z[\tau,s] - E_z[\tau,s]\right] ds\, d\tau +$$

$$+ \int_t^{t_1}\left[\psi(\tau,x) f_{z_x}[\tau,x] - E_{z_x}[\tau,x]\right] d\tau + \int_x^{x_1} \psi(t,s) B(t,s)\, ds.$$

Доказательство. Из системы (20) получаем:

$$\eta(t,x) = \int_{t_1}^{t} d_1(\tau,x)\, d\tau + \eta(t_1,x),$$

$$\xi(t,x)=\int_{x_1}^{x}\left(E_z[t,s]-\left(\lambda(t,s)+q(t,s)\right)f_z[t,s]\right)ds-\int_{x_1}^{x}d_1(t,s)\,ds+\xi(t,x_1),$$

$$\lambda(t,x)=-\int_{x_1}^{x}\left(\lambda(t,s)+q(t,s)\right)B(t,s)\,ds-\int_{x_1}^{x}\eta(t,s)\,ds+\lambda(t,x_1),$$

$$q(t,x)=\int_{t_1}^{t}\left(E_{z_x}[\tau,x]-\left(\lambda(\tau,x)+q(\tau,x)\right)f_{z_x}[\tau,x]\right)d\tau-\int_{t_1}^{t}\xi(\tau,x)\,d\tau+q(t_1,x).$$

Отсюда с учетом условия (21) имеем:

$$\eta(t,x)=\int_{t_1}^{t}d_1(\tau,x)\,d\tau+d_2(x),$$

$$\xi(t,x)=\int_{x_1}^{x}\left(E_z[t,s]-\left(\lambda(t,s)+q(t,s)\right)f_z[t,s]\right)ds-\int_{x_1}^{x}d_1(t,s)\,ds+d_3(t),$$

$$\lambda(t,x)=-\int_{x_1}^{x}\left(\lambda(t,s)+q(t,s)\right)B(t,s)\,ds-\int_{x_1}^{x}\int_{t_1}^{t}d_1(\tau,s)\,ds\,d\tau-\int_{x_1}^{x}\eta(t_1,s)\,ds+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d_3(\tau)\,d\tau+\lambda(t_1,x_1), \qquad (22)$$

$$q(t,x)=\int_{t_1}^{t}\left(E_{z_x}[\tau,x]-\left(\lambda(\tau,x)+q(\tau,x)\right)f_{z_x}[\tau,x]\right)d\tau-$$

$$-\int_{t_1}^{t}\int_{x_1}^{x}\left(E_z[\tau,s]-\left(\lambda(\tau,s)+q(\tau,s)\right)f_z[\tau,s]\right)ds\,d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\int_{x_1}^{x}d_1(\tau,s)\,ds\,d\tau-\int_{t_1}^{t}d_3(\tau)\,d\tau-\int_{x_1}^{x}d_2(s)\,ds+q(t_1,x_1). \qquad (23)$$

Суммируя соотношения (22) и (23), получаем:

$$\lambda(t,x)+q(t,x)=-\int_{x_1}^{x}\left(\lambda(t,s)+q(t,s)\right)B(t,s)\,ds-\int_{x_1}^{x}\int_{t_1}^{t}d_1(\tau,s)\,ds\,d\tau-$$

$$-\int_{x_1}^{x}\eta(t_1,s)\,ds+\int_{t_1}^{t}d_3(\tau)\,d\tau+\left(\lambda(t_1,x_1)+q(t_1,x_1)\right)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\Big(\big(\lambda(\tau,x)+q(\tau,x)\big)f_{z_x}[\tau,x]-E_{z_x}[\tau,x]\Big)d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\Big(\big(\lambda(\tau,s)+q(\tau,s)\big)f_z[\tau,s]-E_z[\tau,s]\Big)ds\,d\tau+\int_{t_1}^{t}\int_{x_1}^{x}d_1(\tau,s)\,ds\,d\tau-$$

$$-\int_{t_1}^{t}d_3(\tau)\,d\tau-\int_{x_1}^{x}d_2(s)\,ds=-G_z\big(z(t_1,x_1)\big)+$$

$$+\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\big(\psi'(\tau,s)f_z[\tau,s]-E_z[\tau,s]\big)ds\,d\tau+$$

$$+\int_{t}^{t_1}\big(\psi'(\tau,x)f_{z_x}[\tau,x]-E_{z_x}[\tau,x]\big)d\tau+\int_{x}^{x_1}\psi(t,s)B(t,s)\,ds.$$

Теорема полностью доказана.

Заключение

Рассматривается одна граничная задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических уравнений с краевыми условиями Гурса. Используя аналог метода разделения множителя Лагранжа на слагаемые и модифицируя метод приращений, удалось построить новую формулу приращения функционала качества и доказать на ее основе необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Авторы благодарны Р.О. Масталиеву за полезные обсуждения полученных в работе результатов.

Список литературы

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлениии процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1964. – № 5. – С. 613–623.

2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. – 1965. – Т. 29, № 6. – С. 1205–1260.

3. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенным параметрами // Математический сборник. – 1966. – Т. 69 (111). – № 3. – С. 371–421.

4. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса – Дарбу // Журн. вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т. 12, вып. 1. – С. 61–67.

5. Сумин В.И.Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: автореф. дис. … канд. физ-мат. наук / Горьк. ун-т. – Горький, 1975. – 16 с.

6. Ахиев С.С. Некоторые вопросы теории оптимального управления: автореф. дис. … канд. физ-мат. наук / АГУ им. С.М. Кирова. – Баку, 1973. – 16 с.

7. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. – 1972. – № 5. – С. 12–16.

8. Ахиев С.С. Способ разделения множителя Лагранжа на слагаемые // Докл. АН Азерб. ССР. – 1976. – № 5. – С. 3–6.

9. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения: в 2 ч. Оптимальное управление / отв. ред. А.П. Меренков; АН СССР, Сиб. отд-ние, Сиб. энерг. ин-т. – Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1990. – 151 с.

10. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1989. – 154 с.

11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

References

1. Yegorov A.I. Ob optimal'nom upravleniii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On optimal control of processes in some systems with distributed parameters]. *Automation and Remote Control*, 1965, no. 5, pp. 613-623.

2. Yegorov A.I. Optimal'nyye protsessy v sistemakh s raspredelennymi parametrami i nekotoryye zadachi teorii invariantnosti [Optimal processes in distributed parameter systems and certain problems in invariance theory]. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1965, no. 29 pp.1205-1260.

3. Egorov A.I. Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti dlya sistem s raspredelennym parametrami [Necessary optimality conditions for distributed-parameter systems]. *Mathematics of the USSR, Sbornik*, 1966, Vol. 69(111), no. 3, pp. 371-421.

4. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Optimizatsiya ob'yektov s raspredelennymi parametrami opisyvayemykh sistemami Gursa-Darbu [The optimization of objects

with distributed parameters, described by Goursat-Darboux systems] *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, vol. 12, iss. 1, pp.73–92, DOI: 10.1016/0041-5553(72)90066-3

5. Sumin V.I. Optimizatsiya upravlyayemykh obobshchennykh vol'terrovykh system [Optimization of controlled generalized Volterra systems]. Abstract of Ph. D. thesis. Gorkiy, 1975, 16 p.

6. Akhiyev S.S. Nekotoryye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya [Some questions of the theory of optimal control]. Abstract of Ph. D. thesis. Baku, 1973, 16 p.

7. Akhmedov K.T. Akhiyev S.S. Neobkhodimyye usloviyaoptimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary conditions of optimality for some problems of optimal control theory]. *Doklady akademii nauk azerbajdzhanskoj SSR*, 1972, vol. 28, no. 5, pp. 12-16.

8. Akhiyev S.S. Sposob razdeleniya mnozhitelya Lagranzha na slagayemyye [A method of dividing the Lagrange multiplier into terms]. *Doklady akademii nauk azerbajdzhanskoj SSR*, 1976, vol. 31, no. 5. pp. 3-6.

9. Vasil'yev O.V. Srochko V.A., Terletskiy V.A. Metody optimizatsii i ikh prilozhenniya [Optimization methods and their applications]. Novosibirsk, Nauka, 1990, 151 p.

10. Srochko V.A.Variatsionnyy printsip maksimuma i metody linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Variational maximum principle and linearization methods in optimal control problems]. Irkutsk, Irkutskij universitet, 1989, 154 p.

11. Vasilyev F.P. Cislenniye metodi resheniya ekstremalnix zadach [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka, 1988, 520 p.

Получено 23.05.2019

Сведения об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджан) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде, 68, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Сулейманова Вусаля Абдулла кызы (Сумгаит, Азербайджан) – ассистент кафедры «Математика и методика ее преподавания», Сумгаитский государственный университет (г. Сумгаит, Az5008, 43-й квартал, e-mail: vusalevusale16@gmail.com).

About the authors

Kamil B. Mansimov (Baku, Azerbaijan Republic) – Dr. Habil. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Mathematical Cybernetics Chair, Baku State University, Head of the Laboratory of Control in Complex Dynamic Systems, Institute of Control Systems of ANAS (Baku, Az1141, B. Vahabzade st., 68, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Vusalya A. Suleymanova (Sumgait, Azerbaijan Republic) – Assistant, Department of Mathematics and its Teaching Metothods, Sumgait State University (43rd block, Sumgait, Azerbaijan, Az5008, e-mail: vusalevusale16@gmail.com).