DOI: 10.15593/2499-9873/2019.1.02
УДК 517.929

А.С. Баландин, В.В. Малыгина

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВМЕСТЕ С ПРОИЗВОДНОЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается один важный класс дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, для которого изучаются асимптотические свойства решения. Приводятся необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости, которым придана геометрическая форма области в пространстве параметров. Отдельно анализируется поведение решения на границах области, где потеря устойчивости происходит различными способами: за счет появления стационарных решений и за счет появления периодических режимов. Наряду с асимптотическими свойствами решения изучаются аналогичные свойства его производной.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнения с запаздывающим аргументом нейтрального типа, экспоненциальная устойчивость, равномерная устойчивость, устойчивость вместе с производной.

A.S. Balandin, V.V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON STABILITY WITH DERIVATIVE OF A CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

We consider an important class of differential-difference equations of neutral type, for which we study the asymptotic properties of a solution. We present necessary and sufficient conditions of exponential stability. The conditions have a geometric form of a region in the parameter space. The behavior of a solution at the boundaries of the region is analyzed separately. The loss of stability on the boundary can occur in various ways, namely through the appearance of stationary solutions, and through the appearance of periodic modes. Along with the asymptotic properties of a solution, we study analogous properties of its derivative.

Keywords: differential equations, delay equations of neutral type, exponential stability, uniform stability, stability with derivative.

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию асимптотических свойств одного класса функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) + bx(t) - cx(t-h) = f(t), \quad t > 0, \tag{*}$$

где a, b, c – произвольные вещественные числа, $h > 0$, f – заданная локально-суммируемая функция.

Это уравнение возникает в прикладных задачах: в работе [1] с его помощью описывается динамика популяции клеток, в работе [2] – движение плоских упругих плит с учетом трения.

Но не менее интересно оно с теоретической точки зрения. Уравнение (*) являет собой удачный пример уравнения нейтрального типа: с одной стороны – достаточно простой, чтобы получить эффективные признаки устойчивости тривиального решения, с другой – достаточно сложный, чтобы на нем проявилось все разнообразие асимптотических свойств решений. Это подтверждается значительным количеством чисто теоретических исследований (см., например, [3–10]), в которых изучается уравнение (*).

Особое внимание в статье уделяется асимптотическим свойствам производной решения (*). Как во всяком дифференциальном уравнении, информацию о производной следует учитывать и правильно ее использовать. Для уравнений запаздывающего типа (таким будет уравнение (*) при $a = 0$) асимптотические свойства производной легко выводятся из свойств самого решения. Но при $a \neq 0$ уравнение (*) уже не является разрешенным относительно производной и для него вопрос об асимптотических свойствах производной, оставаясь содержательным, перестает быть тривиальным.

1. Формулы представления решения и его производной. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $L_p(E)$ – пространство суммируемых на множестве E функций с нормой $\|y\|_p = \left(\int\limits_E |y(t)|^p dt \right)^{1/p}$ ($1 \le p < \infty$), $L_\infty(E)$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном на множестве E функций с нормой $\|y\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in E} |y(t)|$. Символом I будем обозначать единичный (тождественный) оператор.

Введем в рассмотрение *оператор сдвига*, действующий в пространстве измеримых (кусочно-непрерывных, суммируемых) на каждом конечном отрезке функций:

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-1), \text{ если } t > 1, \\ 0, \text{ если } t \le 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что в этих пространствах при любом $a \in \mathbb{R}$ оператор $I - aS$ ограниченно обратим.

Изменяя масштаб времени $t \mapsto ht$ и коэффициенты $b \mapsto hb$, $c \mapsto hc$, перепишем уравнение (*) в эквивалентной форме, более удобной для дальнейшего изучения:

$$(I - aS)\dot{x}(t) + (bI - cS)x(t) = f(t), \ t > 0. \tag{1}$$

Как известно [12, с. 35], уравнение (1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение имеет вид ([12, с. 84], [6]):

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s)ds, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Функция X называется *фундаментальным решением,* функция Y – *функцией Коши*. Представление (2) принято называть *формулой Коши*.

Фундаментальное решение X является локально абсолютно непрерывной функцией и однозначно определяется как решение уравнения (1) при $f = 0$ с начальным условием $X(0) = 1$.

На каждом интервале $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, функция Y абсолютно непрерывна, но имеет разрывы первого рода во всех точках $t = n$, причем $Y(n+0) - Y(n-0) = a^n$ [6]. Как показано в [6], [9], Y однозначно определяется через X равенством

$$(I - aS)Y(t) = X(t), \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Получим еще одну полезную формулу, которая связывает функции Y и $\dot{X}$.

Лемма 1. *Для фундаментального решения и функции Коши уравнения* (1) *справедливо соотношение*

$$(-bI+cS)Y(t)=\dot{X}(t)\,,\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Доказательство. В силу определения фундаментального решения при любом $t\in\mathbb{R}_+$ справедливо равенство

$$(I-aS)\dot{X}(t)=(-bI+cS)X(t)\,.$$

Применяем формулу (4) и учитываем перестановочность операторов $I-aS$ и $bI-cS$:

$$(-bI+cS)X(t)=(-bI+cS)(I-aS)Y(t)=(I-aS)(-bI+cS)Y(t)\,.$$

Следовательно,

$$(I-aS)\dot{X}(t)=(I-aS)(-bI+cS)Y(t)\,,$$

что, в силу отмеченной выше обратимости $I-aS$, эквивалентно (4). ▲

Наряду с X и Y введем функцию Z, которая (однозначно) определяется на $\mathbb{R}_+$ по следующему правилу:

$$(I-aS)Z(t)=\dot{X}(t)\,,\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Имея в виду изучение асимптотического поведения решения уравнения (1) вместе с производной, было бы полезно располагать для $\dot{x}$ формулой, аналогичной формуле (2).

Заметим, что прямое дифференцирование равенства (2) невозможно, так как функция Y разрывна и, следовательно, не имеет производной в классическом смысле. Тем не менее удается доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть x – решение уравнения* (1). *Тогда при любом $t\in\mathbb{R}_+$ справедливо представление*

$$\dot{x}(t)=\dot{X}(t)x(0)+\sum_{k=0}^{\infty}a^k(S^kf)(t)+\int_0^t Z(t-s)f(s)ds\,. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $t\in[n,n+1)$. Используя определение оператора S, равенства (5), (4), (2) и свойства фундаментального решения, имеем:

$$(I-aS)\dot{x}(t)=(I-aS)\dot{X}(t)x(0)+\sum_{k=0}^{n}a^k(S^kf)(t)-\sum_{k=0}^{n}a^{k+1}(S^{k+1}f)(t)+$$

$$+\int_0^t (I-aS)Z(t-s)f(s)ds = (-bI+cS)X(t)x(0)+f(t)+\int_0^t \dot{X}(t-s)f(s)ds =$$

$$=(-bI+cS)X(t)x(0)+f(t)+(-bI+cS)\int_0^t Y(t-s)f(s)ds =$$

$$=(-bI+cS)\left(X(t)x(0)+\int_0^t Y(t-s)f(s)ds\right)+f(t)=(-bI+cS)x(t)+f(t)\,.$$

При заданных начальных условиях x и $\dot{x}$ определяются уравнением (1) однозначно, следовательно, справедливость представления (6) доказана. ▲

Замечание 1. Если допустить дифференцирование разрывных функций за счет выхода в класс обобщенных функций [13, гл. IV, § 4], то для производной функции Коши получаем $\dot{Y}(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-k)+Z(t)$. Теперь, если продифференцировать равенство (2) в обобщенном смысле и подставить вместо $\dot{Y}(t-s)$ найденное представление, мы получим другое доказательство формулы (6).

Обозначим

$$g(p)=p(1-ae^{-p})+b-ce^{-p}, \quad p\in\mathbb{C},$$

характеристическую функцию уравнения (1).

Из определения функций X, $\dot{X}$, Y, Z следует, что они непрерывны или кусочно-непрерывны на $\mathbb{R}_+$. При отрицательных значениях аргументов не нарушая общности их можно доопределить нулем. В работе [9] доказано, что функции X и Y при $t\to+\infty$ растут не быстрее экспоненты. Из равенств (4) и (5) следует, что тем же свойством обладают функции $\dot{X}$ и Z. Следовательно, ко всем четырем функциям применимо преобразование Лапласа:

$$X(t)\div X(p)=\frac{1-ae^{-p}}{g(p)},\ Y(t)\div Y(p)=\frac{1}{g(p)}, \tag{7}$$

$$\dot{X}(t)\div pX(p)-1=\frac{-b+ce^{-p}}{g(p)},\ Z(t)\div Z(p)=\frac{-b+ce^{-p}}{(1-ae^{-p})g(p)}.$$

Приведем в удобной для нас формулировке одно хорошо известное утверждение.

Лемма 2 [14, с. 497–498]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p}=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ \mu t<0,\\ 1, & \text{если}\ \ \mu t>0.\end{cases}$$

Следствие 1. *При любом* $\tau\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau)}dp}{p}=\begin{cases}0, & \text{если}\ \mu(t-\tau)<0,\\ 1, & \text{если}\ \mu(t-\tau)>0.\end{cases}$$

Лемма 3. *Пусть* $|a|<1$. *Тогда при любом* $t\in(n,n+1)$, *где* $n\in\mathbb{N}_0$, *имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p(1-ae^{-p})}=\begin{cases}\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & \text{если}\ \ \mu>0,\\[2mm] \dfrac{a^{n+1}}{1-a}, & \text{если}\ \ \ln|a|<\mu<0.\end{cases}$$

Доказательство. В условиях леммы $\dfrac{1}{1-ae^{-p}}=1+ae^{-p}+$ $+a^2e^{-2p}+\ldots$, значит

$$\frac{e^{pt}}{p(1-ae^{-p})}=\frac{e^{pt}}{p}+\frac{ae^{(t-1)p}}{p}+\frac{a^2e^{(t-2)p}}{p}+\ldots.$$

При $t\in(n,n+1)$ в силу следствия 1 при $\mu>0$ получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p(1-ae^{-p})}=1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Аналогично, при $\mu<0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{p(1-ae^{-p})}=a^{n+1}+a^{n+2}+a^{n+3}+\ldots=\frac{a^{n+1}}{1-a},$$

что и требовалось. ▲

2. Экспоненциально устойчивые решения. Начнем исследование асимптотических свойств решений уравнения (1) с самого сильного типа устойчивости – экспоненциального. Найдем условия на параметры уравнения, при которых введенные выше функции – X, $\dot{X}$, Y, Z – имеют экспоненциальные оценки.

Теорема 2. *Пусть* $|a|<1$ *и все корни характеристической функции* g *лежат слева от мнимой оси. Тогда существуют* $N_k, k=\overline{1,4}$, *и* $\gamma>0$, *такие, что при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ *справедливы оценки:*

a) $|X(t)|\le N_1e^{-\gamma t}$,

b) $|Y(t)|\le N_2e^{-\gamma t}$,

c) $|\dot{X}(t)|\le N_3e^{-\gamma t}$,

d) $|Z(t)|\le N_4e^{-\gamma t}$.

Доказательство. Поскольку $|a|<1$, при $\operatorname{Re}p>\ln|a|$ функция $1-ae^{-p}$ не обращается в нуль. Следовательно, характеристическая функция

$$g(p)=p(1-ae^{-p})+b-ce^{-p}=p\left(1-ae^{-p}+\frac{b-ce^{-p}}{p}\right)$$

не имеет нулей в области $\{p\in\mathbb{C}:\ln|a|<\operatorname{Re}p<0;|\operatorname{Im}p|\ge\Delta\}$ при достаточно большом $\Delta>0$. Поскольку g – аналитическая функция, в прямоугольнике $\{p\in\mathbb{C}:\ln|a|<\operatorname{Re}p<0;|\operatorname{Im}p|\le\Delta\}$ она может иметь лишь конечное число нулей. Значит, среди них есть корень с наибольшей (отрицательной, в силу условий теоремы) вещественной частью. Следовательно, существует такое число γ: $0<\gamma<-\ln|a|$, что в полуплоскости $\{p\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}p>-\gamma\}$ функция g не обращается в нуль.

Из (7) заключаем, что при $\operatorname{Re}p>-\gamma$ функция $X(p)$ является аналитической. По формуле обратного преобразования Лапласа и лемме 2 имеем:

$$X(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{(1-ae^{-p})e^{pt}dp}{g(p)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{pt}\left(\frac{1-ae^{-p}}{g(p)}-\frac{1}{p}\right)dp=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{pt}\,\frac{ce^{-p}-b}{pg(p)}dp=e^{-\gamma t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta, \tag{8}$$

откуда следует утверждение *a*.

Для оценки Y применим формулу (3). Так как $|a|<1$, оператор $I-aS$ обратим в пространстве функций, ограниченных на полуоси [13, с. 230], причем $(I-aS)^{-1}=I+aS+\ldots+a^nS^n+\ldots$, следовательно,

$$Y(t)=\left(I+aS+\ldots+a^nS^n+\ldots\right)X(t)=X(t)+aX(t-1)+\ldots+a^nX(t-n)+\ldots,$$

и, с учетом установленной выше оценки на *X*, а также следующего из определения γ неравенства $|a|e^{\gamma}<1$, получаем утверждение *b*:

$$|Y(t)|\le N_1e^{-\gamma t}(1+|a|e^{\gamma}+\ldots+|a|^n\,e^{n\gamma}+\ldots)\le\frac{N_1e^{-\gamma t}}{1-|a|e^{\gamma}}=N_2e^{-\gamma t}.$$

Оценка на $\dot{X}$ следует из формулы (4):

$$\left|\dot{X}(t)\right|\le|b||Y(t)|+|c||Y(t-1)|\le N_2e^{-\gamma t}\left(|b|+|c|e^{\gamma}\right)=N_3e^{-\gamma t}.$$

Наконец, оценка на Z следует из формулы (5):

$$|Z(t)|\le\left|\dot{X}(t)\right|+|a|\left|\dot{X}(t-1)\right|+\ldots+|a|^n\left|\dot{X}(t-n)\right|+\ldots\le\frac{N_3e^{-\gamma t}}{1-|a|e^{\gamma}}=N_4e^{-\gamma t}.\ \blacktriangle$$

Следствие 2. *Пусть* $|a|<1$. *Тогда из оценки a следуют оценки b, c и d.*

Следствие 3. *Пусть* $|a|<1$. *Тогда оценка a эквивалентна оценке b, а оценка c – оценке d.*

Остановимся подробнее на одной важной постановке начальной задачи для уравнения (*), отличной от принятой в разделе 1. Будем предполагать, что при отрицательных значениях аргумента решение уравнения доопределено *начальными функциями*, заданными на отрезке $[-1,0]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) + bx(t) - cx(t-1) = 0, \ t > 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \ \xi < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Если понимать под решением уравнения (9) непрерывное продолжение начальной функции [15–17], то функцию φ естественно считать частью решения. Тогда логично требовать, чтобы φ была абсолютно непрерывна, а ψ суммируема на $[-1,0]$ и выполнялись равенства $\psi = \dot{\varphi}$, $x(0) = \varphi(0)$.

С другой стороны, можно не рассматривать начальные функции как часть решения, а считать, что мы доопределяем функции x и $\dot{x}$ при отрицательных значениях аргумента некоторыми суммируемыми на $[-1,0]$ функциями φ, ψ соответственно. Здесь равенство $x(0) = \varphi(0)$ уже не обязательно.

Отметим, что начальная задача для уравнения (1) во многих работах ставится в виде (9), а в определения устойчивости решения включаются начальные функции φ, ψ [15–18]. Поэтому имеет смысл получить утверждения об асимптотических свойствах решения и его производной с явными оценками начальных функций.

Независимо от понимания решения, задачу (9) можно переписать в виде (1)

$$(I - aS)\dot{x}(t) + (bI - cS)x(t) = \sigma(t-1), \ \ t > 0, \tag{10}$$

где роль внешнего возмущения f играет функция σ, определяемая по правилу

$$\sigma(t) = \begin{cases} a\psi(t) + c\varphi(t), \ \text{если} \ t \in [-1,0], \\ 0, \ \text{если} \ t \notin [-1,0]. \end{cases}$$

В такой постановке (9) оказывается частным случаем (1) со специальной правой частью $f(t) = \sigma(t-1)$. В любом случае $\sigma \in L_1[-1,0]$, но если окажется, что $\sigma \in L_p[-1,0]$ при $p > 1$, то, учитывая это, можно получать более тонкие оценки.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а* $\sigma \in L_p[-1,0]$. *Тогда найдутся такие* $\gamma, N > 0$*, что для решения уравнения* (10) *справедливы оценки:*

1. Если $1 \le p \le \infty$*, то* $\left|x(t)\right| \le Ne^{-\gamma t}\left(\left|x(0)\right| + \left\|\sigma\right\|_p\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Если $1 \le p < \infty$*, то* $\left(\int\limits_{t-1}^{t} \left|\dot{x}(s)\right|^p ds\right)^{1/p} \le Ne^{-\gamma t}\left(\left|x(0)\right| + \left\|\sigma\right\|_p\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Если $p = \infty$*, то* $\left|\dot{x}(t)\right| \le Ne^{-\gamma t}\left(\left|x(0)\right| + \left\|\sigma\right\|_\infty\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Для $p = 1$ первое утверждение теоремы вытекает из формулы (2) и пп. *a*, *b* теоремы 2:

$$\left|x(t)\right| \le \left|X(t)\right|\left|x(0)\right| + \int\limits_0^1 \left|Y(t-s)\right|\left|\sigma(s-1)\right| ds \le$$

$$\le N_1 e^{-\gamma t}\left|x(0)\right| + N_2 e^{-\gamma(t-1)}\left\|\sigma\right\|_1 \le Ne^{-\gamma t}\left(\left|x(0)\right| + \left\|\sigma\right\|_1\right).$$

Для $p > 1$ применяем неравенство Гельдера, где $1/p + 1/q = 1$:

$$\left|x(t)\right| \le \left|X(t)\right|\left|x(0)\right| +$$

$$+\int\limits_0^1 \left|Y(t-s)\right|\left|\sigma(s-1)\right| ds \le N_1 e^{-\gamma t}\left|x(0)\right| + \left(\int\limits_{t-1}^{t} \left|Y(s)\right|^q ds\right)^{1/q} \left\|\sigma\right\|_p \le$$

$$N_1 e^{-\gamma t}\left|x(0)\right| + N_2 e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\gamma q} - 1}{\gamma q}\right)^{1/q} \left\|\sigma\right\|_p \le Ne^{-\gamma t}\left(\left|x(0)\right| + \left\|\sigma\right\|_p\right).$$

Докажем второе утверждение. Пусть $t \in (n, n+1)$, $s \in [t-1, t]$. Тогда по формуле (6) имеем

$$\dot{x}(s) = \dot{X}(s)x(0) + a^{n-1}\sigma(s-n) + a^n\sigma(s-n-1) + \int\limits_0^s Z(s-\tau)\sigma(\tau-1)d\tau.$$

Далее интегрируем это равенство на отрезке $[t-1, t]$ и применяем пп. *c*, *d* теоремы 2. В итоге при $p = 1$ получаем

$$\int\limits_{t-1}^{t}|\dot{x}(s)|\,ds \le |x(0)|\int\limits_{t-1}^{t}\left|\dot{X}(s)\right|ds+\left(|a|^{n-1}+|a|^{n}\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}|\sigma(s)|\,ds\right)+$$

$$+\int\limits_{t-1}^{t}\left(\int\limits_{0}^{1}|Z(s-\tau)||\sigma(\tau-1)|\,d\tau\right)ds \le N_3 e^{-\gamma(t-1)}|x(0)|+$$

$$+\frac{1+|a|}{a^2}e^{-\gamma t}\|\sigma\|_1+N_4 e^{-\gamma(t-1)}\left(\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)\|\sigma\|_1 \le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)|+\|\sigma\|_1\right).$$

При $1<p<\infty$ применяем неравенство Гельдера, где $1/p+1/q=1$:

$$\left(\int\limits_{t-1}^{t}|\dot{x}(s)|^p\,ds\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_{t-1}^{t}\left|\dot{X}(s)\right|^p ds\right)^{1/p}|x(0)|+$$

$$+\left(|a|^{n-1}+|a|^{n}\right)\left(\int\limits_{-1}^{0}|\sigma(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int\limits_{t-1}^{t}\left(\int\limits_{0}^{1}|Z(s-\tau)||\sigma(\tau-1)|\,d\tau\right)^{p}ds\right)^{1/p} \le N_3 e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\gamma p}-1}{\gamma p}\right)^{1/p}|x(0)|+$$

$$+\frac{1+|a|}{a^2}e^{-\gamma t}\|\sigma\|_p+N_4 e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\gamma p}-1}{\gamma p}\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\frac{e^{\gamma q}-1}{\gamma q}\right)^{1/q}\|\sigma\|_p \le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)|+\|\sigma\|_p\right).$$

Наконец, при $p=\infty$ имеем

$$|\dot{x}(t)| \le N_3 e^{-\gamma t}|x(0)|+2|a|^{n-1}\|\sigma\|_\infty+$$

$$+N_4 e^{-\gamma t}\left(\frac{e^{\gamma}-1}{\gamma}\right)\|\sigma\|_\infty \le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)|+\|\sigma\|_\infty\right). \ \blacktriangle$$

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а* $\sigma\in L_\infty[-1,0]$. *Тогда тривиальное решение уравнения* (10) *экспоненциально устойчиво вместе с производной.*

Для уравнения (1) можно указать эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости решения. Эти условия – в аналитической и геометрической форме – были найдены в работах [4] и [8].

Зададим в пространстве $Oabc$ криволинейную поверхность и три плоскости:

$$\Gamma=\{(a,b,c): a=\cos\theta+b\sin\theta/\theta,\ c=-\theta\sin\theta+b\cos\theta,\ \theta\in[0,\pi)\},$$

$$\mathrm{P}=\{(a,b,c): b=c\},\ Q_{1,2}=\{(a,b,c): a=\pm 1\}.$$

Пересечение Г и Р обозначим $R=\Gamma\cap\mathrm{P}$.

Поверхности $\Gamma, \mathrm{P}, Q_1, Q_2$ ограничивают в пространстве $Oabc$ область *D*. Из результатов работы [8] следует, что *условия теоремы 2 выполнены тогда и только тогда, когда* $(a,b,c)\in D$, *т.е. область D является областью экспоненциальной устойчивости уравнения* (2). Теоремы 2 и 3 усиливают этот результат: в области *D* имеет экспоненциальную оценку не только решение уравнения (1), но и его производная.

Интересен вопрос о том, как меняется асимптотика решения рассматриваемого уравнения при переходе через границу области *D*. В следующих двух разделах мы изучим поведение решения на плоскости Р, поверхности Г и «ребре» R. Поведение решения на плоскостях Q_1, Q_2 наиболее сложно и требует отдельного исследования.

3. Стабилизирующиеся решения. Изучим асимптотическое поведение решения уравнения (1) и его производной в случае, когда неравенство $|a|<1$ остается справедливым, а точка (a,b,c) лежит на плоскости P.

Теорема 4. *Пусть* $|a|<1$ *и* $(a,b,c)\in P\setminus R$. *Тогда существуют такие* $N_k,\ k=\overline{1,4},\ \gamma>0$, *что при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ *справедливы оценки:*

a) $$\left|X(t)-\frac{1-a}{1-a+b}\right|\le N_1 e^{-\gamma t},$$

b) $$\left|Y(t)-\frac{1}{1-a+b}\right|\le N_2 e^{-\gamma t},$$

c) $\left|\dot{X}(t)\right| \le N_3 e^{-\gamma t}$,

d) $\left|Z(t)\right| \le N_4 e^{-\gamma t}$.

Доказательство. Характеристическая функция уравнения (1) в этом случае имеет вид

$$g(p) = p(1 - ae^{-p}) + b(1 - e^{-p}).$$

Разделяя в уравнении $g(i\varphi) \equiv i\varphi(1 - ae^{i\varphi}) + b(1 - e^{i\varphi}) = 0$ вещественную и мнимую часть, получаем $\varphi = 0$, т.е. на мнимой оси функция g имеет единственный корень $p = 0$. Так как $g'(0) = 1 - a + b > 0$, то корень $p = 0$ – простой. Применяя теорему Руше [14, с. 454], убеждаемся, что справа от мнимой оси у функции g нулей нет.

Аналогично тому, как это было доказано в теореме 2, устанавливаем, что при некотором $\Delta > 0$ в области $\left\{p \in \mathbb{C} : \ln|a| < \operatorname{Re} p < 0; |\operatorname{Im} p| \ge \Delta\right\}$ функция g не обращается в нуль. Следовательно, существует такое число γ: $0 < \gamma < -\ln|a|$, что в полуплоскости $\left\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > -\gamma\right\}$ функция g не имеет иных нулей, кроме единственного простого корня $p = 0$.

Зафиксируем $\delta > 0$, $\mu > 0$ и рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ прямоугольник $ABCD$, вершины которого находятся в точках $A = \delta - i\mu$, $B = \delta + i\mu$, $C = -\gamma + i\mu$, $D = -\gamma - i\mu$, с ориентацией границы против часовой стрелки. Разобьем интеграл от функции $X(p)e^{pt}$ по границе этого прямоугольника на четыре интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(ABCDA)} X(p) e^{pt} dp = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{11}$$

и оценим каждый из них. По формуле обратного преобразования Лапласа

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(AB)} X(p) e^{pt} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta - i\mu}^{\delta + i\mu} X(p) e^{pt} dp \underset{\mu \to \infty}{\to} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} X(p) e^{pt} dp = X(t).$$

Применяя установленную при доказательстве теоремы 2 оценку (8), получаем:

$$-I_3 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(DC)} X(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\mu}^{-\gamma+i\mu} X(p)e^{pt}dp \underset{\mu\to\infty}{\to} \tag{12}$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\to} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{b(e^{-p}-1)}{pg(p)}e^{pt}\,dp = e^{-\gamma t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta .$$

Далее,

$$\begin{gathered}\left|I_2\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(CB)} X(p)e^{pt}dp\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma+i\mu}^{\delta+i\mu} X(p)e^{pt}\,dp\right| = \\ = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta} X(\zeta+i\mu)e^{(\zeta+i\mu)t}\,d\zeta\right| \le\end{gathered} \tag{13}$$

$$\le \frac{e^{\delta t}}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\left|X(\zeta+i\mu)\right|d\zeta \le Ne^{\delta t}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\mu^2}} = Ne^{\delta t}\ln\left|\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\mu^2}}{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+\mu^2}}\right| \underset{\mu\to\infty}{\to} 0 .$$

Аналогично,

$$\begin{gathered}\left|I_4\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(DA)} X(p)e^{pt}dp\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma-i\mu}^{\delta-i\mu} X(p)e^{pt}\,dp\right| = \\ = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta} X(\zeta-i\mu)e^{(\zeta-i\mu)t}\,d\zeta\right| \le\end{gathered} \tag{14}$$

$$\le \frac{e^{\delta t}}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\left|X(\zeta-i\mu)\right|d\zeta \le Ne^{\delta t}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\mu^2}} = Ne^{\delta t}\ln\left|\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\mu^2}}{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+\mu^2}}\right| \underset{\mu\to\infty}{\to} 0 .$$

С другой стороны, по теореме Коши о вычетах [14, с. 85],

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ABCDA)} X(p)e^{pt}dp = \operatorname*{res}_{p=0}\left(X(p)e^{pt}\right) = \frac{1-a}{g'(0)} = \frac{1-a}{1-a+b} .$$

Переходя в равенстве (11) к пределу при $\mu \to \infty$, получаем утверждение *a*.

Для оценки Y применим формулу (4). Поскольку $|a|<1$, то оператор $I-aS$ обратим, $(I-aS)^{-1}=I+aS+\ldots+a^nS^n+\ldots$, следовательно,

$$Y(t)=\left(I+aS+\ldots+a^nS^n+\ldots\right)X(t)=X(t)+aX(t-1)+\ldots+a^nX(t-n)+\ldots,$$

$$Y(t)-\frac{1}{1-a+b}=\left(X(t)-\frac{1-a}{1-a+b}\right)+a\left(X(t-1)-\frac{1-a}{1-a+b}\right)+$$
$$+\ldots+a^n\left(X(t-n)-\frac{1-a}{1-a+b}\right)+\ldots$$

С учетом установленной выше оценки на X и следующего из определения γ неравенства $|a|e^{\gamma}<1$, получаем утверждение *b*:

$$\left|Y(t)-\frac{1}{1-a+b}\right|\le N_1e^{-\gamma t}(1+|a|e^{\gamma}+\ldots+|a|^n\,e^{n\gamma}+\ldots)\le\frac{N_1e^{-\gamma t}}{1-|a|e^{\gamma}}=N_2e^{-\gamma t}.$$

Оценка на $\dot X$ следует из формулы (4) и утверждения *b*:

$$\dot X(t)=b(-I+S)Y(t)=b\left(Y(t-1)-Y(t)\right)=$$
$$=b\left(Y(t-1)-\frac{1}{1-a+b}-Y(t)+\frac{1}{1-a+b}\right),$$

$$\left|\dot X(t)\right|\le|b|\left(\left|Y(t)-\frac{1}{1-a+b}\right|+\left|Y(t-1)-\frac{1}{1-a+b}\right|\right)\le$$
$$\le N_2e^{-\gamma t}\,|b|\left(1+e^{\gamma}\right)=N_3e^{-\gamma t}.$$

И наконец, оценка на Z вытекает из следствия 2 и утверждения *c*. ▲

Соответствующий результат получается и для уравнения (10).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при любом* $\sigma\in L_p[-1,0]$ *найдутся такие* $\gamma,N>0$, *что при любом* $t\in\mathbb{R}_+$ *для решения уравнения* (10) *справедливы оценки:*

1. Если $1 \le p \le \infty$, *то* $\left| x(t) - \dfrac{1-a}{1-a+b} x(0) - \dfrac{1}{1-a+b} \int\limits_{-1}^{0} \sigma(s) ds \right| \le$

$\le Ne^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_p \right)$.

2. Если $1 \le p < \infty$, *то* $\left(\int\limits_{t-1}^{t} |\dot{x}(s)|^p \, ds \right)^{1/p} \le Ne^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_p \right)$.

3. Если $p = \infty$, *то* $|\dot{x}(t)| \le Ne^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_\infty \right)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из формулы (2) и пп. a, b теоремы 4. Доказательство второго и третьего утверждений дословно повторяет рассуждения теоремы 3. ▲

Следствие 5. *В условиях теоремы 4 тривиальное решение уравнения* (10) *является равномерно устойчивым, но не является асимптотически устойчивым.*

Следствие 6. *Пусть выполнены условия теоремы 4, а* $\sigma \in L_\infty[-1,0]$. *Тогда производная тривиального решения уравнения* (10) *экспоненциально устойчива.*

Теорема 5 описывает класс уравнений вида (10), для которых решение не является асимптотически (и тем более экспоненциально) устойчивым. При переходе через плоскость P уравнение теряет устойчивость за счет появления решений, имеющих на бесконечности ненулевой предел. Однако производная любого решения имеет экспоненциальную оценку: интегральную при $1 \le p < \infty$ и равномерную при $p = \infty$.

4. Асимптотически периодические решения. В этом разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение решения уравнения (1) и его производной в случае, когда неравенство $|a| < 1$ выполнено, а точка (a,b,c) принадлежит поверхности Г.

Теорема 6. *Пусть* $|a| < 1$ *и* $(a,b,c) \in \Gamma \setminus R$. *Тогда существуют* $\gamma > 0$ *и такие постоянные* $A_k, B_k, N_k, k = \overline{1,4}$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *справедливы оценки:*

a) $\left|X(t) - A_1\cos\theta t - B_1\sin\theta t\right| \le N_1 e^{-\gamma t}$,

b) $\left|Y(t) - A_2\cos\theta t - B_2\sin\theta t\right| \le N_2 e^{-\gamma t}$,

c) $\left|\dot{X}(t) - A_3\cos\theta t - B_3\sin\theta t\right| \le N_3 e^{-\gamma t}$,

d) $\left|Z(t) - A_4\cos\theta t - B_4\sin\theta t\right| \le N_4 e^{-\gamma t}$,

причем во всех оценках a–d $\theta = \sqrt{\dfrac{c^2 - b^2}{1 - a^2}} \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. В условиях теоремы 6 характеристическая функция g уравнения (1) имеет на мнимой оси два простых комплексно-сопряженных корня $p = \pm i\theta$, где $\theta = \sqrt{\dfrac{c^2 - b^2}{1 - a^2}} \in \mathbb{R}_+$. Справа от мнимой оси функция g не имеет нулей. Аналогично тому, как это было доказано в теореме 2, устанавливаем, что при некотором $\Delta > 0$ в области $\left\{p \in \mathbb{C} : \ln|a| < \operatorname{Re} p < 0; |\operatorname{Im} p| \ge \Delta\right\}$ функция g не обращается в нуль. Следовательно, существует такое число γ: $0 < \gamma < -\ln|a|$, что в полуплоскости $\left\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > -\gamma\right\}$ функция g не имеет иных корней, кроме пары чисто мнимых $p = \pm i\theta$.

Зафиксируем $\delta > 0$, $\mu > 0$ и рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ прямоугольник $ABCD$, вершины которого находятся в точках $A = \delta - i\mu$, $B = \delta + i\mu$, $C = -\gamma + i\mu$, $D = -\gamma - i\mu$, с ориентацией границы против часовой стрелки. Рассмотрим интеграл от функции $X(p)e^{pt}$ по контуру $(ABCDA)$ и представим его в виде (11). Заметим, что полученные при доказательстве теоремы 4 оценки (12)–(14) на интегралы I_2, I_3, I_4 остаются в силе. По теореме Коши о вычетах [14, с. 85] имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ABCDA)} X(p)e^{pt}\,dp = \operatorname*{res}_{p=+i\theta}\left(X(p)e^{pt}\right) + \\ + \operatorname*{res}_{p=-i\theta}\left(X(p)e^{pt}\right) = \omega_1 e^{i\theta t} + \bar{\omega}_1 e^{-i\theta t},$$

где $\omega_1 = \dfrac{1 - ae^{-i\theta}}{g'(i\theta)}$.

Переходя в равенстве (11) к пределу при $\mu \to \infty$ и используя формулу обратного преобразования Лапласа, получаем

$$\left| X(t) - \omega_1 e^{i\theta t} - \overline{\omega}_1 e^{-i\theta t} \right| \le N_1 e^{-\gamma t}. \qquad (15)$$

Из формулы (3) имеем

$$Y(t) = X(t) + aX(t-1) + \ldots + a^n X(t-n) + \ldots$$

Заметим, что

$$a^n X(t-n) = a^n \left(X(t-n) - \omega_1 e^{i\theta(t-n)} - \overline{\omega}_1 e^{-i\theta(t-n)} \right) +$$

$$+ a^n \left(\omega_1 e^{i\theta(t-n)} + \overline{\omega}_1 e^{-i\theta(t-n)} \right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\omega_1 e^{i\theta(t-n)} + \overline{\omega}_1 e^{-i\theta(t-n)} \right) = \omega_1 e^{i\theta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-i\theta} \right)^n +$$

$$+ \overline{\omega}_1 e^{-i\theta t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{i\theta} \right)^n = \omega_2 e^{i\theta t} + \overline{\omega}_2 e^{-i\theta t},$$

где $\omega_2 = \dfrac{\omega_1}{1 - ae^{-i\theta}}$.

Следовательно,

$$\left| Y(t) - \omega_2 e^{i\theta t} - \overline{\omega}_2 e^{-i\theta t} \right| \le N_2 e^{-\gamma t}. \qquad (16)$$

Далее, легко видеть, что

$$-bY(t) + cY(t-1) = c\left(Y(t-1) - \omega_2 e^{i\theta(t-1)} - \overline{\omega}_2 e^{-i\theta(t-1)} \right) -$$

$$-b\left(Y(t) - \omega_2 e^{i\theta t} - \overline{\omega}_2 e^{-i\theta t} \right) + \omega_3 e^{i\theta t} + \overline{\omega}_3 e^{-i\theta t},$$

где $\omega_3 = \omega_2 \left(ce^{-i\theta} - b \right)$.

С учетом формулы (4) имеем:

$$\left| \dot{X}(t) - \omega_3 e^{i\theta t} - \overline{\omega}_3 e^{-i\theta t} \right| \le N_3 e^{-\gamma t}. \qquad (17)$$

Наконец, полагая $\omega_4 = \dfrac{\omega_3}{1 - ae^{-i\theta}}$, на основе формулы (5) устанавливаем оценку

$$\left| Z(t) - \omega_4 e^{i\theta t} - \bar{\omega}_4 e^{-i\theta t} \right| \le N_4 e^{-\gamma t}. \tag{18}$$

Теперь, чтобы получить все четыре утверждения теоремы, достаточно обозначить $A_k = \omega_k + \bar{\omega}_k$, $B_k = i(\omega_k - \bar{\omega}_k)$, $k = \overline{1,4}$ и воспользоваться оценками (15)–(18). ▲

Соответствующий результат получается также для уравнения (10).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда при любом* $\sigma \in L_p[-1,0]$ *найдутся* $N, \gamma > 0$ *и такие* $A_k, B_k, k = \overline{1,3}$, *что при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *для решения уравнения* (10) *справедливы оценки:*

1. Если $1 \le p \le \infty$, *то* $\left| x(t) - A_1 \cos\theta t - B_1 \sin\theta t \right| \le$ $\le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\sigma\|_p \right)$.

2. Если $1 \le p < \infty$, *то* $\left(\displaystyle\int_{t-1}^{t} \left| \dot{x}(s) - A_2 \cos\theta s - B_2 \sin\theta s \right|^p ds \right)^{1/p} \le$ $\le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\sigma\|_p \right)$.

3. Если $p = \infty$, *то* $\left| \dot{x}(t) - A_3 \cos\theta t - B_3 \sin\theta t \right| \le Ne^{-\gamma t}\left(|x(0)| + \|\sigma\|_\infty \right)$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и теорема 3: для доказательства первого утверждения используется формула (2) и пп. *a*, *b* теоремы 6, для доказательства второго и третьего утверждений – формула (6) и пп. *c*, *d* теоремы 6. ▲

Следствие 7. *В условиях теоремы 6 тривиальное решение уравнения* (10) *является равномерно устойчивым, но не является асимптотически устойчивым.*

Следствие 8. *Пусть выполнены условия теоремы 6, а* $\sigma \in L_\infty[-1,0]$. *Тогда тривиальное решение уравнения* (10) *равномерно устойчиво вместе с производной.*

Теорема 7 описывает класс уравнений вида (1), решения которых асимптотически сближаются с периодическими функциями. Аналогичным свойством обладают и производные, если оценивать расстояние до периодической функции по норме пространства $L_p[t-1,t]$. Следовательно, при переходе через поверхность Γ уравнение (1) теряет устойчивость за счет появления периодических решений.

5. Неустойчивые решения с устойчивой производной. Осталось рассмотреть поведение решения уравнения (2) в случае, когда точка (a,b,c) принадлежит $R=\Gamma\cap\mathrm{P}$. Это означает, что коэффициенты уравнения (1) связаны соотношениями: $b=c=a-1$, причем $a\in(-1,1)$, а задача (9) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t)-a\dot{x}(t-1)+(a-1)x(t)-(a-1)x(t-1)=0, \ t>0, \\ x(\xi)=\varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi)=\psi(\xi), \quad \xi<0. \end{cases} \tag{19}$$

Покажем, что уравнение (20) не является равномерно (и тем более асимптотически) устойчивым. Выберем в качестве начальных функций $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=\dot{\varphi}(t)=1$. Подставляя в (19) $x(t)=t$, убеждаемся, что эта функция является решением. Следовательно, уравнение (19) имеет неограниченные решения.

Исследуем для уравнения (19) поведение функций $\dot{X}$ и Z.

Теорема 8. *Пусть $|a|<1$ и $(a,b,c)\in R$. Тогда существуют такие $N_1, N_2, \gamma>0$, что при всех $t\in\mathbb{R}_+$ справедливы оценки:*

a) $\left|\dot{X}(t)-\dfrac{2(1-a)}{1+a}\right|\le N_1e^{-\gamma t}$,

b) $\left|Z(t)-\dfrac{2}{1-a}\right|\le N_2e^{-\gamma t}$.

Доказательство. Характеристическая функция уравнения (1) в этом случае имеет вид

$$g(p)=p(1-ae^{-p})+(a-1)(1-e^{-p}).$$

Разделяя в уравнении $g(i\varphi)\equiv i\varphi(1-ae^{i\varphi})+(a-1)(1-e^{i\varphi})=0$ вещественную и мнимую часть, получаем $\varphi=0$, т.е. на мнимой оси функция g имеет единственный корень $p=0$. Так как $g'(0)=0$, а $g''(0)\ne0$, то корень $p=0$ имеет кратность 2. Справа от мнимой оси у функции g нулей нет.

Аналогично тому, как это было доказано в теореме 2, устанавливаем, что при некотором $\Delta>0$ в области

$\{p\in\mathbb{C}:\ln|a|<\operatorname{Re}p<0;|\operatorname{Im}p|\geq\Delta\}$ функция g не обращается в нуль. Следовательно, существует такое число γ: $0<\gamma<-\ln|a|$, что в полуплоскости $\{p\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}p>-\gamma\}$ функция g не имеет иных нулей, кроме двукратного корня $p=0$.

Зафиксируем $\delta>0$, $\mu>0$ и рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ прямоугольник $ABCD$, вершины которого находятся в точках $A=\delta-i\mu$, $B=\delta+i\mu$, $C=-\gamma+i\mu$, $D=-\gamma-i\mu$, с ориентацией границы против часовой стрелки. Разобьем интеграл от функции $Y(p)e^{pt}$ по границе этого прямоугольника на четыре интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ABCDA)}Y(p)e^{pt}dp=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{20}$$

и оценим каждый из них.

По формуле обратного преобразования Лапласа

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(AB)}Y(p)e^{pt}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\mu}^{\delta+i\mu}Y(p)e^{pt}\,dp\underset{\mu\to\infty}{\to}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}Y(p)e^{pt}dp=Y(t).$$

Пусть $t\in(n,n+1)$. По лемме 3 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}Y(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{pt}\left(\frac{1}{g(p)}-\frac{1}{p(1-ae^{-p})}\right)dp+\frac{a^{n+1}}{1-a}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{pt}\,\frac{(1-a)(1-e^{-p})}{p(1-ae^{-p})g(p)}dp+\frac{a^{n+1}}{1-a}=e^{-\gamma t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta+\frac{a^{n+1}}{1-a},$$

откуда следует

$$-I_3=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(DC)}Y(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\mu}^{-\gamma+i\mu}Y(p)e^{pt}dp\underset{\mu\to\infty}{\to}$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\to}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}Y(p)e^{pt}dp=e^{-\gamma t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}O\left(\frac{1}{\gamma^2+\zeta^2}\right)d\zeta+\frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Далее,

$$|I_2|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(CB)}Y(p)e^{pt}dp\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma+i\mu}^{\delta+i\mu}Y(p)e^{pt}\,dp\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}Y(\zeta+i\mu)e^{(\zeta+i\mu)t}\,d\zeta\right|\le$$

$$\le\frac{e^{\delta t}}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\left|Y(\zeta+i\mu)\right|d\zeta\le Ne^{\delta t}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\mu^2}}=Ne^{\delta t}\ln\left|\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\mu^2}}{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+\mu^2}}\right|\underset{\mu\to\infty}{\to}0\,.$$

Аналогично,

$$|I_4|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(DA)}Y(p)e^{pt}dp\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma-i\mu}^{\delta-i\mu}Y(p)e^{pt}\,dp\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}Y(\zeta-i\mu)e^{(\zeta-i\mu)t}\,d\zeta\right|\le$$

$$\le\frac{e^{\delta t}}{2\pi}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\left|Y(\zeta-i\mu)\right|d\zeta\le Ne^{\delta t}\int\limits_{-\gamma}^{\delta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\mu^2}}=Ne^{\delta t}\ln\left|\frac{\delta+\sqrt{\delta^2+\mu^2}}{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+\mu^2}}\right|\underset{\mu\to\infty}{\to}0\,.$$

С другой стороны, по теореме Коши о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(ABCDA)}Y(p)e^{pt}dp=\operatorname*{res}_{p=0}\left(Y(p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2e^{pt}}{g(p)}\right)\Bigg|_{p=0}=\frac{2t}{1+a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1+2a}{(1+a)^2}.$$

Переходя в равенстве (20) к пределу при $\mu\to\infty$, с учетом выбора γ получаем оценку:

$$\left| Y(t) - \frac{2t}{1+a} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1+2a}{(1+a)^2} \right| \le Ne^{-\gamma t}. \qquad (21)$$

Далее, применяя формулу (5), имеем:

$$\dot{X}(t) = (a-1)\big(Y(t-1) - Y(t)\big) =$$
$$= (a-1)\left(Y(t-1) - \frac{2(t-1)}{1+a} - Y(t) + \frac{2t}{1+a} \right) + \frac{2(1-a)}{1+a},$$

откуда следует утверждение *a*. Утверждение *b* получается из формулы (5) и оценки *a*. ▲

Для производной любого решения уравнения (19) имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 8, а $\sigma \in L_p[-1,0]$. Тогда найдутся такие $N_1, N_2, \gamma > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ для производной решения уравнения (19) справедливы оценки:

1. Если $1 \le p < \infty$*, то*

$$\left(\int_{t-1}^{t} \left| \dot{x}(s) - \frac{2(1-a)}{1+a} x(0) - \frac{2}{1+a} \int_{-1}^{0} \sigma(s) ds \right|^p ds \right)^{1/p} \le Ne^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_p \right).$$

2. Если $p = \infty$*, то*

$$\left| \dot{x}(t) - \frac{2(1-a)}{1+a} x(0) - \frac{2}{1+a} \int_{-1}^{0} \sigma(s) ds \right| \le Ne^{-\gamma t} \left(|x(0)| + \|\sigma\|_\infty \right).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и теорема 3: применяем формулу (6) и пп. *a*, *b* теоремы 8. ▲

Следствие 9. *Пусть выполнены условия теоремы 8, а* $\sigma \in L_\infty[-1,0]$. *Тогда производная тривиального решения уравнения* (19) *равномерно устойчива.*

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы 8 была установлена формула (21), которая весьма точно характеризует асимптотическое поведение функции Коши. Используя равенство (3), из оценки (21) легко получить формулу асимптотического поведения фундаментального решения.

$$X(t)=Y(t)-aY(t-1)=Y(t)-\frac{2t}{1+a}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1+2a}{(1+a)^2}-$$

$$-a\left(Y(t-1)-\frac{2(t-1)}{1+a}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1+2a}{(1+a)^2}\right)+\frac{2t(1-a)}{1+a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+4a+1}{(1+a)^2},$$

следовательно,

$$\left|X(t)-\frac{2(1-a)t}{1+a}-\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2+4a+1}{(1+a)^2}\right|\le Ne^{-\gamma t}. \qquad (2)$$

Таким образом, несмотря на то что уравнение (19) не является устойчивым, с помощью оценок (21) и (22) можно дать хорошее описание асимптотического поведения любого его решения.

Замечания и комментарии. Идея изучения асимптотического поведения решений уравнений нейтрального типа вместе с производной выдвигалась и развивалась многими авторами [17, 19–21], но конкретное воплощение этой идеи осуществлялась ими по-разному. Чаще всего реализовался подход, при котором в пространстве решений априорно выбиралась норма, учитывающая и решение, и ее производную.

Например, в монографии [17, с. 161] для уравнений нейтрального типа вводится понятие C_1-устойчивости, суть которого в том, что классические определения устойчивости (по Ляпунову, асимптотической и т.д.) применяются к сумме $|x(t)|+|\dot{x}(t)|$. В задачах вида (9) начальная функция также предполагается непрерывно дифференцируемой (причем $\psi=\dot{\varphi}$, а $x(0)=\varphi(0)$). Такой подход позволяет доказать утверждения типа следствий 4 и 8 (ситуация одинакового асимптотического поведения x и $\dot{x}$), но непригоден для случаев, когда их асимптотика различна. Кроме того, из формулы (6) следует, что в рамках C_1-устойчивости невозможно расширить класс начальных функций до $L_p[-1,0]$ при $p<\infty$.

Другой пример – работа [20], где норма решения задается равенством $\|x\|_{W_2[t-1,t]}=\left(\int\limits_{t-1}^{t}\left(x^2(s)+\dot{x}^2(s)\right)ds\right)^{1/2}$, результаты формулируются в терминах оценок вида $\|x\|_{W_2[t-1,t]}\le Me^{\kappa t}t^m\|\varphi\|_{W_2[-1,0]}$, а κ и m определяются корнями характеристической функции.

Сопоставим этот подход с теоремами 3, 5, 7 и 9. Как отмечалось выше, выбор интегральной нормы для функции $\dot{x}$ оправдан и задается пространством, которому принадлежат начальные функции. В [20] предполагается, что $\varphi \in W_2[-1,0]$, поэтому квадратичная норма для производной выбрана правильно. Но для самого решения такая норма невыгодна, так как для функции x можно получать более тонкие поточечные оценки. Другой недостаток выбора общей нормы для x и $\dot{x}$ заключен в том, что полученная оценка неизбежно будет диктоваться той функцией, которая растет на бесконечности быстрее, и мы утратим информацию об асимптотическом поведении второй функции. Между тем результаты разделов 4 и 6 этой статьи показывают, что x и $\dot{x}$ могут вести себя существенно по-разному: производная стремится к нулю, а решение – нет; производная ограничена, а решение неограниченно возрастает.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00928).

Список литературы

1. Diekmann O., Getto P., Nakata Y. On the characteristic equation $\lambda = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\lambda)e^{-\lambda}$ and its use in the context of a cell population model // Journal of Mathematical Biology. – 2016. – Vol. 72. – P. 877–908.

2. Putelat T., Willis J.R., Dawes J.H.P. Wave-modulated orbits in rate-and-state friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol. 47. – P. 258–267.

3. Hahn W. Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differetial-Differetzengleichungen mit konstanten Koeffitienten // Annals of Mathematics. – 1956. – Vol. 131. – S. 151–166.

4. Ожиганова И.А. Определение области асимптотической устойчивости для дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Труды УДН. – 1962. – Т. 1. – С. 52–62.

5. Громова П.С., Зверкин А.М. О тригонометрических рядах, суммы которых являются непрерывными неограниченными функциями на вещественной оси – решениях уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференциальные уравнения. – 1968. – № 4. – С. 1774–1784.

6. Баландин А.С., Малыгина В.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 7. – С.17–27.

7. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 256, iss. 7. – P. 2368–2391.

8. Баландин А.С. Об устойчивости одного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2017): сб. тр. X Междунар. конф. – Воронеж, 2017. – С. 68–71.

9. Баландин А.С. О связи между фундаментальным решением и функцией Коши для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Прикладная математика и вопросы управления. – 2018. – № 1. – С. 13–25.

10. Баландин А.С. О разрешимости некоторых функциональных уравнений // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2018): сб. тр. XI Междунар. конф. – Воронеж, 2018. – С. 60–63.

11. Баландин А.С. О разрешимости одного функционального уравнения // Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018): тез. докладов междунар. конф. – Алушта, 2018. – С. 13–15.

12. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 180 с.

13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

15. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1963. – 548 с.

16. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

17. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 484 с.

18. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

19. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.

20. Власов В.В. Спектральные задачи, возникающие в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2003. – Т. 1. – С. 69–83.

21. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1990. – 168 с.

References

1. Diekmann O., Getto P., Nakata Y. On the characteristic equation $\lambda = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\lambda)e^{-\lambda}$ and its use in the context of a cell population model. *Journal of Mathematical Biology*, 2016, Vol. 72, pp. 877–908.

2. Putelat T., Willis J.R., Dawes J.H.P. Wave-modulated orbits in rate-and-state friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, vol. 47, pp. 258–267.

3. Hahn W. Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differetial-Differetzen-gleichungen mit konstanten Koeffitienten. *Annals of Mathematics*, 1956, vol. 131, pp. 151–166.

4. Ozhiganova I.A. Opredelenie oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti dlya differentsial'nykh uravnenij pervogo poryadka s otklonyushhimsya argumentum [Determining the domain of asymptotic stability for first order differential equations with deviating argument]. *Trudy UDN*, 1962, vol. 1, pp. 52–62.

5. Gromova P.S., Zverkin A.M. O trigonometricheskikh ryadakh, summy kotorykh yavlyautsya nepreryvnymi neogranichennymi funktsiyami na veshhestvennoj osi – resheniyakh uravnenij s zapazdyvayushhim argumentum [On trigonometric series whose sums are continuous unbounded functions on the real axis – solutions of equations with retarded argument]. *Differential Equations,* 1968, no. 4, pp. 1774–1784.

6. Balandin A.S., Malygina V.V. Exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2007, no. 7, pp. 15–24.

7. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation. *Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 256, iss. 7, pp. 2368–2391.

8. Balandin A.S. Ob ustojchivosti odnogo differentsial'nogo uravneniya, ne razreshyonnogo otnositel'no proizvodnoj // Sbornik trudov X Mezhdunarodnoj konferentsii «Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologij (PMTUKT-2017)», Voronezh, 2017, pp. 68–71.

9. Balandin A.S. O svyazi mezhdu fundamental'nym resheniem i funktsiej Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenij nejtral'nogo tipa [On relationship between the fundamental solution and the Cauchy function for neutral functional differential equations]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2018, no.1, pp. 13–25.

10. Balandin A.S. O razreshimosti nekotorykh funktsional'nykh uravnenij [On the solvability of some functional equations]. *Sovremennye metody prikladnoj matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologij (PMTUKT-2018). Sbornik trudov XI Mezhdunarodnoj konferentsii*. Voronezh, 2018, pp. 60–63.

11. Balandin A.S. O razreshimosti odnogo funktsional'nogo uravneniya [On solvability of one functional equation]. *Dinamicheskie sistemy v nauke i tekhnologiyakh (DSST-2018)*. Tezisy dokladov mezhdunarodnoj konferentsii. Alushta, 2018, pp. 13–15.

12. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Vvedenie v teoriyu funk-tsional'no-differentsial'nykh uravnenij [Introduction to the theory of functional differential equations]. Moscow, Nauka, 1991, 180 p.

13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsij i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1981, 544 p.

14. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of a function of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1987, 688 p.

15. Bellman R., Kuk K. Differentsial'no-raznostnye uravneniya [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir, 1963, 548 p.

16. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenij s otklonyushhimsya argumentum [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow, Nauka, 1971, 296 p.

17. Kolmanovskij V.B., Nosov V.R. Ustojchivost' i periodicheskie rezhimy re-guliruemykh sistem s posledejstviem [Stability and periodic modes of adjustable systems with aftereffect]. Moscow, Nauka, 1981, 484 p.

18. Hejl Dz. Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenij [Theory of Functional Differential Equations]. Moscow, Mir, 1984, 421 p.

19. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustojchivost' reshenij uravnenij s obyknovennymi proizvodnymi [Stability of solutions of equations with ordinary derivatives]. Perm, Perm State University Publ., 2001, 230 p.

20. Vlasov V.V. Spektral'nye zadachi, voznikayushhie v teorii differentsial'nykh uravnenij s zapazdyvaniem [Spectral problems arising in the theory of differential equations with delay]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 1, pp 69–83.

21. Kurbatov V.G. Linejnye differentsial'no-raznostnye uravneniya [Linear differential-difference equations]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 1990, 168 p.

Получено 16.01.2019

Об авторах

Баландин Антон Сергеевич (Пермь, Россия) – младший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: balandin-anton@yandex.ru).

Малыгина Вера Владимировна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика, механика и биомеханика», ведущий научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mavera@list.ru).

About the author

Anton S. Balandin (Perm, Russian Federation) – Junior Researcher, Functional Differential Equations Research Center, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: balandin-anton@yandex.ru).

Vera V. Malygina (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics, Mechanics and Bio-Mechanics, Lead Researcher at the Functional Differential Equations Research Center, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: mavera@list.ru).