DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.01
УДК 517.977.32

К.Б. Мансимов[1,2], А.А. Алекберов[3]

[1]Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджанская Республика
[2]Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика
[3]Ленкоранский государственный университет,
Ленкоран, Азербайджанская Республика

К ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

В предлагаемой работе изучается одна составная задача оптимального управления, описываемая совокупностью обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений. Допустимые управления выбираются из класса кусочно-непрерывных функций. Сначала вычислена формула приращения функционала качества второго порядка. Затем при предположении выпуклости области управления доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума. Рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений. В частном случае из необходимого условия оптимальности второго порядка получен аналог условия Лежандра – Клебша.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение типа Вольтерра, необходимое условие оптимальности, линеаризованное условие максимума, квазиособые управления.

K.B. Mansimov[1,2], A.A. Alekberov[3]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic
[2]Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic
[3]Lenkoran State University, Lenkoran, Azerbaijan Republic

TO OPTIMALITY OF QUASI-SINGULAR CONTROL IN VARIABLE STRUCTURE CONTROL PROBLEM

In the proposed paper, we study one composite optimal control problem described by a set of ordinary differential and integral equations. Admissible controls are selected from the class of piecewise-continuous functions. First, the calculated formula for the increment of the second-order quality functional. Then, assuming that the control domain is convex, a necessary first-order optimality condition is proved in the form of a linearized maximum condition. The case of degeneration of the linearized maximum condition (quasi-special case) is considered. The necessary conditions for optimality of quasi-singular controls are established. In the particular case, from the necessary optimality condition of the second order an analogue of the Legendre – Klebsch condition is obtained.

Keywords: differential equation, Volterra type integral equation, necessary optimality condition, linearized maximum condition, quasi-singular controls.

Введение

В работах [1–6] и других исследованы различные аспекты задач оптимального управления системами с переменной структурой, описываемые дифференциальными уравнениями.

В предлагаемой же работе изучается одна задача оптимального управления системами с переменной структурой, описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений.

Используя модификацию метода приращений при помощи методики, предложенной в работах [7–11] и других, построена формула второго порядка для приращения критерия качества, отвечающего двум произвольным допустимым управлениям.

В результате исследования полученной формулы приращения с помощью специальных вариаций управления сначала доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума. Отдельно рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай [12]).

1. Постановка задачи

Пусть управляемый объект на заданном отрезке времени $T = T_1 \cup T_2 \quad \left(T_1 = [t_0, t_1],\quad T_2 = [t_1, t_2]\right)$ описывается совокупностью интегральных и дифференциальных уравнений:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f\left(t, s, x(s), u(s)\right) ds, \qquad t \in T_1, \tag{1}$$

$$\dot{y} = g\left(t, y, v\right), \ t \in T_2, \tag{2}$$

$$y(t_1) = G\left(x(t_2)\right). \tag{3}$$

Здесь $f(t,s,x,u)$ $\left(g(t,y,v)\right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) $\left((y,v)\right)$ до второго порядка включительно; $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, $t_0 < t_1 < t_2$, $u(t)$ $\left(v(t)\right)$ – r (q)-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Пару $(u^o(t), v^o(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при каждом фиксированном допустимом управлении $(u^o(t), v^o(t))$ уравнение (1) (задача (2)–(3)) имеет единственное непрерывное (кусочно-гладкое) решение $x^o(t)$ $(y^o(t))$.

На решениях системы (1)–(3), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим аналог терминального функционала

$$I(u,v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)). \tag{5}$$

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$, доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (1)–(4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – оптимальным процессом.

Нашей целью является установление необходимого условия оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условия максимума и исследование случая его вырождения (квазиособый случай [12]).

С этой целью применяется методика, предложенная и развитая в работах [7–11].

2. Специальное приращение функционала качества

Допустим, что $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – заданный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t),$ $\bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t),$

$\overline{x}(t)=x^o(t)+\Delta x(t),\quad \overline{y}(t)=y^o(t)+\Delta y(t)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс и при помощи формулы Тейлора запишем приращение критерия качества (5).

Имеем

$$\Delta I\left(u^o,v^o\right)=I\left(\overline{u},\overline{v}\right)-I\left(u^o,v^o\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x}\Delta x\left(t_1\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right)+\tag{6}$$
$$+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)+o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right).$$

Здесь и в дальнейшем $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)'$ в R^n, определяемая формулой $\|\alpha\|=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|\alpha_i\right|$, $'$ (штрих) есть операция транспонирования, а $o\left(\alpha^2\right)$ есть величина, имеющая более высокий порядок малости, чем α^2, т.е. $o\left(\alpha^2\right)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Далее ясно, что приращение $\left(\Delta x(t),\Delta y(t)\right)$ траектории $\left(x^o(t),y^o(t)\right)$ есть решение задачи

$$\Delta x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\left[f\left(t,s,\overline{x}(s),\overline{u}(s)\right)-f\left(t,s,x^o(s),u^o(s)\right)\right]ds,\ t\in T_1,\tag{7}$$
$$\Delta\dot{y}(t)=g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^o(t),v^o(t)\right),\ t\in T_2,\tag{8}$$
$$\Delta y\left(t_1\right)=\Delta G\left(\overline{x}\left(t_1\right)\right)=G\left(\overline{x}\left(t_1\right)\right)-G\left(x^o\left(t_1\right)\right).\tag{9}$$

Пусть $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ – пока неизвестные n- и m-мерные соответственно вектор-функции.

Умножая обе части соотношения (7)–(8) слева скалярно на $\psi^o(t)$ $\left(p^o(t)\right)$, а затем интегрируя обе части полученного тождества по T_1 $\left(T_2\right)$, будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi^{o'}(t)\Delta x(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t} \psi^{o'}(s)\left[f\left(s,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^o(t),u^o(t)\right)\right]ds\right]dt, \tag{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\left[g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^o(t),v^o(t)\right)\right]dt. \tag{11}$$

Используя формулу интегрирования по частям и полагая $N\left(p^o,x\right)=p^{o'}(t_1)G(x)$, тождество (11) запишем в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t)\Delta\dot{y}(t)\,dt =$$
$$= p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\left[N\left(p^o,\overline{x}(t_1)\right)-N\left(p^o,x^o(t_1)\right)\right]-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt. \tag{12}$$

С учетом тождеств (10)–(12) формула приращения (6) представляется в виде

$$\Delta I\left(u^o,v^o\right)=\frac{\partial\varphi_1'\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$
$$+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)\,dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi^{o}(s)\left[f\left(s,t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\right)-f\left(s,t,x^o(t),u^o(t)\right)\right]ds\right]dt+$$
$$+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\frac{\partial N'\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x}\Delta x(t_1)-$$
$$-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}p^{o'}(t)\left[g\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t)\right)-g\left(t,y^o(t),v^o(t)\right)\right]dt+$$
$$+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right). \tag{13}$$

Из (7) ясно, что

$$\Delta x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \left[f\left(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t_1, t, x^o(t), u^o(t)\right) \right] dt . \tag{14}$$

Учитывая (14), в формуле приращения (13) получим

$$\Delta I\left(u^o, v^o\right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_1'\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x} \times$$

$$\times \left[f\left(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t_1, t, x^o(t), u^o(t)\right) \right] dt + \frac{\partial \varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y} \Delta y(t_2) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \psi^{o'}(t) \Delta x(t) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t}^{t_1} \psi^o(s) \left[f\left(s, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(s, t, x^o(t), u^o(t)\right) \right] ds \right] dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial N'\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x} \left[f\left(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) - f\left(t_1, t, x^o(t), u^o(t)\right) \right] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + p^{o'}(t_2) \Delta y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^{o'}(t) \Delta y(t) dt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t) \left[g\left(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)\right) - g\left(t, y^o(t), v^o(t)\right) \right] dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2} \Delta y(t_2) +$$

$$+ o_1\left(\left\| \Delta x(t_1) \right\|^2 \right) + o_2\left(\left\| \Delta y(t_2) \right\|^2 \right) - o_3\left(\left\| \Delta x(t_1) \right\|^2 \right). \tag{15}$$

Если ввести аналоги функции Гамильтона – Понтрягина в виде

$$H\left(t, x, u, \psi^o\right) = \int_{t}^{t_1} \psi^{o'}(s) f\left(s, t, x, u\right) ds +$$

$$+ \left[\frac{\partial N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x} \right] f\left(t_1, t, x, u\right),$$

$$M\left(t,y,v,p^o\right)=p^{o'}\cdot g\left(t,y,v\right),$$

то формула приращения (15) примет вид

$$\Delta I\left(u^o,v^o\right)=$$
$$=-\int_{t_0}^{t_1}\left[H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi^o(t)\right)-H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\right]dt-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[M\left(t,\bar{y}(t),\bar{v}(t),p^o(t)\right)-M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\right]dt+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+$$
$$+o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right).\qquad(16)$$

Из (16), используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\Delta I\left(u^o,v^o\right)=\frac{\partial\varphi_2'\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)+p^{o'}(t_2)\Delta y(t_2)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}^{o'}(t)\Delta y(t)\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\psi^{o'}(t)\Delta x(t)\,dt-\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta u(t)\,dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}H_x'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta x(t)\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta x'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta x(t)+\right.$$
$$+2\,\Delta u'(t)H_{ux}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta x(t)+$$
$$\left.+\Delta u'(t)H_{uu}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\Delta u(t)\right]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta v(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} M_y'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta y(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta y(t) +$$

$$+2\,\Delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta y(t) +$$

$$+\Delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta v(t)\Big]dt +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2) -$$

$$-\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t_1) +$$

$$+\, o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right) + o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right) - o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} o_4\left(\left[\left\|\Delta x(t)\right\| + \left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} o_5\left(\left[\left\|\Delta y(t)\right\| + \left\|\Delta v(t)\right\|\right]^2\right)dt. \qquad (17)$$

Допустим, что $\left(\psi^o(t), p^o(t)\right)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\psi^o(t) = H_x\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right),\ t \in T_1, \qquad (18)$$

$$\dot{p}^o(t) = -M_y\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right),\ t \in T_2 \qquad (19)$$

$$p^o(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y}. \qquad (20)$$

Соотношение (18) есть относительно $\psi^{\text{o}}(t)$ линейное неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра, а соотношение (19) – относительно $p^{\text{o}}(t)$ линейное однородное дифференциальное уравнение. Систему (18)–(19) с начальным уравнением (20) назовем сопряженной системой для задачи (1)–(5).

Учитывая (18)–(20) из формулы приращения (17), получим

$$\Delta I\left(u^o, v^o\right) = -\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\Delta u(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta v(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\left[\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\right]\Delta x(t_1) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta x'(t) H_{xx}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\Delta x(t) +$$

$$+2\,\Delta u'(t) H_{ux}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\Delta x(t) +$$

$$+\,\Delta x'(t) H_{uu}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\Delta u(t)\Big]dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Delta y'(t) M_{yy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta y(t) +$$

$$+\,2\,\Delta v'(t) M_{vy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta y(t) +$$

$$+\,\Delta v'(t) M_{vv}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\Delta v(t)\Big]dt +$$

$$+\,o_1\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right) + o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right) - o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} o_4\left(\left[\left\|\Delta x(t)\right\| + \left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} o_5\left(\left[\left\|\Delta y(t)\right\| + \left\|\Delta v(t)\right\|\right]^2\right)dt. \qquad (21)$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки для $\left\|\Delta x(t)\right\|$ и $\left\|\Delta y(t)\right\|$.

Из (7)–(9), используя условие Липшица, получаем:

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le L_1 \int_{t_0}^{t}\left[\left\|\Delta x(s)\right\| + \left\|\Delta u(s)\right\|\right]ds\,,\ t \in T_1\,, \qquad (22)$$

$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le L_2 \int_{t_1}^{t}\left[\left\|\Delta y(\tau)\right\| + \left\|\Delta v(\tau)\right\|\right]d\tau + L_3\left\|\Delta x(t_1)\right\|, \qquad (23)$$

где $L_i = \mathrm{const} > 0$, $i = \overline{1,3}$ – некоторые постоянные.

Применяя к неравенству (22), (23) аналог леммы Гронуолла – Беллмана (см., например, [13]), будем иметь

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le L_4 \int_{t_0}^{t_1} \left\|\Delta u(s)\right\| ds\,,\ t \in T_1\,, \tag{24}$$

$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le L_5 \int_{t_1}^{t_2} \left\|\Delta v(s)\right\| ds + L_6 \left\|\Delta x(t_1)\right\|,\ t \in T_2\,. \tag{25}$$

Учитывая оценку (24) в (25), получим

$$\left\|\Delta y(t)\right\| \le L_5 \int_{t_1}^{t_2} \left\|\Delta v(s)\right\| ds + L_6 \int_{t_0}^{t_1} \left\|\Delta u(s)\right\| ds\,,\ \ t \in T_2\,. \tag{26}$$

По предположению, множества U и V выпуклые. Поэтому специальное приращение допустимого управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon\left[u(t) - u(t)^o\right], \\ \Delta v_\varepsilon(t) = \varepsilon\left[v(t) - v^o(t)\right], \end{cases} \tag{27}$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число, а $u(t) \in R^r$, $t \in T_1$ $\left(v(t) \in R^r,\ t \in T_2\right)$ – произвольная кусочно-непрерывная в T_1 $\left(T_2\right)$ $r(q)$-мерная вектор-функция.

Через $\left(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ обозначим специальное приращение траектории $\left(x^o(t), y^o(t)\right)$, отвечающее приращению (27) управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$.

Из оценок (24), (26) следует, что

$$\begin{aligned} &\left\|\Delta x_\varepsilon(t)\right\| \le L_8\,\varepsilon,\ \ t \in T_1\,, \\ &\left\|\Delta y_\varepsilon(t)\right\| \le L_9\,\varepsilon,\ \ t \in T_2\,, \end{aligned} \tag{28}$$

где L_8, L_9 – некоторые положительные постоянные.

Из (7)–(9) следует, что $\left(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t)\right)$ есть решение линеаризованной задачи

$$\Delta x_\varepsilon(t)=\int_{t_0}^{t}\Big[f_x\big(t,s,x^o(s),u^o(s)\big)\Delta x_\varepsilon(s)+$$
$$+f_u\big(t,s,x^o(s),u^o(s)\big)\Delta u_\varepsilon(s)\Big]ds+ \tag{29}$$
$$+\int_{t_0}^{t}o_6\Big(\big[\|\Delta x_\varepsilon(s)\|+\|\Delta u_\varepsilon(s)\|\big]\Big)ds,$$

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\int_{t_1}^{t}\Big[g_y\big(t,y^o(s),v^o(s)\big)\Delta y_\varepsilon(s)+g_v\big(t,y^o(s),v^o(s)\big)\Delta v_\varepsilon(s)\Big]ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t}o_7\Big(\big[\|\Delta y_\varepsilon(s)\|+\|\Delta v_\varepsilon(s)\|\big]\Big)ds, \tag{30}$$

$$\Delta y_\varepsilon(t_1)=G_x\big(x^o(t_1)\big)\delta x_\varepsilon(t_1)+o_8\big(\|\Delta x_\varepsilon(t_1)\|\big). \tag{31}$$

С учетом оценки (28) при помощи (29)–(31) доказывается:

Теорема 1. Для специального приращения $\big(\Delta x_\varepsilon(t),\Delta y_\varepsilon(t)\big)$ траектории $\big(x^o(t),y^o(t)\big)$ имеют место разложения:

$$\Delta x_\varepsilon(t)=\varepsilon\,\ell_1(t)+o(\varepsilon;\,t),\ \ t\in T_1, \tag{32}$$

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\varepsilon\,\ell_2(t)+o(\varepsilon;\,t),\ \ t\in T_2, \tag{33}$$

где $\ell_i(t)$, $i=1,2,$ являются решениями систем уравнений:

$$\ell_1(t)=\int_{t_0}^{t}\Big[f_x\big(t,s,x^o(s),u^o(s)\big)\ell_1(s)+$$
$$+f_u\big(t,s,x^o(s),u^o(s)\big)\big(u(s)-v(s)\big)\Big]ds, \tag{34}$$

$$\dot{\ell}_2(t)=g_y\big(t,y^o(t),v^o(t)\big)\ell_2(t)+g_v\big(t,y^o(t),v^o(t)\big)\big(v(t)-v^o(t)\big), \tag{35}$$

$$\ell_2(t_1)=G_x\big(x^o(t_1)\big)\ell_1(t_1). \tag{36}$$

Учитывая (27) и разложения (32), (33) в формуле приращения (21), получаем справедливость разложения

$$\Delta I_{\varepsilon}\left(u^o,v^o\right)=I\left(u+\Delta u_{\varepsilon},v+\Delta v_{\varepsilon}\right)-I\left(u^o,v^o\right)=$$

$$=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)dt-$$

$$-\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right)dt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{\ell_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\ell(t_1)+\ell_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\ell_2(t_2)+\right.$$

$$+\ell_1'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\ell(t_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell_1'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\ell_1(t)+$$

$$+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{ux}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\ell_1(t)+$$

$$+\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{uu}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\Big]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\ell_2'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_2(t)+$$

$$+2\left(v(t)-v^o(t)\right)'M_{vy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_2(t)+$$

$$\left.+\left(v(t)-v^o(t)\right)'M_{vv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right)\Big]dt\right\}+o\left(\varepsilon^2\right). \quad (37)$$

Из разложения (37) следует, что вдоль оптимального процесса $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$

$$-\varepsilon\left[\int_{t_0}^{t_1}H_u'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)dt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}M_v'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right)dt\right]+o(\varepsilon)\geq 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon \in [0,1]$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\left(u(t) - u^o(t)\right)dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\left(v(t) - v^o(t)\right)dt \le 0.$$

Из последнего неравенства, в силу произвольности и независимости управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$, приходим к утверждению:

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\left(u(t) - u^o(t)\right)dt \le 0 \tag{38}$$

для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$,

$$\int_{t_1}^{t_2} M_v'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)\left(v(t) - v^o(t)\right)dt \le 0 \tag{39}$$

для всех $v(t) \in V$, $t \in T_2$.

Соотношения (38), (39) являются интегральными линеаризованными условиями оптимальности. Используя лемму из [14, с. 8], можно доказать, что теорема 2 эквивалентна следующему утверждению:

Теорема 3. Вдоль оптимального управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ выполняются соотношения:

$$H_u'\left(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)\right)\left(u - u^o(\theta)\right) \le 0 \tag{40}$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$,

$$M_v'\left(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)\right)\left(v - v^o(\xi)\right) \le 0 \tag{41}$$

для всех $\xi \in [t_1, t_2)$, $v \in V$.

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$ $(\xi \in [t_1, t_2))$ есть произвольная точка непрерывности управления $u^{\circ}(t)$ $(v^{\circ}(t))$.

Неравенства (40) и (41) являются поточечными линеаризованными необходимыми условиями оптимальности для задачи (1)–(5).

Перейдем к исследованию случая вырождения линеаризованного условия максимума.

Определение 1. Допустимое управление $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(t))$, следуя, например, [12], назовем квазиособым в задаче (1)–(5), если для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $u \in U$ и $\xi \in [t_1, t_2)$, $v \in V$ соответственно выполняются соотношения:

$$H_u'\left(\theta, x^{\circ}(\theta), u^{\circ}(\theta), \psi^{\circ}(\theta)\right)\left(u - u^{\circ}(\theta)\right) = 0, \tag{42}$$

$$M_v'\left(\xi, y^{\circ}(\xi), v^{\circ}(\xi), p^{\circ}(\xi)\right)\left(v - v^{\circ}(\xi)\right) = 0. \tag{43}$$

Из определения 1 ясно, что для квазиособых управлений линеаризованное необходимое условие оптимальности, вырождаясь, теряет свое содержательное значение.

Поэтому надо иметь необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Из разложения (37) следует:

Теорема 4. Для оптимальности квазиособого управления $(u^{o}(t), v^{o}(t))$ необходимо, чтобы неравенство

$$\ell_1'(t_1)\left[\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\right]\ell(t_1) + \ell_3'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\ell_2(t_2) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell_1'(t) H_{xx}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\ell_1(t) +$$

$$+2\left(u(t) - u^o(t)\right)' H_{ux}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\ell_1(t) +$$

$$+\left(u(t) - u^o(t)\right)' H_{uu}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)\left(u(t) - u^o(t)\right)\Big]dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\ell_2'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_2(t)+$$

$$+2\left(v(t)-v^o(t)\right)'M_{vy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_2(t)+$$

$$+\left(v(t)-v^o(t)\right)'M_{vv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right)\Big]dt\ge 0 \quad (44)$$

выполнялось для всех $u(t)\in U$, $t\in T_1$, $v(t)\in V$, $t\in T_2$.

Неравенство (44) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Опираясь на его, получим необходимое условие оптимальности, выраженное через параметры задачи (1)–(5).

Используя произвольность $u(t)$ и $v(t)$, положим $v(t)\equiv v^o(t)$. Тогда неравенство (44) примет вид

$$\ell_1'(t_1)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\right]\ell(t_1)+\ell_3'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\ell_2(t_2)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell_1'(t)H_{xx}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\ell_1(t)+$$

$$+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{ux}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\ell_1(t)+$$

$$+\left(u(t)-u^o(t)\right)'H_{uu}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\Big]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\ell_3'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_3(t)\,dt\ge 0, \quad (45)$$

где $\ell_1(t)$ – решение уравнения (34), а $\ell_3(t)$ является решением задачи

$$\dot{\ell}_3(t)=g_y\left(t,y^o(t),v^o(t)\right)\ell_3(t), \quad (46)$$

$$\ell_3(t_1)=G_x\left(x^o(t_1)\right)\ell_1(t_1). \quad (47)$$

Пусть $R(t,\tau)$ $(n\times n)$ – матричная функция, удовлетворяющая матричным интегральным уравнениям типа Вольтерра [15–17]

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t} R(t,s) f_x\left(s,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)ds + f_x\left(t,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right),$$

$$R(t,\tau)=\int_{\tau}^{t} f_x\left(s,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)R(s,\tau)\,ds + f_x\left(s,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right).$$

Через $F(t,\tau)$ обозначим $(m\times m)$-матричную функцию, являющуюся решением матричного дифференциального уравнения

$$F_\tau(t,\tau)=-F(t,\tau)\,g_y\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right),$$

с начальным условием

$$F(t,t)=E\,,$$

E – $(m\times m)$-единичная матрица.

Решение $\ell_1(t)$ линейного интегрального уравнения (34) допускает представление [15, 16]

$$\ell_1(t)=\int_{t_0}^{t} R(t,\tau)\left[\int_{t_0}^{\tau} f_u\left(s,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right)ds+\right.$$
$$\left.+f_u\left(t,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)\right]d\tau.$$

При помощи формулы Дирихле, преобразуя правую часть, эту формулу можно записать в виде

$$\ell_1(t)=\int_{t_0}^{t} Q(t,\tau)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)d\tau\,, \tag{48}$$

где по определению

$$Q(t,\tau)=f_u\left(t,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)+\int_{\tau}^{t} R(t,s)\,f_u\left(s,\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)d\tau\,.$$

Решение задачи Коши (46)–(47) допускает представление

$$\ell_3(t) = F(t,t_1) G_x\left(x^o(t_1)\right) \ell_1(t_1).$$

Отсюда, в силу (48), будем иметь

$$\ell_3(t) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,t_1) G_x\left(x^o(t_1)\right) Q(t_1,\tau)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right) d\tau. \tag{49}$$

Полагая

$$L(t,\tau) = F(t,t_1) G_x\left(x^o(t_1)\right) Q(t_1,\tau),$$

формулу (49) запишем в виде

$$\ell_3(t) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\tau)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right) d\tau. \tag{50}$$

При помощи представлений (47), (49) доказывается, что

$$\begin{gathered}\ell'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} \ell(t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' Q'(t_1,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} Q(t_1,s)\left(u(s)-u^o(s)\right) ds\, d\tau,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' H_{ux}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right) \ell_1(t) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' H_{ux}\left(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau), \psi^o(\tau)\right) Q(\tau,t) d\tau\right] \times \\ \times\left(u(t)-u^o(t)\right) dt,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\ell_1'(t_1) \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} \ell_1(t_1) = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' Q'(t_1,\tau) \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} Q(t_1,s)\left(u(s)-u^o(s)\right) ds\, d\tau,\end{gathered} \tag{53}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \ell_1'(t) H_{xx}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right) \ell_1(t)\,dt =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' \left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} Q'(t,\tau) H_{xx}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right) Q(t,s)\,dt\right] \times$$

$$\times\left(u(s)-u^o(s)\right) ds\, d\tau, \tag{54}$$

$$\ell_3'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2} \ell_3(t_2) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' L'(t_2,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2} L(t_2,s)\left(u(s)-u^o(s)\right) ds\, d\tau, \tag{55}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \ell_3'(t) M_{yy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) \ell_3(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' \left[\int_{t_1}^{t_2} L'(t,\tau) M_{yy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) L(t,s)\,dt\right] \times$$

$$\times\left(u(s)-u^o(s)\right) ds\, d\tau. \tag{56}$$

Вводя обозначение

$$K(\tau,s) = -Q'(t_1,\tau)\left[\frac{\partial^2 \varphi_1\left(x^o(t_1)\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N\left(p^o, x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}\right] Q(t_1,s) +$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} Q'(t,\tau) H_{xx}\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right) Q(t,s)\,dt -$$

$$-L'(t_2,\tau)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2} L(t_2,s) +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} L'(t,\tau) M_{yy}\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right) L(t,s)\,dt \tag{57}$$

и учитывая тождества (51)–(56) в неравенстве (45), получим, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' K(\tau,s)\left(u(s)-u^o(s)\right)ds\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' H_{ux}\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau),\psi^o(\tau)\right)Q(\tau,t)\,d\tau\right]\times$$

$$\times\left(u(t)-u^{\text{o}}(t)\right)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(u(t)-u^o(t)\right)' H_{uu}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)dt\le 0. \quad (58)$$

Теперь предположим, что $u(t)=u^o(t)$, $v(t)\neq v^o(t)$. Тогда из неравенств (44) и (45) следует, что

$$\ell_4'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}\ell_4(t_2)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big[\ell_4'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_4(t)+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'\times$$

$$\times M_{vy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_4(t)+$$

$$+\left(u(t)-u^o(t)\right)' M_{vv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\Big]dt\le 0, \quad (59)$$

где $\ell_4(t)$ является решением задачи

$$\dot{\ell}_4=g_y\left(t,y^o(t),v^o(t)\right)\ell_4+g_v\left(t,y^o(t),v^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right), \quad (60)$$

$$\dot{\ell}_4(t_1)=0. \quad (61)$$

Запишем представление решения задачи Коши (60)–(61):

$$\ell_4(t)=\int_{t_1}^{t}F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)d\tau. \quad (62)$$

С использованием представления (62) доказывается справедливость тождеств:

$$\ell_4'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}\ell_4(t_2)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' F'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}F(t_2,s)\left(u(s)-u^o(s)\right)ds\,d\tau, \qquad (63)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)' M_{vy}\left(t,y^{\circ}(t),v^{\circ}(t),p^{\circ}(t)\right)\ell_4(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t}^{t_2}\left(u(\tau)-u^{\circ}(\tau)\right)' M_{vy}\left(\tau,y^{\circ}(\tau),v^{\circ}(\tau),p^{\circ}(\tau)\right)F(\tau,t)\,d\tau\right]\times$$

$$\times\left(u(t)-u^{\circ}(t)\right)dt, \qquad (64)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\ell_4'(t)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\ell_4(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'\times$$

$$\times\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}F'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)F(t,s)\,dt\right]\left(u(t)-u^o(t)\right)ds\,d\tau. \qquad (65)$$

Пусть по определению

$$M(\tau,s)=F'(t,t_2)\frac{\partial^2\varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2}F(t,t_2)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}F'(t,\tau)M_{yy}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)F(t,s)\,dt. \qquad (66)$$

Принимая во внимание обозначение (66) и тождества (63)–(65) в неравенстве (59), получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' M(\tau,s)\left(u(s)-u^o(s)\right)ds\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' M_{vy}\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau),p^o(\tau)\right)F(\tau,t)\,d\tau\right]\times$$

$$\times\left(u(t)-u^o(t)\right)dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(u(t)-u^o(t)\right)' M_{vv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\le 0. \quad (67)$$

Сформулируем полученный результат:

Теорема 5. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы неравенства (58) и (67) выполнялись соответственно для всех $u(t)\in U$, $t\in T_1$ и $v(t)\in V$, $t\in T_2$.

Неравенства (58), (67) являются интегральными необходимыми условиями оптимальности и носят довольно общий характер. Из них можно получить аналог условия Лежандра – Клебша.

Следствие 1. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\left(u-u^o(\theta)\right)' H_{uu}\left(\theta,x^o(\theta),u^o(\theta),\psi^o(\theta)\right)\left(u-u^o(\theta)\right)\le 0$$

для всех $u\in U$ и $\theta\in[t_0,t_1)$,

$$\left(v-v^o(\xi)\right)' M_{vv}\left(\xi,x^o(\xi),u^o(\xi),\psi^o(\xi)\right)\left(v-v^o(\xi)\right)\le 0$$

для всех $v\in V$ и $\xi\in[t_0,t_1)$.

Список литературы

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление с разрывными системами. – М.: Наука, 1987. – 226 с.

2. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 754–756.

3. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 6. – С. 32–36.

4. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче // Выч. мат. и мат. физики. – 2006. – № 10. – С. 1458–1770.

5. Kharatishvili G., Tadumadze T. The problem of optimal control for nonlinear systems with variable structure, delays and piecewise continuous prehistory // Memories on Differential Equations and Mathematical Physics. – 1997. – Vol. 11. – P. 67–78.

6. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ. Серия: Вычислительная математика и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.

7. Мансимов К.Б. Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами (обзор) // Современная математика и ее приложения. – 2006. – Т. 42. – С. 39–83.

8. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса-Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Серия: Физико-технические и математические науки. – 1981. – № 2. – С. 100–104.

9. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Баку, БГУ, 1994. – 42 с.

10. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. – 360 с.

11. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2013. – 224 с.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

13. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу // Дифференциальные уравнения. – 1972. – № 5. – С. 845–856.

14. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. –110 с.

15. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 256 с.

16. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Серия: Математический анализ. – 1977. – Т. 15. – С. 131–138.

References

1. Ashchepkov L.T. Optimal'noye upravleniye s razryvnymi sistemami [Optimum control with discontinuous systems], N. Nauka, 1987, 226 p.

2. Velichenko V.V. Optimal'noye upravleniye sostavnymi sistemami [Optimal control of composite systems] Dokl. AN SSSR. 1967, v. 176, № 4, p. 754-756.

3. Zakharov G.K. Optimizatsiya stupenchatykh sistem s upravlyayemymi usloviyami perekhoda [Optimization of step systems with controlled transition conditions] Avtomatika i telemekhanika. 1993, № 6, p. 32-36.

4. Ismaylov R.R., Mansimov K.B. Ob usloviyakh optimal'nosti v odnoy stupenchatoy zadache [On optimality conditions in one stepped problem] Zhurn. Vych. mat. i mat. fiziki. 2006, № 10, p. 1458-1770.

5. Kharatishvili G., Tadumadze T. The problem of optimal control for nonlinear systems with variable structure, delays and piecewise continuous prehistory // Memories on Differential Equations and Mathematical Physics. 1997, v. 11, pp. 67-78.

6. Nikol'skiy M.S. Ob odnoy variatsionnoy zadache s peremennoy strukturoy [On a variational problem with a variable structure] Vestnik MGU. Ser. Vych. mat. i kibern. 1987, № 1, p. 36-41.

7. Mansimov K.B. Osobyye upravleniya v zadachakh upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami [Special control in the problems of controlling systems with distributed parameter] Zhurn. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. 2006, v. 42, p. 39-83.

8. Mansimov K.B. Ob odnoy skheme issledovaniya osobogo sluchaya v sistemakh Gursa-Darbu [On a scheme for investigating a special case in Goursat-Darboux systems] Izv. AN Azerb. SSR. Ser. fiz.-tekhn. i mat. nauk, 1981, № 2, p. 100-104.

9. Mansimov K.B. Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Investigation of special processes in optimal control problems.]Avtoref. diss. na soisk. uchenoy stepeni d-ra fiz.-mat. nauk. Baku, BGU, 1994, 42 p.

10. Mansimov K.B., Mardanov M.Dj. Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems] Baku. Izd-vo ELM. 2010, 360 p.

11. Abdullayev A.A., Mansimov K.B. Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v protsessakh, opisyvayemykh sistemoy integral'nykh uravneniy tipa Vol'terra [Necessary optimality conditions in processes described by a system of integral equations of Volterra type] Baku. Izd-vo «ELM», 2013, 224 p.

12. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobyye optimal'nyye upravleniya [Special optimal controls] M. Nauka, 1973, 256 p.

13. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Problema ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa-Darbu [The stability problem for non-linear Goursat-Darboux systems] Differents. uravneniya. 1972, № 5, p. 845-856.

14. Srochko V.A. Vychislitel'nyye metody optimal'nogo upravleniya [Computational methods of optimal control] Irkutsk. Izd-vo IGU, 1982, 110 p.

15. Vasil'yeva A.B., Tikhonov A.N. Integral'nyye uravneniya [Integral equations] M.: Izd-vo MGU, 1989, 256 p.

16. Tsalyuk Z.B. Integral'nyye uravneniya Vol'terra [Integral equations of Volterra] Itogi nauki i tekhniki. Ser. matematicheskiy analiz. 1977, v. 15, p. 131-138.

Получено 18.04.2018

Об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджан) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде, 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Алекберов Айдын Абдулла оглы (Ленкоран, Азербайджан) – докторант Ленкоранского государственного университета.

About the authors

Kamil B. Mansimov (Baku, Azerbaijan) – Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Institute of Control Problems of ANAS, Head of the Laboratory of Control with Complex Dynamic Systems (9, B. Vahabzade av., Baku, AZ1141, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Aydin A. Alekberov (Lenkoran, Azerbaijan) – Doctoral Student, Lenkoran State University.