DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.02
УДК 517.977.52

К.Б. Мансимов[1, 2], М.Я. Наджафова[2]

[1]Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджанская Республика
[2]Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика

К ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается одна ступенчатая дискретная задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений с нелокальными краевыми условиями. При предположении выпуклости областей управления доказан аналог линеаризованного условия максимума. Специально изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума.

Ключевые слова: разностное уравнение, нелокальная краевая задача, линеаризованный принципа максимума, нелокальная краевая задача, квазиособое управление.

K.B. Mansimov[1, 2], M.Ya. Nadzhafova[1]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic
[2]Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan Republic

TO THE OPTIMALITY OF QUASI-SINGULAR CONTROL IN A DISCRETE STEPPED CONTROL PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Consider one step discrete optimal control problem described by a system of nonlinear difference equations with nonlocal boundary conditions. Under the assumption of convexity of control domains, an analogue of the linearized maximum condition is proved. The case of degeneracy of the linearized maximum condition has been specially studied.

Keywords: difference equation, nonlocal boundary value problem, linearized maximum principle, nonlocal boundary value problem, quasi-singular control.

Введение

Многие реальные процессы, являясь многоэтапными, описываются более сложными математическими моделями, чем одноэтапные (см., например, [1–6]). Под многоэтапными понимаются процессы, в которых изменение вектора фазового состояния объекта управления рассматривается на ряде последовательных отрезков (или областей). Причем на этих отрезках, соответствующих отдельным этапам, процессы описываются при помощи различных уравнений (дифференциальных или разностных). Задачи оптимального управления многоэтапными процессами называют задачами оптимального управления составными системами или же ступенчатыми системами (см., например, [1–7]).

К настоящему времени в основном изучены ступенчатые задачи управления с локальными краевыми условиями [1–7].

В предлагаемой же работе исследуется ступенчатая задача оптимального управления с нелокальными краевыми условиями при предположении выпуклости области управления. Получен ряд необходимых условий оптимальности.

1. Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать терминального типа функционал

$$I(u,v) = \varphi_1\big(x(t_1)\big) + \varphi_2\big(y(t_2)\big), \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}, \\ &v(t) \in U \subset R^q, \quad t \in T_2 = \{t_1, t_1+1, \ldots, t_2-1\}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(t+1) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \ t \in T_1, \tag{3}$$

$$L_0\, x(t_0) + L_1\, x(t_1) = \ell, \tag{4}$$

$$y(t+1) = g\big(t, y(t), v(t)\big), \ t \in T_2, \tag{5}$$

$$y(t_1) = G\big(x(t_1)\big). \tag{6}$$

Здесь $f(t,x,u)$ $\big(g(t,y,v)\big)$ – заданная $n(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) $((y,v))$ до второго порядка включительно; L_0, L_1 – заданные $(n \times n)$ постоянные матрицы; ℓ – заданный постоянный вектор; U (V) − заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество; $u(t)$ $(v(t))$ – $r(q)$-мерный вектор управляющих воздействий, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция; t_0, t_1, t_2 − заданные числа, причем разность $t_2 - t_0$ есть натуральное число.

Пару $(u^o(t), v^o(t))$ с вышеприведенными свойствами называем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – допустимым процессом.

Допустимое управление, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением.

2. Формула для приращения функционала качества

Пусть $(u^o(t), v^o(t))$ и $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t))$ – фиксированное и произвольное соответственно допустимое управление.

Через $(x^o(t), y^o(t))$, $(\bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ обозначим соответствующие им решения краевой задачи (1)–(6) и запишем приращение функционала качества

$$\begin{aligned} \Delta J(u^o, v^o) = \varphi_1(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_0), x^o(t_1)) + \\ + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)). \end{aligned} \tag{7}$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ будет решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t)), \tag{8}$$

$$L_0 \, \Delta x(t_0) + L_1 \, \Delta x(t_1) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta y(t+1) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t)), \tag{10}$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \tag{11}$$

Пусть $\psi(t)$, $p(t)$, $\lambda \in R^n$ пока неизвестные вектор-функции и постоянный вектор; соответственно им введем функции Гамильтона – Понтрягина

$$H(t,x,u,\psi) = \psi' f(t,x,u),$$

$$M(t,y,v,p) \equiv p' g(t,y,v).$$

Тогда из (8), (10) будем иметь:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t)\Delta x(t+1) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\psi(t)\right) - H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\right], \quad (12)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} p'(t)\Delta y(t+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[M\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t),p(t)\right) - M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\right], \quad (13)$$

$$\lambda' L_0\,\Delta x(t_0) + \lambda' L_1\,\Delta x(t_1) = 0. \quad (14)$$

С учетом тождеств (12)–(14) приращение (7) функционала (1) записывается в виде

$$\Delta J(u^o,v^o) = \varphi_1\left(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1)\right) - \varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right) + \\ + \varphi_2\left(\overline{y}(t_2)\right) - \varphi_2\left(y^o(t_2)\right) + \lambda' L_0\,\Delta x(t_0) + \\ + \lambda' L_1\,\Delta x(t_1) + \psi'(t_1-1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1)\Delta x(t_0) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{o'}(t-1)\Delta x(t) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H\left(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\psi(t)\right) - H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\right] + \\ + p^{o'}(t_2-1)\Delta y(t_2) - p^{o'}(t_1-1)\left[G\left(\overline{x}(t_1)\right) - G\left(x^o(t_1)\right)\right] + \\ + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} p^{o'}(t-1)\Delta y(t) - \\ - \sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[M\left(t,\overline{y}(t),\overline{v}(t),p(t)\right) - M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\right]. \quad (15)$$

Из (15), полагая по определению

$$N\left(p^o, x\right) = p^{o'}\left(t_1 - 1\right)G\left(x\right)$$

и используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\Delta J\left(u^o, v^o\right) = \frac{\partial\varphi_1'\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_0\right)}\Delta x\left(t_0\right) +$$

$$+\frac{\partial\varphi_1'\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_1\right)}\Delta x\left(t_1\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_0\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2\left(t_0\right)}\Delta x\left(t_0\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_0\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_0\right)\partial x\left(t_1\right)}\Delta x\left(t_1\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_1\right)\partial x\left(t_0\right)}\Delta x\left(t_0\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right), x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2\left(t_1\right)}\Delta x\left(t_1\right) + o_1\left(\left[\left\|\Delta x\left(t_0\right)\right\| + \left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|\right]^2\right) -$$

$$-\frac{\partial N'\left(p^o, x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x}\Delta x\left(t_1\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N'\left(p^o, x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right) - o_1\left(\left\|\Delta x\left(t_1\right)\right\|^2\right) +$$

$$+\frac{\partial\varphi_2\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2\right) + \frac{1}{2}\Delta y\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right) +$$

$$+ o_3\left(\left\|\Delta y\left(t_2\right)\right\|^2\right) + \lambda' L_0\,\Delta x\left(t_0\right) + \lambda' L_1\,\Delta x\left(t_1\right) +$$

$$+\psi'\left(t_1 - 1\right)\Delta x\left(t_1\right) - \psi'\left(t_0 - 1\right)\Delta x\left(t_0\right) + p^{o'}\left(t_2 - 1\right)\Delta y\left(t_2\right) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{o'}\left(t-1\right)\Delta x\left(t\right) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{o'}\left(t-1\right)\Delta y\left(t\right) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[H_x'\left(t, x^o\left(t\right), u^o\left(t\right), \psi^o\left(t\right)\right)\Delta x\left(t\right) +$$

$$+\frac{\partial H'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u}\Delta u(t)\Bigg]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Bigg[\frac{\partial M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y}\Delta y(t)+$$

$$+\frac{\partial M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v}\Delta v(t)\Bigg]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Bigg[\Delta x'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}\Delta x(t)+$$

$$+2\,\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}\Delta x(t)+$$

$$+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial^2 u}\Delta u(t)\Bigg]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Bigg[\Delta y'(t)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t)+$$

$$+2\,\Delta v'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}\Delta y(t)+$$

$$+\Delta v'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v^2}\Delta v(t)\Bigg]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_4\left(\left[\|\Delta x(t)\|+\|\Delta u(t)\|\right]^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}o_5\left(\left[\|\Delta y(t)\|+\|\Delta v(t)\|\right]^2\right). \qquad (16)$$

Если предполагать, что тройка $\left(\psi^o(t),p^o(t),\lambda\right)$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi^o(t-1)=\frac{\partial H\left(t,x^o(t),u^o(t)\right)}{\partial x}, \qquad (17)$$

$$\psi\left(t_0-1\right)=-\frac{\partial\varphi_1\left(x^o\left(t_1\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_1\right)}-L_1'\lambda+\frac{\partial N\left(p^o\left(t_1\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_1\right)},$$

$$\psi^o\left(t_1-1\right)=-\frac{\partial\varphi_1\left(x^o\left(t_1\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_0\right)}+L_0'\lambda, \qquad (18)$$

$$p^o\left(t-1\right)=\frac{\partial M\left(t,y^o\left(t\right),v^o\left(t\right),p^o\left(t\right)\right)}{\partial y}, \qquad (19)$$

$$p^o\left(t_2-1\right)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y}, \qquad (20)$$

то формула приращения (16) примет вид

$$\Delta J\left(u^o,v^o\right)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H'\left(t,x^o\left(t\right),u^o\left(t\right),\psi^o\left(t\right)\right)}{\partial u}\Delta u\left(t\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\frac{\partial M\left(t,y^o\left(t\right),v^o\left(t\right),p^o\left(t\right)\right)}{\partial v}\Delta v\left(t\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Delta x'\left(t_0\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2\left(t_0\right)}\Delta x\left(t_0\right)+\right.$$

$$+\Delta x'\left(t_0\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_0\right)\partial x\left(t_1\right)}\Delta x\left(t_1\right)+$$

$$+\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x\left(t_1\right)\partial x\left(t_0\right)}\Delta x\left(t_0\right)+$$

$$\left.+\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o\left(t_0\right),x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2\left(t_1\right)}\Delta x\left(t_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2\right)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o\left(t_2\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2\right)-\frac{1}{2}\Delta x'\left(t_1\right)\frac{\partial^2 N'\left(p^o,x^o\left(t_1\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t_1\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x'\left(t\right)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o\left(t\right),u^o\left(t\right),\psi^o\left(t\right)\right)}{\partial x^2}\Delta x\left(t\right)+\right.$$

$$+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}\Delta x(t)+$$

$$\left.+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial^2 u}\Delta u(t)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\Delta y'(t)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t)+\right.$$

$$+2\Delta v'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}\Delta y(t)+$$

$$\left.+\Delta v'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v^2}\Delta v(t)\right]+$$

$$+o_1\left(\left[\left\|\Delta x(t_0)\right\|+\left\|\Delta x(t_1)\right\|\right]^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2)\right\|^2\right)-o_3\left(\left\|\Delta x(t_1)\right\|^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_4\left(\left[\left\|\Delta x(t)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}o_5\left(\left[\left\|\Delta y(t)\right\|+\left\|\Delta v(t)\right\|\right]^2\right). \qquad (21)$$

3. Аналог уравнения в вариациях и специальное разложение функционала качества

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(t)$ – произвольное допустимое управление. «Возмущенное» управление определим в виде

$$u(t;\varepsilon)=u^o(t)+\varepsilon\left[u(t)-u^o(t)\right], \qquad (22)$$

$$v(t;\varepsilon)=v^o(t).$$

Через $\left(x(t;\varepsilon),y(t;\varepsilon)\right)$ обозначим решение «возмущенной» системы

$$x(t+1;\varepsilon)=f\left(t,x(t;\varepsilon),u(t;\varepsilon)\right), \qquad (23)$$

$$L_0\,x(t_0;\varepsilon)+L_1\,x(t_1;\varepsilon)=\ell, \qquad (24)$$

$$y(t+1;\varepsilon)=g\left(t,y(t;\varepsilon),v^o(t)\right), \qquad (25)$$

$$y(t_1;\varepsilon)=G\left(x(t_1;\varepsilon)\right). \qquad (26)$$

Положим

$$a(t)=\left.\frac{\partial x(t;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0};\quad b(t)=\left.\frac{\partial y(t;\varepsilon)}{\partial y}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{27}$$

С использованием (23)–(26) доказывается, что $(a(t),b(t))$ является решением задачи

$$a(t+1)=f_x(t,x(t),u(t))a(t)+f_u(t,x(t),u(t))(u(t)-u^o(t)), \tag{28}$$

$$L_0\,a(t_0)+L_1\,a(t_1)=\ell, \tag{29}$$

$$b(t+1)=g_y(t,y(t),v^o(t)), \tag{30}$$

$$b(t_1)=G_x(x^o(t_1))a(t_1). \tag{31}$$

С учетом обозначений (27) получаем, что

$$\begin{aligned} x(t;\varepsilon)-x^o(t)&=\varepsilon\,a(t)+o(\varepsilon;t),\\ y(t;\varepsilon)-y^o(t)&=\varepsilon\,b(t)+o(\varepsilon;t). \end{aligned} \tag{32}$$

Учитывая (22)–(32) в формуле приращения (21), приходим к разложению

$$J\left(u(t;\varepsilon),v^o(t)\right)-J\left(u^o(t),v^o(t)\right)=$$

$$=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)^2}a(t_0)+$$

$$+a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}a(t_1)+a'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}a(t_0)+$$

$$+a'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}a(t_1)+b'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}b(t_2)-$$

$$-a'(t_1)\frac{\partial^2 M\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x^2}a(t_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[a'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}a(t)+\right.$$

$$+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}a(t)+$$

$$\left.+\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial^2 u}\left(u(t)-u^o(t)\right)\right]-$$

$$\left.-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}b'(t)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}b(t)\right]+o_1\left(\varepsilon^2\right). \qquad (33)$$

Теперь «проварьированное» управление определим по формуле

$$\begin{gathered} u(t;\mu)=u^o(t), \\ v(t;\mu)=-v^o(t)+\mu\left[v(t)-v^o(t)\right]. \end{gathered} \qquad (34)$$

Здесь $\mu\in[0,1]$ – произвольное число, а $v(t)\in V$, $t=t_1,t_1+1,...,t_2-1$ – произвольное допустимое управление.

Через $\left(x(t;\mu),y(t;\mu)\right)$ обозначим решение «возмущенной» системы

$$\begin{gathered} x(t+1;\mu)=f\left(t,x(t;\mu),u^o(t;\mu)\right), \\ L_0\,x(t_0;\mu)+L_1\,x(t_1;\mu)=\ell, \end{gathered} \qquad (35)$$

$$\begin{gathered} y(t+1;\mu)=g\left(t,y(t;\mu),v(t;\mu)\right), \\ y(t_1;\mu)=G\left(x(t_1;\mu)\right). \end{gathered} \qquad (36)$$

Из (35) ясно, что

$$x(t;\mu)-x^o(t)=0. \qquad (37)$$

Положим

$$c(t)=\left.\frac{\partial y(t;\mu)}{\partial y}\right|_{\mu=0}. \qquad (38)$$

С использованием (36) доказывается, что $c(t)$, определяемая формулой (38), является решением задачи

$$c(t+1) = g_y\left(t, y^o(t), v^o(t)\right)c(t) + g_v\left(t, y^o(t), v^o(t)\right)\left(v(t) - v^o(t)\right), \tag{39}$$

$$c(t_1) = 0\,, \tag{40}$$

при этом

$$y(t;\mu) = y^o(t) + \mu(t) + o(t;\mu). \tag{41}$$

Учитывая (34), (37), (41), в формуле приращения (21) функционала качества (1) получим

$$J\left(u^o(t), v(t;\mu)\right) - J\left(u^o(t), v^o(t)\right) =$$
$$= -\mu \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_v\left(t, y^o(t), v^o(t)\right)\left(v(t) - v^o(t)\right) +$$
$$+\frac{\mu^2}{2}\Bigg[c'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}c(t_2) -$$
$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Bigg[c'(t)\frac{\partial^2 M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial y^2}c(t) + 2\left(v(t) - v^o(t)\right)' \times$$
$$\times \frac{\partial^2 M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}c(t) +$$
$$+\left(v(t) - v^o(t)\right)' \frac{\partial^2 M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial^2 v}\left(v(t) - v^o(t)\right)\Bigg]\Bigg] + \mathrm{o}\left(\mu^2\right). \tag{42}$$

Полученные разложения (33) и (42) позволяют определить ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядка, выраженные непосредственно через параметры задачи.

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)}{\partial u}\left(u(t) - u^o(t)\right) \le 0, \tag{43}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \frac{\partial M\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial v}\left(v(t)-v^o(t)\right) \leq 0 \tag{44}$$

выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t = t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1$, $v(t) \in V$, $t = t_1, t_1+1, \ldots, t_2-1$ соответственно.

Теорема 1 представляет собой дискретный аналог линеаризованного условия максимума [8–10] для рассматриваемой задачи.

Доказательство. Пусть $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ – оптимальное управление. Тогда из разложений (33), (42) соответственно следует, что

$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)}{\partial u}\left(u(t)-u^o(t)\right)+o(\varepsilon) \geq 0, \tag{45}$$

$$\mu \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \frac{\partial M'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial y}\left(v(t)-v^o(t)\right)+o(\mu) \geq 0. \tag{46}$$

Из неравенств (45) и (46) в силу произвольности $\varepsilon \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$ и независимости друг от друга $v(t)$ и $u(t)$ получаем неравенства (43) и (44) соответственно.

Теперь изучим случай вырождения линеаризованного условия максимума.

Определение 1. Если для всех $u(t) \in U$, $t = t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1$, $v(t) \in V$, $t = t_1, t_1+1, \ldots, t_2-1$ выполняются соответственно соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'\left(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)\right)}{\partial u}\left(u(t)-u^o(t)\right)=0,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \frac{\partial M'\left(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)\right)}{\partial v}\left(v(t)-v^o(t)\right)=0,$$

то управление $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ назовем квазиособым [12] управлением, а соответствующий случай – квазиособым случаем.

В квазиособом случае из разложений (33), (40) следует неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Теорема 2. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t), v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы неравенства

$$a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)^2}a(t_0)+a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}a(t_1)+$$

$$+a'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}a(t_0)+a'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}a(t_1)+$$

$$+b'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}b(t_2)-a'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}a(t_1)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[a'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}a(t)+\right.$$

$$+2\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}a(t)+$$

$$\left.+\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial^2 u}\left(u(t)-u^o(t)\right)\right]-$$

$$\left.-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}b'(t)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}b(t)\right]\geq 0, \tag{47}$$

$$c'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}c(t_2)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[c'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}c(t)+2\left(v(t)-v^o(t)\right)'\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}c(t)+$$

$$\left.+\left(v(t)-v^o(t)\right)'\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial^2 v}\left(v(t)-v^o(t)\right)\right]\geq 0 \tag{48}$$

выполнялись для всех $u(t)\in U$, $t=t_0,t_0+1,...,t_1-1$, $v(t)\in V$, $t=t_1,t_1+1,...,t_2-1$ соответственно.

Как видно, неравенства (47), (48) являются неявными необходимыми условиями квазиособых управлений. Но, используя их, удается получить необходимые условия оптимальности, выраженные непосредственно через параметры задачи (1)–(6).

Пусть $\Phi(t,\tau)$ и $F(t,\tau)$ $(n \times n)$ – матричные функции, являющиеся решениями задач

$$\Phi(t,\tau-1)=\Phi(t,\tau) f_x\left(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\right),$$

$$\Phi(t,t-1)=E_1,$$

$$F(t,\tau-1)=F(t,\tau) g_y\left(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)\right),$$

$$F(t,t-1)=E_2,$$

$E_i, i=1,2$ – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Тогда решения задачи (28)–(29), (30)–(31), (39)–(40) допускают соответственно представления [9, 11, 12]:

$$\begin{aligned} a(t)=Q(t)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Phi(t,\tau) f_u\left(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)+\\ +\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Phi(t_1,\tau) f_x\left(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right), \end{aligned} \tag{49}$$

$$b(t)=F(t,t_1-1)b(t_1)=F(t,t_1-1)G_x\left(x^o(t_1)\right)a(t_1), \tag{50}$$

$$c(t)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}F(t,\tau) g_v\left(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)\right)\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right). \tag{51}$$

Здесь по определению

$$Q(t)=-\Phi(t,t_0-1)\left(L_0+L_1\Phi(t_1,t_0-1)\right)^{-1}L_1.$$

Полагая

$$\alpha(t,\tau)=\begin{cases}1, & t_0 \le \tau \le t-1,\\ 0, & t-1<\tau \le t_1,\end{cases}$$

формулу (49) запишем в виде

$$a(t)=Q(t)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\Phi(t,\tau) f_u\left(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\alpha(\tau)\Phi(t,\tau)f_x\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left(Q(t)\Phi(t,\tau)+\alpha(t,\tau)\Phi(t,\tau)\right)f_x\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right).$$

Полагая

$$G(t,\tau)=Q(t)\Phi(t,\tau)+\alpha(t,\tau)\Phi(t,\tau),$$

последнюю формулу записываем в виде

$$a(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}G(t,\tau)f_u\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right). \tag{52}$$

С учетом (52) из (50) имеем

$$\begin{aligned}b(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}F(t,t_1-1)G_x\left(x^o(t_1)\right)G(t_1,\tau)\times\\ \times f_u\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right).\end{aligned} \tag{53}$$

Пусть по определению

$$R(t,\tau)=F(t,t_1-1)G_x\left(x^o(t_1)\right)G(t_1,\tau).$$

Тогда представление (53) примет вид

$$b(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}R(t,\tau)f_u\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right). \tag{54}$$

Используя представления (52), (54), выполним преобразование слагаемых в неравенстве (47). Имеем

$$a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)^2}a(t_0)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)G'(t_0,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)^2}G(t_0,s)f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right), \tag{55}$$

$$a'(t_0)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}a(t_1)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)G'(t_0,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right),\quad(56)$$

$$a'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}a(t_1)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)G'(t_1,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right),\quad(57)$$

$$b'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}b(t_2)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)R'(t_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}R(t_2,s)f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right),\quad(58)$$

$$a'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}a(t_1)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)'f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)G'(t_1,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right),\quad(59)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}a'(t)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}a(t)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G'(t,\tau)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}G(t,s)\right]\times$$

$$\times f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right), \tag{60}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}a(t)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left(u(t)-u^o(t)\right)'\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial u\,\partial x}\times$$

$$\times G(t,\tau)f_u\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right), \tag{61}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}b'(t)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}b(t)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1}R'(t,\tau)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}R(t,s)\right]\times$$

$$\times f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right). \tag{62}$$

Далее, используя представление (51), имеем

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}c'(t)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}c(t)=$$

$$=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=t_1}^{t_2-1}\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right)' g_v'\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_2-1}F'(t,\tau)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}F(t,s)\right]\times$$

$$\times g_v\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\left(v(s)-v^o(s)\right), \tag{63}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left(v(t)-v^o(t)\right)'\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}c(t)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\left(v(t)-v^o(t)\right)'\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial v\,\partial y}\times\right.$$

$$\left.\times F(t,\tau)g_v\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right)\right],\qquad(64)$$

$$c'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}c(t_2)=$$

$$=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=t_1}^{t_2-1}\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right)'g_v'\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)F'(t_1,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}F(t_1,s)g_v\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\left(v(s)-v^o(s)\right).\qquad(65)$$

Введем в рассмотрение матричные функции

$$C(\tau,s)=-F'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}F(t_1,s)+$$

$$+\sum_{t=\max(\tau,s)+1}^{t_2-1}F'(t,\tau)\frac{\partial^2 M\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}F(t,s),$$

$$K(\tau,s)=-G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)^2}G(t_0,s)-$$

$$-G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)-$$

$$-G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}G(t_1,s)-$$

$$-G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi_1\left(x^o(t_0),x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)-$$

$$-R'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2)\right)}{\partial y^2}R(t_2,s)+G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 N\left(p^o,x^o(t_1)\right)}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)+$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} G'(t,\tau)\frac{\partial^2 H\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)}{\partial x^2}G(t,s)+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1} R'(t,\tau)\frac{\partial^2 M'\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)}{\partial y^2}R(t,s).$$

Тогда неравенства (47), (48) записываются соответственно в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)' f_u'\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\times$$
$$\times K(\tau,s) f_u\left(s,x^o(s),u^o(s)\right)\left(u(s)-u^o(s)\right)+$$
$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left(u(t)-u^o(t)\right)' H_{ux}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\times\right.$$
$$\left.\times G(t,\tau) f_u\left(\tau,x^o(\tau),u^o(\tau)\right)\left(u(\tau)-u^o(\tau)\right)\right]+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left(u(t)-u^o(t)\right)' H_{uu}\left(t,x^o(t),u^o(t),\psi^o(t)\right)\left(u(t)-u^o(t)\right)\le 0, \quad (66)$$

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=t_1}^{t_2-1}\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right)' g_v'\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)C(\tau,s)\times$$
$$\times g_v\left(s,y^o(s),v^o(s)\right)\left(v(s)-v^o(s)\right)+$$
$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\left(v(t)-v^o(t)\right)' M_{uv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\times\right.$$
$$\left.\times F(t,\tau) g_v\left(\tau,y^o(\tau),v^o(\tau)\right)\left(v(\tau)-v^o(\tau)\right)\right]+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left(v(t)-v^o(t)\right)' M_{vv}\left(t,y^o(t),v^o(t),p^o(t)\right)\left(v(t)-v^o(t)\right)\le 0. \quad (67)$$

Сформулируем полученный результат:

Теорема 3. Для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t),v^o(t)\right)$ необходимо, чтобы неравенства (66), (67) выполнялись для всех $u(t)\in U$, $t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1$, $v(t)\in V$, $t=t_1,t_1+1,\dots,t_2-1$ соответственно.

Список литературы

1. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1974. – № 11. – С. 72–80.

2. Агафонова И.А., Гумин Л.Л., Расина И.В. Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантиприна // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 10.11.78, № 3457. – Иркутск, 1978. – 19 с.

3. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 754–765.

4. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем управления с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 6. – С. 32–36.

5. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / В.А. Батурин, В.А. Дыхта [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1990.

6. Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – № 10. – С. 1758–1770.

7. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление с разрывными системами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.

8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: URSS: Либроком, 2013. – 256 с.

9. Мансимов К.Б. Дискретные системы. – Баку: Изд-во БГУ, 2013. – 151 с.

10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. – 1969. – № 12. – С. 31–47.

11. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче управления с нелокальными краевыми условиями // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 5. – С. 71–79.

12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 256 с.

References

1. Gabelko K.N. Posledovatel'noye uluchsheniye mnogoetapnykh protsessov [Consecutive improvement of multi-stage processes] Avtomatika i telemekhanika. 1974, № 11, p. 72-80.

2. Agafonova I.A., Gumin L.L., Rasina I.V. Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya protsessa metilirovaniya dinatriyevoy soli sul'faminoantiprina [Mathematical modeling and optimization of the process of methylation of

the disodium salt of sulfaminoantiprine]. Dep. v VINITI AN SSSR. 10.11.78, № 3457, Irkutsk, 1978, 19 p.

3. Velichenko V.V. Optimal'noye upravleniye sostavnymi sistemami [Optimal control of composite systems] Dokl. AN SSSR. 1967, v. 176, № 4, p. 754-765.

4. Zakharov G.K. Optimizatsiya stupenchatykh sistem upravleniya s upravlyayemymi usloviyami perekhoda [Optimization of step control systems with controlled transition conditions] Avtomatika i telemekhanika. 1983, № 6, p. 32-36.

5. Baturin V.A., Dykhta V.A. i dr. Metody resheniya zadach teorii upravleniya na osnove printsipa rasshireniya [Methods for solving problems in control theory based on the principle of expansion] Novosibirsk, Nauka, 1990.

6. Ismaylov R.R., Mansimov K.B. Ob usloviyakh optimal'nosti v odnoy stupenchatoy zadache upravleniya [On optimality conditions in a stepped control problem] Zhurn. Vych. Mat. i matem. fiziki. 2006, № 10, p. 1758-1770.

7. Ashchepkov L.T. Optimal'noye upravleniye s razryvnymi sistemami [Optimum control with discontinuous systems] N. Nauka, 1987, 226 p.

8. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobyye optimal'nyye upravleniya [Special optimal controls] M. URSS. 2013, 256 p.

9. Mansimov K.B. Diskretnyye sistemy [Discrete systems] Baku. Izd-vo BGU, 2013,171 p.

10. Gabasov R., Kirillova F.M. K teorii neobkhodimykh usloviy optimal'nosti dlya diskretnykh sistem o the theory of necessary optimality conditions for discrete systems [To the theory of necessary optimality conditions for discrete systems] Avtomatika i telemekhanika. 1969, № 12, p. 31-47.

11. Mansimov K.B. Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v odnoy diskretnoy zadache upravleniya s nelokal'nymi krayevymi usloviyami [Necessary Optimality Conditions in a Discrete Control Problem with Nonlocal Boundary Conditions]. Mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskiy zhurnal «Problemy upravleniya i informatiki». 2012, № 5, p. 71-79.

12. Gabasov R., Kirillova F.M. Optimizatsiya lineynykh system [Optimization of linear systems] Minsk. Izd-vo BGU, 1973, 256 p.

Получено 07.06.2018

Об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджан) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде, 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Наджафова Малахат Ящар кызы – аспирантка Института систем управления НАН Азербайджана (г. Баку, Az1141, ул. Б. Вахабзаде, 9, e-mail: nacafova.melehet@mail.ru).

About the authors

Kamil B. Mansimov (Baku, Azerbaijan) – Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Institute of Control Problems of ANAS, Head of the Laboratory of Control with Complex Dynamic Systems (9, B. Vahabzade av., Baku, AZ1141, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Malahat Ya. Nadzhafova (Baku, Azerbaijan) – Ph.D. Student, Institute of Control Systems of ANAS (9, B. Vahabzade av., Baku, AZ1141, e-mail: nacafova.melehet@mail.ru).