DOI: 10.15593/2499-9873/2019.2.06
УДК 519.7

А.О. Алексеев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

КОМПЛЕКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Формулируется постановка задачи комплексного оценивания сложных объектов в условиях неопределенности. Приводится семь способов оценивания состояния отдельных свойств сложного объекта, предназначенных для различных условий неопределенности. Источником неопределенности могут служить средства объективного контроля, т.е. оценки частных свойств объекта могут быть как точными значениями на множестве действительных чисел, так и интервальными оценками. Помимо этого, о состоянии отдельных свойств может иметься распределение вероятностей о возможном состоянии объекта. Качественно-описываемые свойства объекта подвержены неопределенности, источником которой является субъективность суждений экспертов, привлекаемых для их оценивания. Важно, что экспертами могут быть оценены и количественные показатели, например, в случаях когда средства объективного контроля недоступны, т.е. субъективные способы ввода применимы не только к качественным показателям, но и количественным. Для агрегирования информации о частных свойствах предлагается использовать известные и полученные автором матричные механизмы комплексного оценивания. Описываются три матричных механизма нечеткого комплексного оценивания с максиминным и аддитивно-мультипликативным подходами к теоретико-множественным операциям, а также два эквивалентных им непрерывных матричных механизма комплексного оценивания. На примере шести модельных примеров показаны процедуры агрегирования двух критериев как с точными действительными значениями, так и с различной неопределенностью: критерии с интервальными оценками, нечеткими значениями и Ф-нечеткими.

Ключевые слова: сложные объекты, агрегирование, механизмы ранжирования и контроля, разработка механизмов, неопределенность.

A.O. Alekseev

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

RATING AND CONTROL OF COMPLEX OBJECTS IN UNCERTAINTY CASES

Statement of the rating and control of complex objects problem under uncertainty is formulated. Seven methods are presented for assessing the state of individual properties of a complex object, designed for various conditions of uncertainty. The source of uncertainty can serve as objective tools of control, that is, estimates of particular properties of an object can be either exact values on a set of real numbers or interval estimates, in addition to this, the state of individual properties can have a probability distribution about the possible state of an object. The qualitatively described properties of an object are subject to uncertainty, the source of which is the subjectivity of the judgments of experts involved in their evaluation. It is important that experts can also evaluate quantitative indicators, for example, in cases where the tools of objective control are not available, that is, subjective input methods are applicable not only to qualitative indicators, but also quantitative ones. In order to aggregate information about private properties, it is proposed to use the matrix mechanisms of complex assessment that are known and obtained by the author. The defined matrix mechanisms of complex evaluation are as follows: the tree fuzzy rating mechanism with an additive-multiplicative approach and two max-min approaches to set theoretic operations, as well as two continuous complex evaluation mechanisms. Six model examples demonstrate procedures of aggregating two criteria with accurate real values, as well as with different uncertainty such as interval values, fuzzy values and F-Fuzzy values.

Keywords: complex objects, aggregation, rating and control mechanism, mechanism design, uncertainty.

Введение

Механизмы ранжирования и контроля основаны на агрегировании информации об управляемом объекте (группе объектов или системе). Агрегирование, или комплексное оценивание разнородной информации, в недавнем времени оставалось актуальной научной проблемой многокритериального принятия решений, управления и оптимизации, имеющей широкий спектр практических приложений [1–6].

Механизмы агрегирования – это механизмы ранжирования и контроля, исследуемые в теории управления организационными системами [7, 8]. Существует несколько групп ученых [9–16 и др.], разработавших специальные методы и алгоритмы комплексного оценивания, применимые в различных условиях. Сложные объекты могут обладать набором разнородных свойств как числовой, так и нечисловой природы, а также обладать разной формой и степенью неопределенности относительно состояния частных параметров, а также различными источниками их возникновения. Поэтому востребовано агрегирование информации, имеющей широкий спектр практических приложений, до одного или нескольких укрупненных показателей.

В работе [16] показано, какие матричные механизмы комплексного оценивания целесообразно использовать при той или иной неопределенности сложного объекта. Система классификации матричных механизмов комплексного оценивания была предложена там же [16]. Основаниями для классификации являются форма неопределенности о состоянии частных свойств сложного объекта и подходы к вычислению комплексных оценок.

1. Задача комплексного оценивания сложных объектов в условиях неопределенности

Система комплексного оценивания – это совокупность набора критериев, наборов термов, функций приведения, графа и набора матриц свертки, подходящих для комплексного оценивания сложных объектов конкретной предметной области.

Задача комплексного оценивания сложных объектов заключается в установлении отображения между пространством сложных объектов и ограниченным множеством действительных значений с помощью механизма комплексного оценивания (МКО / RCM):

$$\mathrm{RCM} : \mathrm{O} \to \mathrm{V} \subset \mathrm{R}^1, \tag{1}$$

где O – пространство состояний сложного объекта; V – действительнозначная шкала комплексной оценки.

Матричный механизм комплексного оценивания (ММКО) – это механизм комплексного оценивания (1), который задается кортежем

$$\langle P,\ G,\ M,\ Q \rangle, \tag{2}$$

где P – процедура комплексного оценивания; G – граф, определяющий последовательность агрегирования (свертки) частных факторов в комплексную оценку, узлам дерева G соответствуют матрицы свертки; M – множество матриц свертки, матрица свертки является подмножеством декартового произведения шкал качественного оценивания сворачиваемых факторов и шкалы обобщенной, агрегированной оценки, матрица задается множеством элементов $m = \{m_{rc}\}$, $r = \{1, \ldots, \overline{r}\}$, $c = \{1, \ldots, \overline{c}\}$); Q – критериальное (квалиметрическое) пространство, образованное множеством шкал качественного оценивания частных критериев K, промежуточных сверток и шкалой комплексной оценки V; K – множество частных свойств (параметров, факторов, критериев), по которым оценивается сложный объект, данное множество образовано двумя подмножествами $K = K_q \cup K_n$, K_q – подмножество качественно описываемых свойств объекта, K_n – подмножество количественно измеримых свойств объекта; элементы множества $K_q \subseteq K$, $q = \overline{1, \overline{q}}$ оцениваются с помощью термов t_q из множеств T_q: $t_q \in T_q$, $T = \prod_q T_q$, $\overline{q}$ – число качественно-описываемых свойств объекта; элементы множества $K_n \subseteq K, n = \overline{1, \overline{n}}$ оцениваются с помощью действительнозначных шкал $x_n \in \Phi_n \subseteq R^1$, $\Phi = \prod_n \Phi_n$, $\overline{n}$ – число количественно измеримых свойств объекта.

Тогда состояние сложного объекта o задается в пространстве O:

$$O = \left(\prod_{q=1,\overline{\overline{q}}} K_q \times T \right) \times \left(\prod_{n=1,\overline{\overline{n}}} K_n \times \Phi \right)$$

и определяется вектором $o \in O : o = \left\{ t_q, x_n \right\}, q = \overline{1, \overline{q}}, n = \overline{1, \overline{n}}.$

При наличии неопределенности о состоянии отдельных количественно измеримых факторов элементы вектора, описывающего состояние объекта, представляют собой при интервальной неопределенности пару оценок $\left\{ \underline{x_i}, \overline{x_i} \right\}, x_i \in \Phi_i, \Phi_i \subseteq \Phi, i \in \left\{ 1, \ldots, \overline{i} \right\}, \overline{i}$ – число количественно измеримых факторов, описываемых интервально, а при стохастической неопределенности – распределение вероятностей $P\left(x_p \right), x_p \in \Phi_p, \Phi_p \subseteq \Phi, p \in \left\{ 1, \ldots, \overline{p} \right\}, \overline{p}$ – число количественно измеримых факторов, носящих случайный характер. Стоит отметить, что качественно описываемые свойства объекта подвержены неопределенности, источником которой является субъективность суждений экспертов, привлекаемых для их оценивания.

Поэтому в общем случае состояние сложного объекта описывается вектором $o = \left\{ t_q, t_n, \left\{ \underline{x_i}, \overline{x_i} \right\}, P\left(x_p \right) \right\}$, $q = \overline{1, \overline{q}}$, $n = \overline{1, \overline{n} - \overline{i} - \overline{p}}$, $i \in \left\{ 1, \ldots, \overline{i} \right\}$, $p \in \left\{ 1, \ldots, \overline{p} \right\}$. При этом задача комплексного оценивания (1) сохраняется, однако в случае интервальной неопределенности комплексная оценка представляет собой интервал $\left\{ \underline{v}, \overline{v} \right\}$, $\underline{v}, \overline{v} \in V$. В случае стохастической неопределенности комплексная оценка представляет собой распределение вероятностей $P\left(v \right)$ на множестве V.

Применительно к количественно измеримым свойствам объекта источником неопределенности могут служить средства объективного контроля, т.е. оценки частных свойств объекта могут быть как точными значениями на множестве действительных чисел, так и интервальными оценками, в том числе о состоянии отдельных свойств может иметься распределение вероятностей о возможном состоянии объекта.

Качественно-описываемые свойства объекта подвержены неопределенности, источником которой является субъективность суждений экспертов, привлекаемых для их оценивания.

В связи с этим целесообразно одним из оснований для классификации механизмов комплексного оценивания использовать степень неопределенности о состоянии частных факторов сложного объекта. Для классификации будем использовать критерий «неопределенность» и выделять следующие классы неопределенности: *высокая*; *средняя*; *низкая и очень низкая* или *отсутствует*.

Субъективные оценки могут высказываться с разной степенью модальности. Под разной степенью модальности подразумевается, что лица, привлеченные к оцениванию свойств, в зависимости от их квалификации могут высказать различные суждения (табл. 1).

Таблица 1

Соответствие исходных данных уровню неопределенности и предлагаемому способу описания сложного объекта

Количественные оценки (объективные входные данные), ОВ			Качественные оценки (субъективные входные данные), СВ		
Источник данных	Неопределенность	Код	Источник данных	Неопределенность	Код
Данных объективного контроля нет	Высокая	–	Молодой специалист*	Условно высокая	СВ1
Оценка измерений с погрешностью (интервальная оценка)	Средняя или низкая	ОВ1	Специалист*	Условно средняя	СВ2
Распределение вероятностей	Средняя или низкая	ОВ2	Эксперт*	Условно низкая	СВ3
Точная оценка измерений с минимальной погрешностью	Очень низкая или отсутствует	ОВ3	Группа экспертов	Очень низкая или отсутствует	СВ4

Примечание: разделение степени неопределенности субъективных оценок по уровню квалификации на категории «молодой специалист», «специалист» и «эксперт» условно.

СВ1 – свойства сложного объекта описываются с помощью Ф-нечетких переменных:

$$\tilde{\tilde{o}} = \left\{ \tilde{\tilde{t}}_q, \tilde{\tilde{x}}_n \right\}, \tilde{\tilde{x}}_n = \left\{ x_n / \left\{ \underline{\mu}_{x_n}, \overline{\mu}_{x_n} \right\} \right\}, \tilde{\tilde{t}}_q = \left\{ t_q / \left\{ \underline{\mu}_{t_q}, \overline{\mu}_{t_q} \right\} \right\},$$

где $q = \overline{1, \overline{q}}$, $\overline{q}$ – число качественно-описываемых свойств объекта; $n = \overline{1, \overline{n}}$, $\overline{n}$ – число количественно-измеримых свойств объекта.

СВ2 – свойства сложного объекта описываются с помощью нечетких переменных:

$$\tilde{o} = \left\{ \tilde{t}_q, \tilde{x}_n \right\}, \tilde{x}_n = \left\{ x_n / \mu_{x_n} \right\}, \tilde{t}_q = \left\{ t_q / \mu_{t_q} \right\}.$$

СВ3 – свойства сложного объекта описываются с помощью нечетких переменных, имеющих ограничение на вход – равенство единице суммы значений функции принадлежности, а также с использованием ближайших по смыслу категорий (термов):

$$\tilde{o} = \left\{ \tilde{t}_q, \tilde{x}_n \right\}, \tilde{x}_n = \left\{ x_n / \mu_{x_n} \right\}, \tilde{t}_q = \left\{ t_q / \mu_{t_q} \right\}, \sum \mu_{x_n} = 1, \sum \mu_{t_q} = 1.$$

СВ4 – свойства сложного объекта оцениваются группой экспертов с помощью процедур активной экспертизы, в том числе нечеткой и интервальной. В этом случае степень неопределенность результата активной экспертизы будет определяться по участнику, обладающему наихудшей неопределенностью.

ОВ1 – свойства сложного объекта описываются с помощью интервальных оценок:

$$o = \left\{ \left\{ \underline{x}_i, \overline{x}_i \right\} \right\},$$

где $i \in \left\{ 1, \ldots, \overline{i} \right\}$, $\overline{i}$ – число количественно-измеримых факторов, описываемых интервально.

ОВ2 – свойства сложного объекта описываются с помощью распределения вероятностей:

$$o = \left\{ P\left(x_p \right) \right\},$$

где $p \in \left\{ 1, ..., \overline{p} \right\}$, $\overline{p}$ – число количественно-измеримых факторов, носящих случайный характер.

ОВ3 – свойства сложного объекта описываются с помощью точных или приближенных оценок:

$$o = \{x_n\}.$$

В общем случае состояние сложного объекта описывается вектором $o = \left\{t_q, x_n, \left\{\underline{x}_i, \overline{x}_i\right\}, P\left(x_p\right)\right\}$, $q = \overline{1, \overline{q}}$, $n = \overline{1, \overline{n} - \overline{i} - \overline{p}}$, $i \in \left\{1, \ldots, \overline{i}\right\}$, $p \in \left\{1, \ldots, \overline{p}\right\}$.

Стоит отметить, что и количественные показатели также могут быть оценены экспертами, например в случаях, когда средства объективного контроля недоступны, т.е. способы ввода класса СВ применимы не только к качественным показателям, но и количественным. При этом объективно оценить качественные свойства не представляется возможным (табл. 2).

Таблица 2

Отношение свойств сложных объектов и способов их оценки

Свойства сложного объекта		Способ оценки частных свойств	
		Объективно	Субъективно
Количественные	x_n	ОВ1, ОВ2, ОВ3	СВ1, СВ2, СВ3, СВ4
Качественные	t_q	–	СВ1, СВ2, СВ3, СВ4

Учитывая сказанное выше, приведем классификацию возможных состояний частных свойств в условиях неопределенности (табл. 3).

Таблица 3

Классификация возможных состояний свойств сложных объектов

Источник неопределенности	Источник информации	Способ формализации	Состояние сложного объекта описывается вектором	Функции приведения: $o \to Q_o$
Квалификация пользователей МКО	Молодой специалист	Ф-нечеткие / мягкие множества	$\tilde{\tilde{o}} = \left\{\tilde{\tilde{t}}_q, \tilde{\tilde{x}}_n\right\}$, $\tilde{\tilde{x}}_n = \left\{x_n / \left\{\underline{\mu}_{x_n}, \overline{\mu}_{x_n}\right\}\right\}$, $\tilde{\tilde{t}}_q = \left\{t_q / \left\{\underline{\mu}_{t_q}, \overline{\mu}_{t_q}\right\}\right\}$	$X_n = f_n\left(x_n\right)$, $X_q = f_q\left(t_q\right)$

Окончание табл. 3

Источник неопределенности	Источник информации	Способ формализации	Состояние сложного объекта описывается вектором	Функции приведения: $o \to Q_o$
	Специалист	Нечеткие множества	$\tilde{o} = \{\tilde{t}_q, \tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n = \{x_n / \mu_{x_n}\}$, $\tilde{t}_q = \{t_q / \mu_{t_q}\}$	
	Эксперт	Нечеткие множества с ограничением на функции принадлежности	$\tilde{o} = \{\tilde{t}_q, \tilde{x}_n\}$, $\tilde{x}_n = \{x_n / \mu_{x_n}\}$, $\tilde{t}_q = \{t_q / \mu_{t_q}\}$, $\sum \mu_{x_n} = 1$, $\sum \mu_{t_q} = 1$	
	Группа экспертов	Процедуры активной экспертизы	$o = \{\{t_q\}, \{x_n\}\}$, $t_q = \pi(\{t_q\})$, $x_n = \pi(\{x_n\})$	
Имеющиеся данные объективного контроля	Приборы с погрешностью	Интервальные оценки	$o = \{\{\underline{x}_i, \overline{x}_i\}\}$	$X_n = f(x_n)$
	Статистика	Распределение вероятностей	$o = \{P(x_p)\}$	
	Точные приборы	Точные или приближенные оценки	$o = \{x_n\}$	

2. Матричные механизмы комплексного оценивания

Известны матричные механизмы нечеткого комплексного оценивания (Нечеткие ММКО) с максиминным подходом и с аддитивно-мультипликативным подходами к теоретико-множественным операциям, а также два эквивалентных им непрерывных матричных механизма комплексного оценивания (Непрерывные ММКО).

В случае применения Нечетких ММКО элементам матрицы m_{rc} соответствует несколько значений функции принадлежности. Для определения единственного значения функции принадлежности необходимо использовать теоретико-множественную операцию пересечения (3) или (4):

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{X_i / \mu_A\} \cap \{X_i / \mu_B\} = \{X_i / \min(\mu_A; \mu_B\}, \quad (3)$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{X_i / \mu_A\} \cap \{X_i / \mu_B\} = \{X_i / \mu_A \cdot \mu_B\}, \quad (4)$$

где X_i – элемент носителя нечеткого множества, μ_A и μ_B – значения функций принадлежности элемента X_i нечетким множествам $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

Для элементов матрицы сверки, которые имеют одно и то же значение, необходимо использовать теоретико-множественную операции объединения (5) или (6), в соответствии с процедурой нечеткого комплексного оценивания:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{X_i / \mu_A\} \cup \{X_i / \mu_B\} = \{X_i / \max(\mu_A; \mu_B\}, \quad (5)$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{X_i / \mu_A\} \cup \{X_i / \mu_B\} = \{X_i / \mu_A + \mu_B\}. \quad (6)$$

Подход, использующий операции (3) и (5), называется максиминным – $\mathrm{P_{MM}}$. Подход, использующий операции (4) и (6), называется аддитивно-мультипликативным – $\mathrm{P_{AM}}$.

Результат матрицы свертки примет форму нечеткого числа $\tilde{v} \in \tilde{V}$:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{\underline{m_{rc}} / \mu_{\underline{m_{rc}}}, \ldots, \overline{m_{rc}} / \mu_{\overline{m_{rc}}}\right\}, \quad (7)$$

где $\left\{\underline{m_{rc}}, \ldots, \overline{m_{rc}}\right\}$ – градации шкалы $v \in R^1$, описывающей свертку факторов $\tilde{X}_r$ и $\tilde{X}_c$, элементы m_{rc} принимают значения из этого множества, $\mu_{m_{rc}}$ – определяются по выбранной процедуре $\mathrm{P_{MM}}$ или $\mathrm{P_{AM}}$.

Для того чтобы представить результат агрегирования в форме числа, принадлежащего множеству действительных значений $v \in R^1$, в работе [9] предлагается использовать уравнение центра масс (8), которое с учетом принятых в данной работе обозначений примет вид

$$v = \left(\sum_{m_{rc}} \mu_{m_{rc}} \cdot m_{rc}\right) \Bigg/ \left(\sum_{m_{rc}} \mu_{m_{rc}}\right). \quad (8)$$

Введем так называемые [9] стандартные функции свертки, являющиеся подмножествами матрицы, образованные элементами

$(m_{rc};\ m_{r+1c};\ m_{rc+1};\ m_{r+1c+1})$ (табл. 4). Эти функции имеют простую интерпретацию, описываемую с помощью естественного языка.

Таблица 4

Стандартные функции свертки и их базовая интерпретация

Обозначение	Стандартные функции свертки	Элементы матрицы			
Fi	Качественная интерпретация	m_{rc}	m_{r+1c}	m_{rc+1}	m_{r+1c+1}
F0	Комплексная оценка не увеличивается при росте любого критерия	v	v	v	v
F1	Комплексная оценка увеличивается при росте обоих критериев	v	v	v	$v + 1$
F2	Комплексная оценка увеличивается только при росте критерия *c*	v	v	$v + 1$	$v + 1$
F3	Комплексная оценка увеличивается только при росте критерия *r*	v	$v + 1$	v	$v + 1$
F4	Комплексная оценка увеличивается при росте любого критерия	v	$v + 1$	$v + 1$	$v + 1$
F5	Аналогично *F4*, но при росте обоих критериев возникает синергетический эффект	v	$v + 1$	$v + 1$	$v + 2$

Эти подмножества матрицы свертки можно интерполировать, используя процедуру нечеткого комплексного оценивания, и на непрерывной области определения аргументов свертки можно построить трехмерные поверхности, соответствующие стандартным функциям. Далее ограничимся иллюстрацией полученных поверхностей, используя стандартные функции *F1*, *F2* и *F4*. Мы не будем рассматривать стандартные функции *F0*, поскольку получается плоская поверхность, параллельная области определения сворачиваемых критериев и *F3*, так как достаточно показать стандартную функции *F2*, потому что $F3 = F2^T$. Мы также не будем рассматривать стандартную функцию *F5* в силу ограниченного объема статьи.

В случае использования Нечетких ММКО с максиминным подходом к теоретико-множественным операциям деффазифицированная согласно (8) комплексная оценка имеет погрешность. Этот случай был рассмотрен в работах [10–12]. Следующие результаты (рис. 1) были получены применительно к стандартным функциям *F1*, *F2* и *F4*:

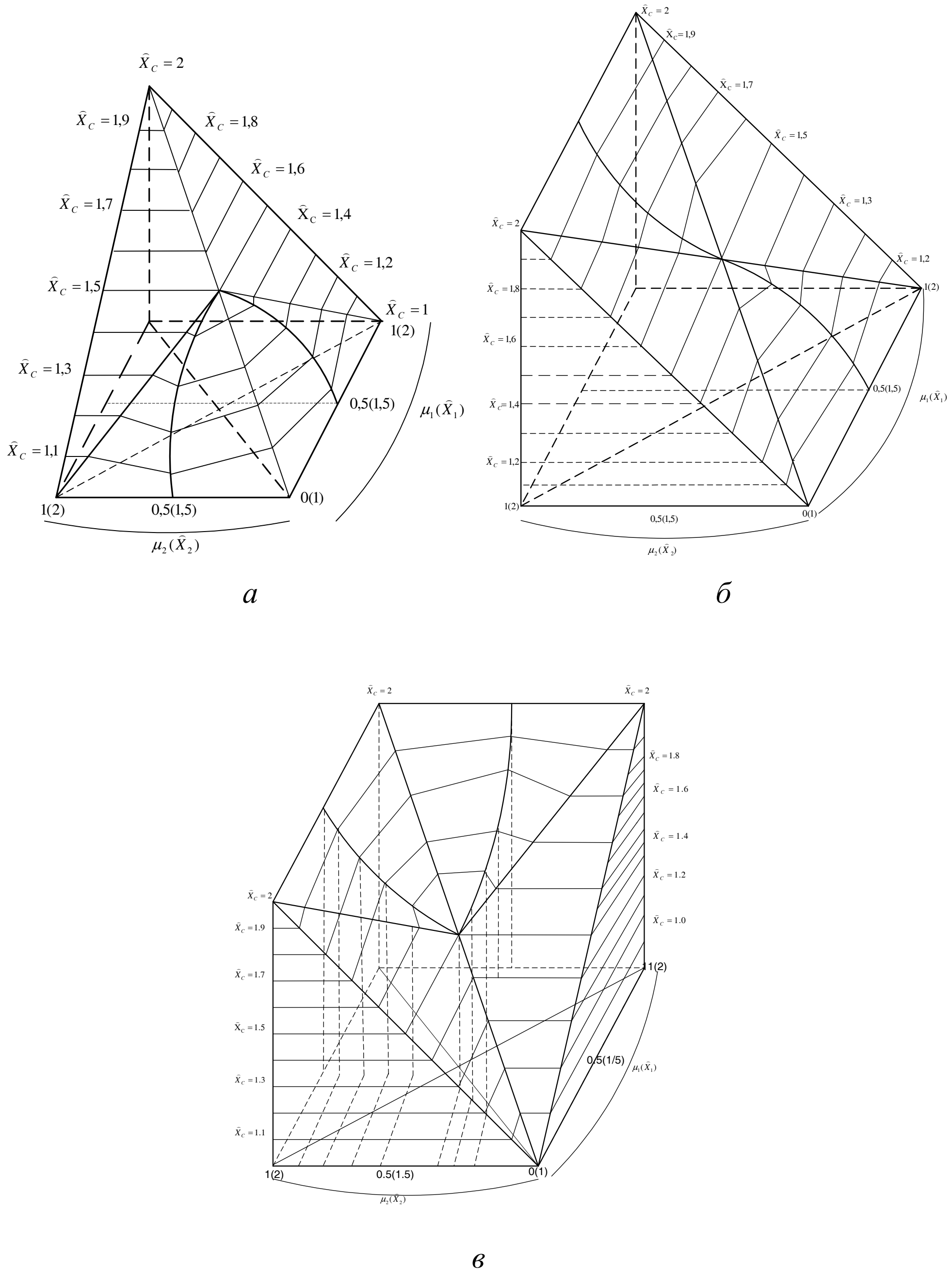


Рис. 1. Топологическое представление стандартных функций: *а – F1*; *б – F2*; *в – F4*, при использовании максиминного подхода с операцией пересечения (3) и объединения (5) над нечеткими множествами

Для снижения погрешности необходимо использовать следующие операции:

– для стандартной функции *F0*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{m_{rc} / 1\right\}, \tag{9}$$

– для стандартной функции *F1*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \begin{Bmatrix} m_{rc} / (1 - \mu_{X_c}); m_{rc} + 1 / \mu_{X_c} \; if \; X_c \geq X_r \\ m_{rc} / (1 - \mu_{X_r}); m_{rc} + 1 / \mu_{X_r} \; if \; X_c < X_r \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

– для стандартной функции *F2*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{m_{rc} / (1 - \mu_{X_c}); m_{rc} + 1 / \mu_{X_c}\right\}, \tag{11}$$

– для стандартной функции *F3*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{m_{rc} / (1 - \mu_{X_r});\; m_{rc} + 1 / \mu_{X_r}\right\}, \tag{12}$$

– для стандартной функции *F4*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \begin{Bmatrix} m_{rc} / (1 - \mu_{X_r});\; m_{rc} + 1 / \mu_{X_r} \; if \; X_r \geq X_c \\ m_{rc} / (1 - \mu_{X_c});\; m_{rc} + 1 / \mu_{X_c} \; if \; X_r < X_c \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

– для стандартной функции *F5*:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{m_{rc} / (1 - \mu_{X_r} - \mu_{X_c}); m_{rc} + 1 / \mu_{X_r} + \mu_{X_c}\right\}. \tag{14}$$

Операции (10) и (13) эквивалентны операциям минимума и максимума соответственно. Поэтому данный подход также будем называть максиминным. В случае использования этих операций стандартные функции примут вид без погрешности (рис. 2).

В случае использования аддитивно-мультипликативного подхода стандартные функции примут вид, показанный на рис. 3.

Нечеткий ММКО с аддитивно-мультипликативным подходом $\left\langle G, M, Q, P_{AM} \right\rangle$ эквивалентен ММКО с дискретными шкалами, каждой градации которой имеется некоторая вероятность. Другими словами, агрегируемые критерии имеют функции распределения вероятностей. Последний случай был предложен в работе [17].

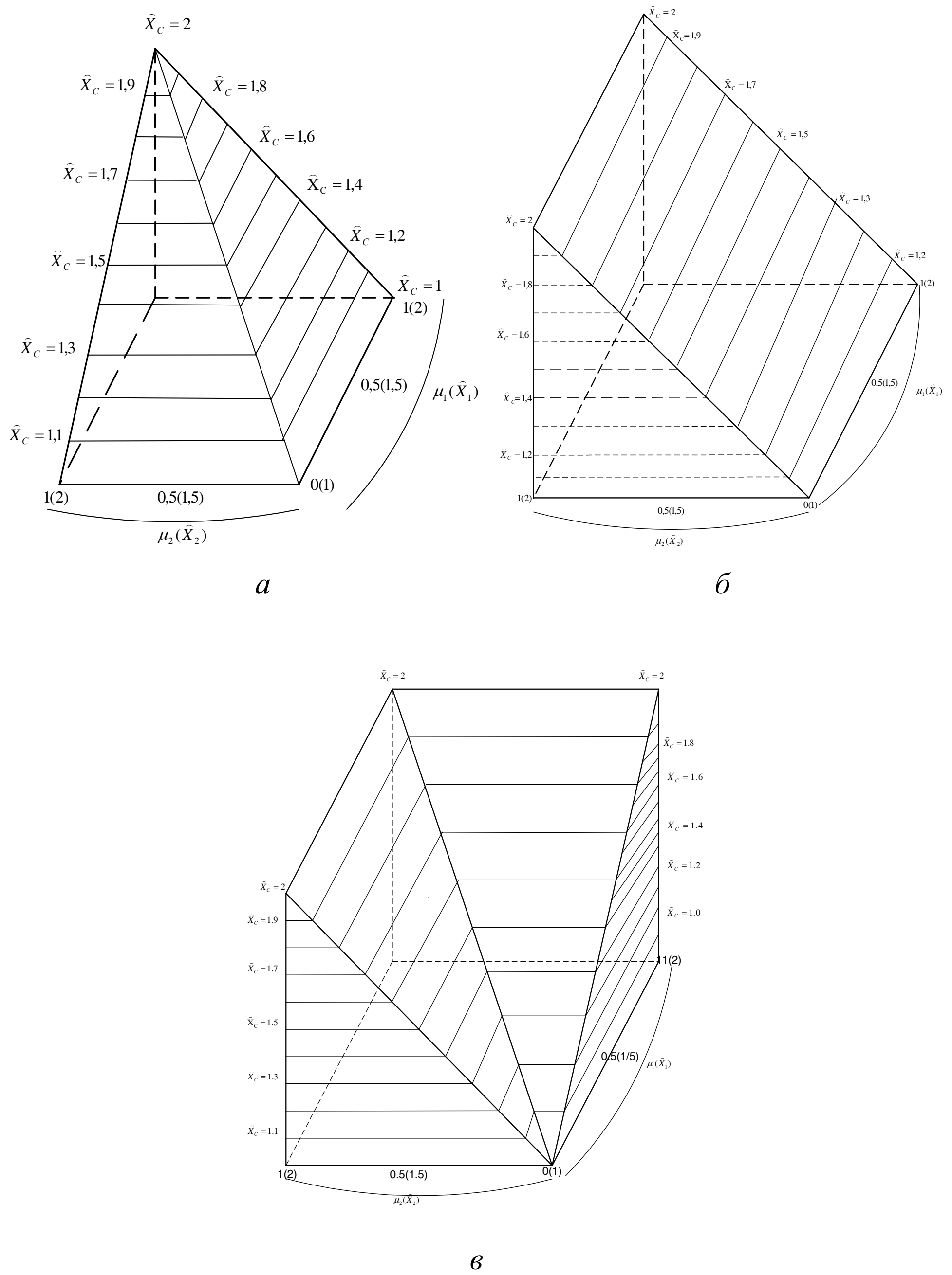
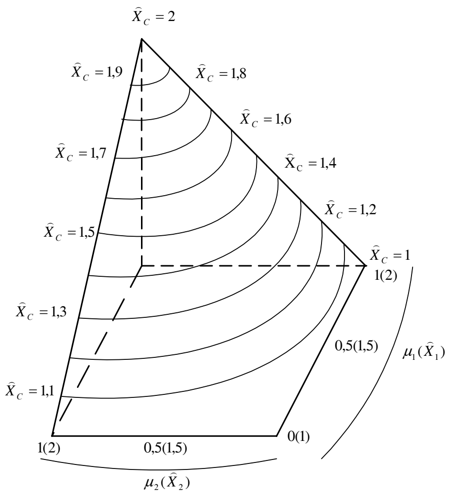
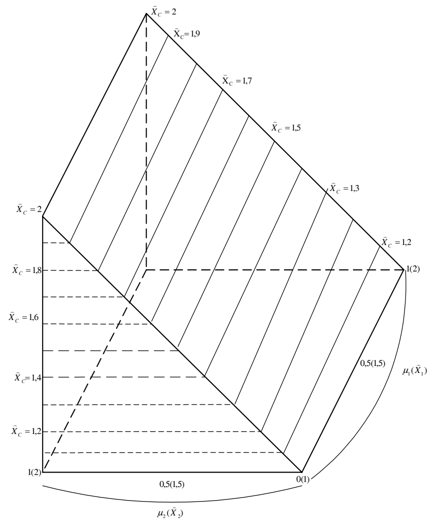


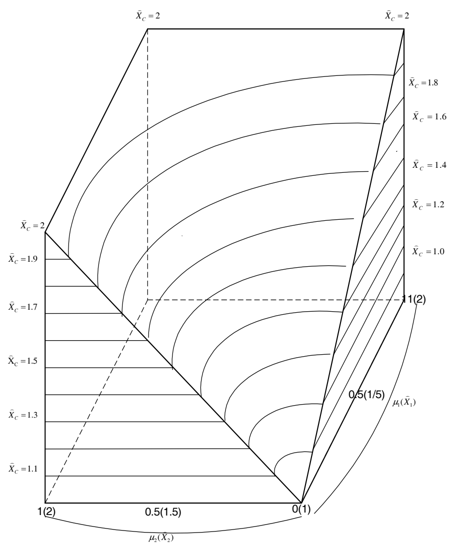
Рис. 2. Топологическое представление стандартных функций:
а – *F1*; *б* – *F2*; *в* – *F4*, полученных при использовании максиминного подхода (9)–(14) к операциям над нечеткими множествами



а



б



в

Рис. 3. Топологическое представление стандартных функций:
а – *F1*; *б* – *F2*; *в* – *F4*, при использовании аддитивно-мультипликативного подхода к операциям над нечеткими множествами

Непрерывные ММКО используют функции интерполяции. Первая функция интерполяции была предложена в работе [7]:

$$v = \begin{cases} j_3 + \gamma_1 (j_6 - j_5) + \gamma_2 (j_5 - j_3), \text{ if } \gamma_2 \ge \gamma_1, \\ j_3 + \gamma_1 (j_4 - j_3) + \gamma_2 (j_6 - j_4), \text{ if } \gamma_1 > \gamma_2, \end{cases} \quad (15)$$

где введены следующие переменные:

$$\gamma_1 = \lceil X_r \rceil,\ X_r \in [1, \overline{r}],$$

$$\gamma_2 = \lceil X_c \rceil, X_c \in [1, \overline{c}],$$

$$j_3 = m_{r = \lfloor X_r \rfloor c = \lfloor X_c \rfloor},$$

$$j_4 = m_{r = \min(\lfloor X_r + 1; \rfloor \overline{r}) c = \lfloor X_c \rfloor},$$

$$j_5 = m_{r = \lfloor X_r \rfloor c = \min(\lfloor X_c + 1 \rfloor; \overline{c})},$$

$$j_6 = m_{r = \min(\lfloor X_r + 1 \rfloor; \overline{r}) c = \min(\lfloor X_c + 1 \rfloor; \overline{c})}.$$

Выражение (15) эквивалентно нечеткому ММКО, использующему максиминный подход (9)–(14) $\langle G, M, Q, P_{MM} \rangle$. Выражение (15) даст нам те же поверхности, которые показаны на рис. 2.

Вторая функция интерполяции (16) была определена в аналогичной записи, но таким образом, чтобы получить случай, эквивалентный нечеткому ММКО с аддитивно-мультипликативным подходом [13]:

$$v = j_3 + \gamma_1 [j_4 - j_3] + \gamma_2 [j_5 - j_3] + \gamma_1 \cdot \gamma_2 [j_6 + j_3 - j_4 - j_5]. \qquad (16)$$

Выражение (16) даст нам те же поверхности, которые показаны на рис. 3.

Обе функции (15) и (16) непрерывны и монотонны. Это значит, что для сколь угодно малой $\varepsilon > 0$ справедливо $v(X_r, X_c) \le v(X_r + \varepsilon, X_c)$ и $v(X_r, X_c) \le v(X_r, X_c + \varepsilon)$.

3. Примеры комплексного оценивания (агрегирования)

Пример 1. Агрегирование двух критериев с точечными значениями с использованием непрерывных ММКО.

Агрегирование двух критериев со значениями $X_\gamma = 1{,}3$ и $X_c = 2{,}6$. В этом случае мы можем использовать непрерывные ММКО. Тогда $\gamma_1 = \lceil X_r \rceil = 0{,}3$; $\gamma_2 = \lceil X_c \rceil = 0{,}6$. Пусть матрица свертки имеет элементы, которые показаны на рис. 4. Тогда $\lfloor X_r \rfloor = 1$; $\lfloor X_c \rfloor = 2$; $j_3 = m_{12} = 1$; $j_4 = m_{22} = 2$; $j_5 = m_{13} = 2$; $j_6 = m_{23} = 2$.

					X_r
	4	**3**	**3**	**2**	4
	3	**3**	**2**	**1**	3
	3	**2**	**2**	**1**	2
	3	**2**	**1**	**1**	1
X_c	4	3	2	1	

Рис. 4. Пример матрицы свертки, принятый для иллюстрации механизмов

Согласно выражению (15) с максиминным подходом мы получим следующую комплексную оценку:

$$v\left(X_r, X_c\right) = 1 + 0,3\left(2-2\right) + 0,6\left(2-1\right) = 1,6.$$

Согласно выражению (16) с аддитивно-мультипликативным подходом мы получим следующую комплексную оценку:

$$v\left(X_r, X_c\right) = 1 + 0,3\left(2-1\right) + 0,6\left(2-1\right) + 0,3\cdot 0,6\left(2+1-2-2\right) = 1,72.$$

Пример 2. Агрегирование двух критериев с интервалами значений.

Агрегирование двух критериев с интервалами значений $X_r = \left[1,3;1,6\right]$ и $X_c = \left[2,6;3,1\right]$. В этом случае комплексная оценка будет также представлена интервалом значений.

Пусть матрица свертки имеет те же элементы, что показаны на рис. 4.

Мы также можем использовать непрерывные ММКО, и нам необходимо определить только две комплексные оценки $v\left(X_r = \min\left(X_r\right), X_c = \min\left(X_c\right)\right)$ и $\left(X_r = \max\left(X_r\right), X_c = \max\left(X_c\right)\right)$, потому что обе функции интерполяции (15) и (16) являются непрерывными и монотонными.

Нам известно, что $v\left(X_r = 1,3; X_c = 2,6\right) = 1,6$ в случае использования максиминного подхода и $v\left(X_r = 1,3; X_c = 2,6\right) = 1,72$ в случае использования аддитивно-мультипликативного. Поэтому нам необходимо узнать комплексную оценку только для случая $v\left(X_r = 1,6; X_c = 3,1\right)$. В этом случае $\gamma_1 = \lceil X_r \rceil = 0,6$; $\gamma_2 = \lceil X_c \rceil = 0,1$; $\lfloor X_r \rfloor = 1$; $\lfloor X_c \rfloor = 3$; $j_3 = m_{13} = 2$; $j_4 = m_{23} = 2$; $j_5 = m_{14} = 3$; $j_6 = m_{24} = 3$.

Согласно функции (15), в случае когда $\gamma_1 > \gamma_2$, необходимо использовать выражение $j_3 + \gamma_1(j_4 - j_3) + \gamma_2(j_6 - j_4)$. Результат будет следующим:

$$v(X_r, X_c) = 2 + 0,6(2-2) + 0,1(3-2) = 2,1.$$

Согласно выражению (16) с аддитивно-мультипликативным подходом мы получим ту же самую комплексную оценку:

$$v(X_r, X_c) = 2 + 0,3(2-2) + 0,1(3-2) + 0,3 \cdot 0,6(3+2-3-2) = 2,1.$$

Тогда комплексная оценка представляет собой интервал: $v(X_r, X_c) = [1,6; 2,1]$ – в случае использования максиминного подхода; $v(X_r, X_c) = [1,72; 2,1]$ – в случае использования аддитивно-мультипликативного подхода.

Пример 3. Агрегирование двух критериев с точечными значениями с использованием нечетких ММКО.

Рассмотрим тот же пример $X_r = 1,3$ и $X_c = 2,6$, как и в первом случае. Для применения нечетких ММКО в данном случае каждое значение X_r и X_c необходимо представить в виде нечеткого числа, используя следующее правило:

$$\tilde{X} = \{ j / \mu_j \}, \ j = \{1, 2, \ldots, \overline{X}\}, \tag{17}$$

где функция принадлежности принимает следующие значения: $\mu_j = 0$ для $j = \{1, 2, \ldots, \overline{X}\} / \{\lfloor X \rfloor, \lfloor X \rfloor + 1\}$, $\mu_{j=\lfloor X \rfloor} = 1 - \lceil X \rceil$ и $\mu_{j=\lfloor X \rfloor+1} = \lceil X \rceil$. В то же время нечеткое число (17) после дефазификации согласно (8) представимо в виде $X = \lfloor X \rfloor, \lceil X \rceil$. Поэтому операции (8) и (17) обеспечивают однозначное соответствие между нечеткими и действительными значениями.

Согласно (17) критерии $X_r = 1,3$ и $X_c = 2,6$ будут иметь вид $\tilde{X}_r = \{1/0,7; 2/0,3; 3/0; 4/0\}$ и $\tilde{X}_c = \{1/0; 2/0,4; 3/0,6; 4/0\}$. В случае нечетких чисел каждому элементу матрицы соответствует пара значений функций принадлежности (рис. 5):

					$\tilde{X}_r$
	4/0;0	**3**/0;0,6	**3**/0;0,4	**2**/0;0	4/0
	3/0;0	**3**/0;0,6	**2**/0;0,4	**1**/0;0	3/0
	3/0,3;0	**2**/0,3;0,6	**2**/0,3;0,4	**1**/0,3;0	2/0,3
	3/0,7;0	**2**/0,7;0,6	**1**/0,7;0,4	**1**/0,7;0	1/0,7
$\tilde{X}_c$	4/0	3/0,6	2/0,4	1/0	

Рис. 5. Матрица свертки (рис. 4) в нечетком виде

Для определения единственного значения функции принадлежности (рис. 6) необходимо использовать теоретико-множественную операцию пересечения (3).

					$\tilde{X}_r$
	4/0	**3**/0	**3**/0	**2**/0	4/0
	3/0	**3**/0	**2**/0	**1**/0	3/0
	3/0	**2**/0,3	**2**/0,3	**1**/0	2/0,3
	3/0	**2**/0,6	**1**/0,4	**1**/0	1/0,7
$\tilde{X}_c$	4/0	3/0,6	2/0,4	1/0	

Рис. 6. Результат пересечения (3) при максиминном подходе

В этом случае (см. рис. 6) имеем три элемента матрицы с ненулевым значением функции принадлежности и одинаковым значением элемента матрицы $m_{13} = m_{22} = m_{23} = 2$. Для элементов m_{22} и m_{23} значение функции принадлежности составляет 0,3, а для элемента m_{13} – 0,6.

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{1/0,4; 2/\left\{0,3; 0,6\right\}; 3/0; 4/0\right\}.$$

Для элемента с двумя значениями функциями принадлежности 2 / {0,3 ;0,6} необходимо использовать теоретико-множественную операцию (5) – максимум. Результат будет следующим:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{1/0,4; 2/0,6; 3/0; 4/0\right\}.$$

Согласно уравнению центра масс (8) комплексная оценка будет следующей:

$$v\left(X_r, X_c\right) = \frac{1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{0,4 + 0,6 + 0 + 0} = 1,6.$$

В случае аддитивно-мультипликативного подхода матрица после выполнения операции пересечения (4) будет иметь вид (рис. 7):

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{1/0,28; 2/\left\{0,42; 0,12; 0,18\right\}; 3/0; 4/0\right\}.$$

					$\tilde{X}_r$
	4/0	**3**/0	**3**/0	**2**/0	4/0
	3/0	**3**/0	**2**/0	**1**/0	3/0
	3/0	**2**/0,18	**2**/0,12	**1**/0	2/0,3
	3/0	**2**/0,42	**1**/0,28	**1**/0	1/0,7
$\tilde{X}_c$	4/0	3/0,6	2/0,4	1/0	

Рис. 7. Результат пересечения при использовании аддитивно-мультипликативного подхода

Согласно аддитивно мультипликативному подходу для элемента 2 / {0,42; 0,12; 0,18} необходимо использовать теоретико-множественную операцию суммирования (6). В этом случае результат комплексного оценивания будет следующим:

$$\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{1/0,28; 2/0,72; 3/0; 4/0\right\}.$$

Действительно-значная комплексная оценка будет следующей:

$$v\left(X_r, X_c\right) = \frac{1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,72 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{0,28 + 0,72 + 0 + 0} = 1,72.$$

Пример 4. Погрешность в случае максиминного подхода с операциями (3) и (5).

Пусть матрица свертки имеет элементы, как в примерах выше, $\tilde{X}_r = \left\{1/0,4; 2/0,6; 3/0; 4/0\right\}$ и $\tilde{X}_c = \left\{1/0; 2/0,3; 3/0,7; 4/0\right\}$. Каждому элементу матрицы в этом случае также соответствует два значения функций принадлежностей (рис. 8):

					$\tilde{X}_r$
	4/0;0	**3**/0;0,6	**3**/0;0,4	**2**/0;0	4/0
	3/0;0	**3**/0;0,6	**2**/0;0,4	**1**/0;0	3/0
	3/0,3;0	**2**/0,6;0,7	**2**/0,6;0,3	**1**/0,3;0	2/0,6
	3/0,7;0	**2**/0,4;0,7	**1**/0,4;0,3	**1**/0,7;0	1/0,4
$\tilde{X}_c$	4/0	3/0,7	2/0,3	1/0	

Рис. 8. Матрица свертки в нечетком виде

Используя функцию пересечения (3), получим (рис. 9):

					$\tilde{X}_r$
	4/0	**3**/0	**3**/0	**2**/0	4/0
	3/0	**3**/0	**2**/0	**1**/0	3/0
	3/0	**2**/0,6	**2**/0,3	**1**/0	2/0,6
	3/0	**2**/0,4	**1**/0,3	**1**/0	1/0,4
$\tilde{X}_c$	4/0	3/0,7	2/0,3	1/0	

Рис. 9. Результат пересечения (3) при максиминном подходе

В данном случае (см. рис. 9) имеем три элемента матрицы с ненулевым значением функции принадлежности и одинаковым значением элемента матрицы $m_{13} = m_{22} = m_{23} = 2$. Для элемента m_{22} значение функции принадлежности равно 0,3, для элемента m_{23} – 0,6, а для элемента m_{13} – 0,4. Для элемента с тремя значениями функции принадлежности 2 / {0,3; 0,4; 0,6} используем теоретико-множественную операцию объединения (5). В этом случае результат будет следующим: $\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \{1/0{,}3; 2/0{,}6; 3/0; 4/0\}$.

Согласно уравнению центра масс (8) комплексная оценка будет следующей:

$$v\left(X_r, X_c\right) = \frac{1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{0{,}3 + 0{,}6 + 0 + 0} = \frac{1{,}5}{0{,}9} \approx 1{,}67.$$

Элементы матрицы с ненулевыми значениями функции принадлежности имеют следующие значения: $m_{12} = 1$, $m_{22} = 2$, $m_{13} = 2$, $m_{23} = 2$, что соответствует стандартной функции *F4* (см. табл. 4). Если использовать (13), получим $\tilde{v}\left(\tilde{X}_r, \tilde{X}_c\right) = \left\{1/\left(1-0{,}7\right); 2/0{,}7\right\}$. Согласно выражению (8) такое нечеткое число после деффазификации будет числом, принадлежащим действительному множеству $v\left(X_r, X_c\right) = 1{,}7$.

Согласно уравнению центра масс (8) нечеткие числа $\tilde{X}_r = \left\{1/0{,}4; 2/0{,}6; 3/0; 4/0\right\}$ и $\tilde{X}_c = \left\{1/0; 2/0{,}3; 3/0{,}7; 4/0\right\}$ примут значения $X_r = 1{,}6$ и $X_c = 2{,}7$.

Используя непрерывную функцию (15), мы получим $v\left(X_r, X_c\right) =$
$= 1 + 0{,}6 \cdot \left(2-2\right) + 0{,}7 \cdot \left(2-1\right) = 1{,}7.$

В случае нечетких чисел, как (13), мы можем использовать эти же методы. Но если сумма значений функции принадлежности больше единицы, нам потребуется нормализовать функцию для использования аддитивно-мультипликативной функции.

Пример 5. Агрегирование двух критериев с Ф-нечеткими числами при аддитивно-мультипликативном подходе.

Пусть матрица свертки имеет элементы, как в примерах выше, а критерии определяются как Ф-нечеткие числа (рис. 10):

$$\tilde{\tilde{X}}_r = \left\{1/\left[0,3-0,4\right];2/\left[0,4-0,5\right];3/\left[0,1-0,2\right];4/\left[0,1-0,2\right]\right\},$$

$$\tilde{\tilde{X}}_c = \left\{1/\left[0,1-0,2\right];2/\left[0,2-0,4\right];3/\left[0,4-0,5\right];4/\left[0,1-0,3\right]\right\}.$$

$v\left(\tilde{\tilde{X}}_r;\tilde{\tilde{X}}_c\right)$					X_r	$\underline{\mu}_{X_r}$	$\overline{\mu}_{X_r}$
	4	3	3	2	4	**0,1**	**0,2**
	3	3	2	1	3	**0,1**	**0,2**
	3	2	2	1	2	**0,4**	**0,5**
	3	2	1	1	1	**0,3**	**0,4**
X_c	4	3	2	1			
$\underline{\mu}_{X_c}$	**0,1**	**0,4**	**0,2**	**0,1**			
$\overline{\mu}_{X_c}$	**0,3**	**0,5**	**0,4**	**0,2**			

Рис. 10. Матрица свертки в Ф-нечетком виде

Такой случай может соответствовать ситуации, когда в качестве лиц, привлеченных к процедуре оценки частных критериев, выступают не эксперты, а, например, рядовые носители предметно-профессиональной области, или в отношении частных критериев имеется существенная неопределенность, которая не позволяет эксперту высказаться не только категорически, но и даже его модальные суждения носят весьма размытый характер [18].

В случае Ф-нечеткого комплексного оценивания предлагается использовать следующий алгоритмический прием: (18)–(20).

Для каждого элемента матрицы определяется два вектора значений функций принадлежности: первый определяется как набор значений с максимальным доверием этому элементу, второй – с минимальным.

Первый вектор определяется следующим образом: выбираются максимальные значения функций принадлежностей из доверительных интервалов, соответствующих агрегируемым строке r и столбцу c, а также минимальные значения в соседних элементах, образованных строками $r + 1$, $r - 1$ и столбцами $c + 1$, $c - 1$:

$$\left\{\overline{\mu}_r, \overline{\mu}_c, 1-\underline{\mu}_{\min(r+1;4)}, 1-\underline{\mu}_{\max(r-1;1)},\ 1-\underline{\mu}_{\min(c+1;4)}, 1-\underline{\mu}_{\max(c-1;1)}\right\}. \quad (18)$$

Второй вектор определяется наоборот: выбираются минимальные значения функций принадлежностей из доверительных интервалов, соответствующих агрегируемым строке r и столбцу c, а также минимальные значения в соседних элементах, образованных строками $r + 1$, $r - 1$ и столбцами $c + 1$, $c - 1$, вычтенные из единицы:

$$\left\{\underline{\mu}_r, \underline{\mu}_c, 1-\overline{\mu}_{\min(r+1;4)}, 1-\overline{\mu}_{\max(r-1;1)},\ 1-\overline{\mu}_{\min(c+1;4)}, 1-\overline{\mu}_{\max(c-1;1)}\right\}. \quad (19)$$

После выполнения для каждого вектора значений функций принадлежности операции пересечения останется одно значение доверия этому элементу, соответствующее максимальной степени доверия и минимальной.

Обозначим результат пересечения первого вектора (18) как $\overline{\mu}_{rc}$, второго вектора (19) – $\underline{\mu}_{rc}$. Так удастся получить две нечетких переменных, соответствующих элементу m_{rc}: $\tilde{\tilde{m}}_{rc} = m_{rc} / \overline{\mu}_{rc}$, $\underline{\tilde{m}}_{rc} = m_{rc} / \underline{\mu}_{rc}$.

Поскольку их носителем является сам элемент m_{rc}, то для него мы получим пару значений функций принадлежности, что можно представить как Ф-нечеткую переменную:

$$\tilde{\tilde{m}}_{rc} = m_{rc} / \underline{\mu}_{rc};\ \overline{\mu}_{rc}. \quad (20)$$

Рассмотрим пример для элемента (2;2) – m_{22}.

Первый вектор будет следующим: $\overline{\mu}_{22} = \{0,5; 0,4; 0,9; 0,7; 0,6; 0,9\}$, второй – $\underline{\mu}_{22} = \{0,4; 0,2; 0,8; 0,6; 0,5; 0,8\}$.

Если использовать умножение в качестве операции пересечения (4), то $\overline{\mu}_{22} = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,068$, а $\underline{\mu}_{22} = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,015$. Тогда $\tilde{\tilde{m}}_{22} = 2/[0,015; 0,068]$.

Аналогично выполним предложенный подход ко всем элементам матрицы (рис. 11):

$v\left(\tilde{\tilde{X}}_r;\tilde{\tilde{X}}_c\right)$					X_r	$\underline{\mu}_{X_r}$	$\overline{\mu}_{X_r}$
	4 / [0,004; 0,032]	3 / [0,013; 0,065]	3 / [0,006; 0,039]	2 / [0,005; 0,029]	4	0,1	0,2
	3 / [0,002; 0,019]	3 / [0,007; 0,039]	2 / [0,003; 0,023]	1 / [0,002; 0,017]	3	0,1	0,2
	3 / [0,010; 0,057]	2 / [0,032; 0,113]	2 / [0,015; 0,068]	1 / [0,012; 0,050]	2	0,4	0,5
	3 / [0,008; 0,043]	2 / [0,025; 0,086]	1 / [0,012; 0,052]	1 / [0,009; 0,038]	1	0,3	0,4
X_c	4	3	2	1			
$\underline{\mu}_{X_c}$	0,1	0,4	0,2	0,1			
$\overline{\mu}_{X_c}$	0,3	0,5	0,4	0,2			

Рис. 11. Матрица свертки в Ф-нечетком виде, где элементы матрицы получены с помощью аддитивно-мультипликативного подхода

Выполнив операцию объединения путем суммирования минимальных и максимальных значений при одинаковых элементах матрицы свертки, получим следующую Ф-нечеткую комплексную оценку:

$$\tilde{\tilde{v}}=\{1/[0,035;0,052];2/[0,080;0,319];$$
$$3/[0,046;0,262];4/[0,004;0,032]\}. \quad (21)$$

Условно Ф-нечеткую комплексную оценку (21) можно представить в виде двух нечетких множеств, построенных аналогично предложенному выше алгоритму (18)–(20):

$$\tilde{v}=\{1/0,045;2/0,292;3/0,232;4/0,027\}, \quad (22)$$

которую путем деффазификации (8) можно представить в виде числа на множестве действительных значений:

$$v = \frac{1 \cdot 0,045 + 2 \cdot 0,292 + 3 \cdot 0,232 + 4 \cdot 0,027}{0,045 + 0,292 + 0,232 + 0,027} \approx \frac{1,433}{0,596} \approx 2,40.$$

Отметим, что в Ф-нечетком случае сумма значений функций принадлежности может не принимать значение единицы. Поэтому требовать этого условия от выражения (22), полученного из Ф-нечеткого числа (21), непрактично.

Пример 6. Агрегирование двух критериев с Ф-нечеткими числами при максиминном подходе.

Используя операцию пересечения (3) в том же примере (см. рис. 19) и применяя предложенные методы (18)–(20), получим, что элемент (2;2) будет следующим: $\tilde{\tilde{m}}_{22} = 2 / [0,2;0,4]$.

Аналогично определяются все элементы, с использованием операции пересечения минимум (рис. 12):

$v\left(\tilde{\tilde{X}}_r;\tilde{\tilde{X}}_c\right)$					X_r	$\underline{\mu}_{X_r}$	$\overline{\mu}_{X_r}$
	4 / [0,1; 0,2]	3 / [0,1; 0,2]	3 / [0,1; 0,2]	2 / [0,1; 0,2]	4	0,1	0,2
	3 / [0,1; 0,2]	3 / [0,1; 0,2]	2 / [0,1; 0,2]	1 / [0,1; 0,2]	3	0,1	0,2
	3 / [0,1; 0,3]	2 / [0,4; 0,5]	2 / [0,2; 0,4]	1 / [0,1; 0,2]	2	0,4	0,5
	3 / [0,1; 0,3]	2 / [0,3; 0,4]	1 / [0,2; 0,4]	1 / [0,1; 0,2]	1	0,3	0,4
X_c	4	3	2	1			
$\underline{\mu}_{X_c}$	0,1	0,4	0,2	0,1			
$\overline{\mu}_{X_c}$	0,3	0,5	0,4	0,2			

Рис. 12. Матрица свертки в Ф-нечетком виде, где элементы матрицы получены с помощью максиминного подхода

В случае максиминного подхода Ф-нечеткая комплексная оценка будет следующей:

$$\tilde{\tilde{v}} = \{1 / [0,2; 0,4]; 2 / [0,3; 0,5]; \ \ 3 / [0,1; 0,3]; 4 / [0,1; 0,2]\}.$$

Нечеткое число получим аналогично:

$$\tilde{v} = \{1 / 0,4; 2 / 0,5; 3 / 0,2; 4 / 0,2\},$$

и аналогично может быть представлено как действительно число:

$$v = \frac{1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2}{0,4 + 0,5 + 0,2 + 0,2} = \frac{2,8}{1,3} \approx 2,15.$$

Заключение

Напомним, что в работе [16] показано, какие матричные механизмы комплексного оценивания целесообразно использовать при той или иной неопределенности сложного объекта [16].

Все методы, показанные в работе, были использованы в различных исследованиях, таких как моделирование предпочтений участников рынка инвестиций [19, 20], моделирование социальных и экономических систем [21], прогнозирование посещаемости торговой недвижимости на основе оценки их потребительской привлекательности [22], обосновании премии за контроль или скидки за бесконтрольность при сделках слияния и поглощения [23], принятие решений в строительстве [24] и др.

Работа подготовлена при поддержке РФФИ (грант 17-07-01550).

Список литературы

1. Bossert W., Peters H. Multi-attribute decision-making in individual and social choice // Mathematical Social Sciences. – 2000. – Vol. 40, iss. 3. – P. 327–339.

2. Chankong V., Haimes Y.Y. Multiobjective decision making: theory and methodology. – North-Holland, 1983. – 213 p.

3. Sabaei D., Erkoyuncu J., Roy R. A review of multi-criteria decision making methods for enhanced maintenance delivery // Procedia CIRP 37. – 2015. – P. 30–35.

4. Ho W., Xu X., Dey P.K. Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review // European Journal of Operational Research. – 2010. – № 202. – P. 16–24.

5. Mendoza G.A., Martins H. Multi-criteria decision analysis in natural resource management: A critical review of methods and new modelling paradigms // Forest Ecology and Management. – 2016. – Vol. 230, iss. 1–3. – P. 1–22. DOI: https://doi.org/10,1016/j.foreco.2006.03.023

6. Hassanzadeh S., Cheng K. Suppliers selection in manufacturing industries and associated multi-objective decision making methods: past, present and the future // European Scientific Journal. – 2016. – Vol. 12, № 1. – P. 93–113. DOI: 10,19044/esj.2016.v12n1p93

7. Novikov D. Theory of Control in Organizations. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 341 p.

8. Mechanisms of Organizational Behavior Control: A Survey / V.N. Burkov, M.V. Goubko, N.A. Korgin, D.A. Novikov // Advances in Systems Science and Application. – 2013. – Vol. 13, № 1. – P. 1–20.

9. Глотов В.А., Павельев В.В. Векторная стратификация. – М.: Наука, 1984. – 132 с.

10. Анохин А.М., Гусев В.Б., Павельев В.В. Комплексное оценивание и оптимизация на моделях многомерных объектов / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 79 с.

11. Новиков Д.А., Суханов А.Л. Нечеткие сетевые системы комплексного оценивания // Проблемы информационной экономики. – Вып. 6. Моделирование инновационных процессов и экономической динамики. – М.: Ленанд, 2006. – С. 279–292.

12. Харитонов В.А., Белых А.А. Технологии современного менеджмента. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 190 с.

13. Алексеев А.О., Алексеева И.Е. Процедуры нечеткого комплексного оценивания объектов различной природы // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), г. Москва, 16–19 июня 2014 г. / ИПУ РАН. – М., 2014. – С. 7884–7893.

14. Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы / А.О. Алексеев, А.С. Саламатина, А.В. Вычегжанин, Д.В. Климец // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 3, ч. 3. – С. 469–474.

15. Алексеев А.О. Исследование альтернативных подходов к теоретико-множественным операциям над нечеткими множествами в процедуре нечеткого комплексного оценивания // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2015. – № 1. – С. 60–72.

16. Алексеев А.О. Классификация механизмов комплексного оценивания сложных объектов // Информационные и математические технологии в науке и управлении = Information and mathematical technologies in science and management. – 2018. – № 2 (10). – С. 106–120

17. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами? – М.: Синтег, 1997. – 190 с.

18. Алексеев А.О. Нечеткое и Ф-нечеткое комплексное оценивание сложных объектов // Управление большими системами: сб. тр. XV Всерос. шк.-конф. молодых ученых (г. Воронеж, 10–13 сент. 2018 г.): в 2 т. / Воронеж. гос. техн. ун-т, Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова РАН. – Т. 1. – Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2018. – С. 16–23.

19. Alekseev A.O., Gureev K.A., Kharitonov V.A. Intellectual modelling technologies of investment market // Applied Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 7, № 137. – P. 6825–6848.

20. Alekseev A.O., Gureev K.A., Kharitonov V.A. Intelligent technologies in modelling the investment preferences of market participants // Actual Problems of Economics. – 2014. – Vol. 152, iss. 2. – P. 435–449.

21. Gureev K.A., Chernyi S.A., Kharitonov V.A. Models of socioeconomic system structure: their development and use // Actual Problems of Economics. – 2014. – Vol. 159, iss. 9. – P. 475–487.

22. Spirina V.S., Alekseev A.O. Forecasting the attendance of retail real estate based on estimation of its attractiveness to consumers // Actual Problems of Economics. – 2014. – Vol. 160, iss. 10. – P. 513–526.

23. Kharitonov V.A., Alekseeva I.E., Alekseev A.O. Grounding the control premium or discount for lack of control in the investment value at mergers and acquisitions // Actual Problems of Economics. – 2015. – Vol. 164, iss. 2. – P. 461–473.

24. Alekseev A.O., Koskova K.S., Galiaskarov E.R. Technologies of development decisions making in residential civil engineering // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 481, № 1. – art. 012059, DOI: 10,1088/1757-899X/481/1/012059

References

1. Bossert W., Peters H. Multi-attribute decision-making in individual and social choice. *Mathematical social sciences*. 2000, vol. 40, iss. 3, pp. 327-339.

2. Chankong, V., Haimes, Y.Y. Multiobjective decision making: theory and methodology, North-Holland. 1983, 213 p.

3. Sabaei D., Erkoyuncu J., Roy R. A review of multi-criteria decision making methods for enhanced maintenance delivery. *Procedia CIRP 37*. 2015, pp. 30- 35.

4. William Ho, Xiaowei Xu, Prasanta K. Dey Multi-criteria decision making approaches for supplier evaluation and selection: A literature review. *European journal of operational research*. 2010, no. 202, pp. 16-24.

5. Mendoza G.A., Martins H. Multi-criteria decision analysis in natural resource management: A critical review of methods and new modelling paradigms. *Forest Ecology and Management*. 2016, vol. 230, iss. 1-3, pp. 1-22, doi: https://doi.org/10,1016/j.foreco.2006.03.023

6. Hassanzadeh S., Cheng K. Suppliers selection in manufacturing industries and associated multi-objective decision making methods: past, present and the future. *European Scientific Journal*. 2016, vol. 12, no. 1, pp. 93-113, doi: 10,19044/esj.2016.v12n1p93

7. Novikov D. Theory of Control in Organizations. New York, Nova Science Publishers, 2013, 341 p.

8. Burkov V.N., Goubko M.V., Korgin N.A., Novikov D.A. Mechanisms of Organizational Behavior Control: A Survey. *Advances in Systems Science and Application*. 2013, vol. 13, no. 1, pp. 1-20.

9. Glotov V.A., Pavelyev V.V. Vector stratification. Moscow, Nauka, 1984, 132 p.

10. Anohin A.M. Gusev V.B. Pavelyev V.V. Complex evaluation and optimization on models of multidimensional objects. Moscow, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, 2003, 79 p.

11. Novikov D.A., Suhanov A.L. Fuzzy network systems of complex evaluation. *Modeling of innovation processes and economic dynamics*. Vol. 6. Moscow, Lenand, 2006, iss. 6, pp. 279-292.

12. Kharitonov V.A., Belyh A.A. Technologies of contemporary management. Under scientific edition by prof. V.A. Kharitonov. Perm, Publ. of Perm state technical university, 2007, 190 p.

13. Alekseev A.O., Alekseeva I.E. Fuzzy integrated assessment procedures. 12th Control Sciences All-Russian Meeting, Moscow, June, 16-19, 2014. Moscow, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2014. pp. 7884-7893.

14. Alekseev A.O., Kalentyeva A.S., Vychegzhanin A.V., Klimets D.A. Algorithmic basics of fuzzy procedure of integrated assessment of different nature objects. *Fundamental researches*. 2014, no. 3, (part 3), pp. 469-474.

15. Alekseev A.O. Research of alternative approaches to theoretic-multiple opertions under fuzzy sets in the procedure of fuzzy intagrated assessement. *Applied Matehmatics and Control Sciences*. 2015, no. 1, pp. 60-72.

16. Alekseev A.O. Classification of integrated assessment mechanisms for complex objects. *Information and mathematical technologies in science and management*. 2018, no. 2 (10), pp 106-120.

17. Burkov V.N. Novikov D.A. How to project management? Moscow, SINTEG. 1997, 190 p.

18. Alekseev A.O. Fuzzy and F-Fuzzy integrated assessment of complex objects. Control of Lafrge-scale Systems – 2018. All-Rusian school conferences of young scientists. Voronegh. 2018, pp. 16-23.

19. Alekseev A.O., Gureev K.A., Kharitonov V.A. Intellectual Modelling Technologies of Investment Market. *Applied Mathematical Sciences*. 2013, vol. 7, no. 137, pp. 6825-6848.

20. Alekseev A.O., Gureev K.A., Kharitonov V.A. Intelligent technologies in modelling the investment preferences of market participants. *Actual Problems of Economics*. 2014, vol. 152, iss. 2, pp. 435-449.

21. Gureev K.A., Chernyi S.A., Kharitonov V.A. Models of socioeconomic system strukture: their development and use. *Actual Problems of Economics*. 2014, vol. 159, iss. 9. pp. 475-487.

22. Spirina V.S., Alekseev A.O. Forecasting the attendance of retail real estate based on estimation of its attractiveness to consumers. *Actual Problems of Economics*. 2014, vol. 160, iss. 10, pp. 513-526.

23. Kharitonov V.A., Alekseeva I.E., Alekseev A.O. Grounding the Control Premium or Discount for Lack of Control in the Investment Value at Mergers and Acquisitions. *Actual Problems of Economics*. 2015, vol. 164, iss. 2, pp. 461-473.

24. Alekseev A.O., Koskova K.S., Galiaskarov E.R. Technologies of Development Decisions Making in Residential Civil Engineering. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019, Vol. 481, no. 1, art. 012059, doi: 10,1088/1757-899X/481/1/012059

Получено 08.05.2019

Сведения об авторе

Алексеев Александр Олегович (Пермь, Россия) – кандидат экономических наук, доцент кафедры «Строительный инжиниринг и материаловедение», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).

About the author

Alexander O. Alekseev (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Economics, Associate Professor, Department of Construction Engineering and Material Sciences, Perm National Research Polytechnic University (614990, 29, Komsomolsky av., Perm, Russian Federation, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).