

DOI: 10.15593/2499-9873/2019.1.04

УДК 531.18, 531.653

И.П. Попов

Курганский государственный университет,
Курган, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИВИЛЕГИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Показано, что при равномерном и прямолинейном движении двух, трех или нескольких свободных инертных тел в одномерном или трехмерном пространстве произвольные инерциальные системы отсчета, в том числе связанные с каждым из движущихся инертных тел, существенно не эквивалентны в части суммарной кинетической энергии. При этом ни одна из этих систем отсчета не представляется уникальной или выделенной. При необходимости выбора уникальной или выделенной инерциальной системы отсчета можно исходить из условия минимума суммарной кинетической энергии движущихся инертных тел в этой системе. При этом уникальной или выделенной инерциальной системой отсчета является реликтовая система отсчета, связанная с центром масс движущихся инертных тел и с эпицентром их начального гипотетического взаимодействия. Реликтовые системы отсчета являются расчетными. Тела не обязательно изначально в них взаимодействуют. Применение реликтовых систем отсчета позволяет сохранить баланс между кинетической энергией и произведенной работой. Число инертных тел при расчете реликтовой системы отсчета может быть сколь угодно большим.

Ключевые слова: тело, движение, инерциальная система отсчета, кинетическая энергия, центр масс.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

MODELING OF THE PRIVILEGED REFERENCE SYSTEMS

It is shown that for uniform and rectilinear motion of two, three or several free inert bodies in one-dimensional or three-dimensional space, arbitrary inertial frames of reference, including those associated with each of the moving inert bodies, are not substantially equivalent in the part of the total kinetic energy. In this case, none of these frames of reference is not unique or distinguished. If it is necessary to select a unique or selected inertial reference frame, one can start from the condition of a minimum of the total kinetic energy of the moving inert bodies in this system. In this case, a unique or distinguished inertial reference system is a relict reference frame connected with the center of masses of the moving inert bodies and with the epicenter of their initial hypothetical interaction. Relict systems of reference are calculated. The bodies do not necessarily interact with them in the first place. The use of relict reference systems allows you to maintain a balance between kinetic energy and the work done. The number of inert bodies in calculating the relict frame of reference can be arbitrarily large.

Keywords: body, motion, inertial reference system, kinetic energy, center of mass.

Введение. Пусть два свободных тела массой m_1 и m_2 движутся друг относительно друга с постоянной скоростью v .

В инерциальной системе отсчета, связанной с первым телом, суммарная кинетическая энергия тел

$$E_{112} = E_{11} + E_{12} = 0 + \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (1)$$

В инерциальной системе отсчета, связанной со вторым телом, суммарная кинетическая энергия тел

$$E_{212} = E_{21} + E_{22} = \frac{m_1 v^2}{2} + 0. \quad (2)$$

В произвольной (третьей) инерциальной системе отсчета первое тело движется со скоростью v_1 , второе – со скоростью v_2 , $v = v_1 - v$.

В третьей системе отсчета суммарная кинетическая энергия

$$E_{312} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 (v_1 - v)^2}{2}. \quad (3)$$

В части кинетической энергии все три инерциальные системы отсчета (1)–(3) существенно не эквивалентны [1, 2]. При этом ни одна из них не представляется уникальной [3–10].

При необходимости выбора уникальной инерциальной системы отсчета можно исходить из условия минимума величины (3), который определяется следующим образом:

$$\frac{d(E_{312})}{dv_1} = m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_2 v = 0. \quad (4)$$

Скорости тел в уникальной системе отсчета:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} v, \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2 + m_1} v. \quad (5)$$

Взаимодействие двух тел в \mathbb{R}^3 . Пусть нулевая (реликтовая) инерциальная система отсчета связана с центром масс двух тел, неподвижных относительно нее и друг друга.

После взаимодействия (например, взрыва) тела имеют количество движения

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2 = -m_2 (v_1 - v).$$

Это выражение идентично (4).

Таким образом, уникальной инерциальной системой отсчета является реликтовая, связанная с центром масс тел и с эпицентром взаимодействия, в которой скорости тел после взаимодействия определяются выражениями (5).

О выборе инерциальной системы отсчета для трех свободных тел в \mathbb{R}^3 . Пусть три свободных тела с массами m_1 , m_2 и m_3 движутся друг относительно друга с постоянными скоростями v_{12} , v_{13} и v_{23} . При этом $v_{23} = v_{13} - v_{12}$.

В произвольной (четвертой) инерциальной системе отсчета первое тело движется с постоянной скоростью v_1 , второе – со скоростью v_2 , $v_2 = v_1 - v_{12}$, третье – со скоростью v_3 , $v_3 = v_1 - v_{13}$.

В четвертой системе отсчета суммарная кинетическая энергия

$$E_{4123} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 (v_1 - v_{12})^2}{2} + \frac{m_3 (v_1 - v_{13})^2}{2}. \quad (6)$$

Минимум величины (6) определяется следующим образом:

$$\frac{d(E_{4123})}{dv_1} = m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_2 v_{12} + m_3 v_1 - m_3 v_{13} = 0. \quad (7)$$

Скорости тел в уникальной системе отсчета:

$$v_1 = \frac{m_2 v_{12} + m_3 v_{13}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (8)$$

$$v_2 = \frac{m_3 v_{13} - m_1 v_{12} - m_3 v_{12}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 v_{23} - m_1 v_{12}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (9)$$

$$v_3 = \frac{m_2 v_{12} - m_1 v_{13} - m_2 v_{13}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-m_1 v_{13} - m_2 v_{23}}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (10)$$

Взаимодействие трех тел в \mathbb{R}^3 . Пусть нулевая (реликтовая) инерциальная система отсчета связана с центром масс трех тел, неподвижных относительно нее и друг друга.

После взаимодействия тела имеют количество движения

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = m_1 v_1 + m_2 (v_1 - v_{12}) + m_3 (v_1 - v_{13}) = 0.$$

Это выражение идентично (7).

Таким образом, уникальной инерциальной системой отсчета является реликтовая, связанная с центром масс тел и с эпицентром взаимодействия, в которой скорости тел после взаимодействия определяются выражениями (8)–(10).

Полученный вывод легко обобщается на любое сколь угодно большое число тел.

О выборе инерциальной системы отсчета для трех свободных тел в \mathbb{R}^3 . Пусть три свободных тела движутся друг относительно друга с постоянными скоростями \mathbf{v}_{12} , \mathbf{v}_{13} и \mathbf{v}_{23} . При этом $\mathbf{v}_{23} = \mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{12}$.

В произвольной (четвертой) инерциальной системе отсчета первое тело движется с постоянной скоростью \mathbf{v}_1 , второе – со скоростью \mathbf{v}_2 , $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{12}$, третье – со скоростью \mathbf{v}_3 , $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{13}$.

В четвертой системе отсчета суммарная кинетическая энергия

$$\begin{aligned} E_{4123} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{12})^2}{2} + \frac{m_3 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{13})^2}{2} = \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 (v_1^2 - 2v_1 v_{12} \cos \varphi_{112} + v_{12}^2)}{2} + \frac{m_3 (v_1^2 - 2v_1 v_{13} \cos \varphi_{113} + v_{13}^2)}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где φ_{ij} – угол между векторами \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_{ij} .

Минимум величины (11) определяется следующим образом:

$$\frac{d(E_{4123})}{dv_1} = m_1 v_1 + m_2 v_1 - m_2 v_{12} \cos \varphi_{112} + m_3 v_1 - m_3 v_{13} \cos \varphi_{113} = 0. \quad (12)$$

Взаимодействие трех тел в \mathbb{R}^3 . Пусть нулевая (реликтовая) инерциальная система отсчета связана с центром масс трех тел, неподвижных относительно нее и друг друга.

После взаимодействия тела имеют количество движения

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{12}) + m_3 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{13}) = 0.$$

$$m_1 \mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + m_2 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{12}) \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + m_3 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{13}) \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} = 0.$$

Это выражение идентично (12).

Таким образом, уникальной инерциальной системой отсчета является реликтовая, связанная с центром масс тел и с эпицентром взаимодействия, в которой скорости тел после взаимодействия определяются выражениями:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12} + m_3 \mathbf{v}_{13}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{m_3 \mathbf{v}_{23} - m_1 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{-m_1 \mathbf{v}_{13} - m_2 \mathbf{v}_{23}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

О выборе инерциальной системы отсчета для произвольного числа свободных тел в \mathbb{R}^3 . Пусть произвольное число n свободных тел с массами $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ движутся друг относительно друга с постоянными скоростями $\mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{ij}, \dots, \mathbf{v}_{(n-1)n}$. При этом $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_{1j} - \mathbf{v}_{1i}$.

В произвольной $(n + 1)$ -й инерциальной системе отсчета первое тело движется с постоянной скоростью \mathbf{v}_1 , i -е – со скоростью $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1i}$, n -е – со скоростью $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1n}$.

В $(n + 1)$ -й системе отсчета суммарная кинетическая энергия

$$\begin{aligned} E_{(n+1)1+n} &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{m_i (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1i})^2}{2} = \\ &= \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{m_i (v_1^2 - 2v_1 v_{1i} \cos \varphi_{11i} + v_{1i}^2)}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Минимум величины (13) определяется как

$$\frac{d(E_{(n+1)1+n})}{dv_1} = m_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (m_i v_1 - m_i v_{1i} \cos \varphi_{11i}) = 0. \quad (14)$$

Взаимодействие произвольного числа тел в \mathbb{R}^3 . Пусть нулевая (реликтовая) инерциальная система отсчета связана с центром масс произвольного числа n свободных тел, неподвижных относительно нее и друг друга.

После взаимодействия тела имеют количество движения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i &= m_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^n m_i (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1i}) = 0, \\ m_1 \mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + \sum_{i=2}^n m_i (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{1i}) \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} &= 0. \end{aligned}$$

Это выражение идентично (14).

Таким образом, уникальной инерциальной системой отсчета является реликтовая, связанная с центром масс тел и с эпицентром взаимодействия. При этом

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sum_{i=2}^n m_i \mathbf{v}_{1i}}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Заключение. Реликтовые системы отсчета являются расчетными. Тела не обязательно изначально в них взаимодействуют.

Число тел при расчете реликтовой системы отсчета может быть сколь угодно большим.

Список литературы

1. Попов И.П. Скалярное и векторное деление и дифференцирование векторов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2018. – № 2. – С. 43–55.
2. Попов И.П. Моделирование состояния объекта в виде суперпозиции состояний // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 18–27.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
4. Sigmund O., Maute K. Struct topology optimization approaches. A comparative review // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2013. – Vol. 48, iss. 6. – P. 1031–1055.
5. Jikai Liu, Yongsheng Ma. A survey of manufacturing oriented topology optimization methods // Advances in Engineering Softwar. – 2016. – August. – P. 161–175.
6. Deaton J.D., Grandhi R.V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000 // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2014. – January. – Vol. 49, iss. 1. – P. 1–38.
7. Munk D.J., Vio G.A., Steven G.P. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review // Struct Multidisc Optim. – 2015. – Vol. 52, iss. 3. – P. 613–631.
8. Sutherland B.R. Internal Gravity Waves. – Cambridge: Univ. Press, 2010. – 394 p.
9. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
10. Bisnovatyi-Kogan G.S. Strong shock in a uniformly expanding universe // Гравитация и космология. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 236–240.

References

1. Popov I.P. Skalyarnoe i vektornoe delenie i differencirovanie vektorov [Scalar and vector division and vector differentiation]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2018, no. 2, pp. 43–55.
2. Popov I.P. Modelirovanie sostoyaniya ob"ekta v vide superpozicii sostoyanij [Modeling the state of an object as a superposition of states]. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2015, no. 2, pp. 18–27.
3. Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaya fizika. Vol. 1. Mekhanika. [Theoretical Physics. Vol. 1. Mechanics]. Moscow, Nauka, 1973. 208 p.
4. Sigmund O., Maute K. Struct topology optimization approaches. A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013. December, Vol. 48, iss. 6, pp. 1031–1055.
5. Jikai Liu, Yongsheng Ma. A survey of manufacturing oriented topology optimization methods. *Advances in Engineering Softwar*, 2016, August, pp. 161–175.
6. Deaton J.D., Grandhi R.V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, January, Vol. 49, iss. 1, pp. 1–38.
7. Munk D.J., Vio G.A., Steven G.P. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review. *Struct Multidisc Optim*, 2015, September, Vol. 52, iss. 3, pp. 613–631.
8. Sutherland B.R. Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010, 394 p.
9. Matveev A.N. Mekhanika i teoriya otnositel'nosti [Mechanics and Theory of Relativity]. Moscow, 1986. 320 p.
10. Bisnovaty-Kogan G.S. Strong shock in a uniformly expanding universe. *Gravitaciya i kosmologiya*, 2015, Vol. 21, no. 3, pp. 236–240.

Получено 10.01.2019

Об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты», Курганский государственный университет (640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4, e-mail: ip.popov@yandex.ru).

About the author

Igor' P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (640020, Kurgan, Sovetskaja st., 63/4, e-mail: ip.popov@yandex.ru).