

DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.04

УДК 534.014

И.П. Попов

Курганский государственный университет, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРИИНЕРТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассматривается колебательная система с однородными элементами, а именно – с тремя массивными грузами (триинертный осциллятор). Показана возможность возникновения в такой системе свободных гармонических колебаний, которая, как и в традиционных колебательных системах, обусловлена тем, что элементы системы имеют различный характер реактивности. В колебательной системе с тремя однородными (инертными) элементами различная реактивность достигается суммированием пространственного сдвига ($2\pi/3$) и фазового сдвига ($2\pi/3$). В триинертном осцилляторе колебания обусловлены взаимным преобразованием кинетических энергий грузов. В отличие от традиционных колебательных систем, частоты свободных колебаний колебательных систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов систем и определяются исключительно начальными условиями, благодаря чему они могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Ключевые слова: осциллятор, инертный, гармонический, реактивность, пространственный сдвиг, фазовый сдвиг, кинетическая энергия.

I.P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation

MODELING THREE-INERT OSCILLATOR

We consider a system with uniform oscillatory elements, namely, three massive loads (three-inert system). The possibility of occurrence of such a system free of harmonic oscillations which, as in the conventional oscillatory systems is caused by that its elements are different character reactivity. The oscillating system with three homogeneous (inert) components different reactivity is achieved by summing the spatial shift ($2\pi/3$) and phase shift ($2\pi/3$). The three-inert oscillator there is a mutual exchange between the kinetic energies of loads. Unlike traditional vibration systems free vibration frequency oscillatory systems with homogeneous elements do not depend on the system parameters and determined solely by the initial conditions, so that they can make available to any harmonic oscillations initially set frequency.

Keywords: oscillator, inert, harmonic, reactivity, spatial shift, phase shift, kinetic energy.

Введение

В [1] представлена математическая модель биинертного осциллятора. Он имеет два принципиальных отличия от традиционных колебательных систем – пружинного маятника и электрического колебательного контура [2–9]. Первое: биинертный осциллятор состоит из однородных (инертных) элементов, поэтому качество энергии при

энергообмене не меняется, а именно – кинетическая энергия одного элемента преобразуется в кинетическую же энергию другого. Второе: частоты свободных колебаний биинертного осциллятора не зависят от его параметров и определяются исключительно начальными условиями, благодаря чему он может совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Представляет интерес возможность моделирования триинертного осциллятора, во-первых, в связи с увеличением числа колеблющихся элементов, а во-вторых, и главным образом в связи с тем, что биинертный осциллятор не сбалансирован по силам инерции из-за своей асимметрии, что можно легко реализовать для триинертного осциллятора.

1. Синтез триинертного осциллятора

Пусть три координатные оси – Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 – лежат в одной плоскости Z , последовательно повернуты относительно друг друга на $\pi/3$ и пересекаются в одной точке. Точка пересечения O является началом произвольно направленного вектора \mathbf{R} , принадлежащего Z .

Теорема 1. Координаты x_1 , x_2 , x_3 проекций конца вектора \mathbf{R} на оси Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 являются вершинами равностороннего треугольника, размер которого не зависит от направления \mathbf{R} .

Доказательство. Координаты проекций

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cos \varphi, \\x_2 &= R \cos(\pi/3 - \varphi), \\x_3 &= R \cos(2\pi/3 - \varphi).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь φ – угол между \mathbf{R} и Ox_1 . В соответствии с теоремой косинусов

$$\begin{aligned}(x_1 x_2)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] = \\&= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - 2 \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\&= R^2 \left[\cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \right. \\&\quad \left. - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x_1x_3)^2 &= R^2[\cos^2\varphi + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - 2\cos\varphi\cos(2\pi/3 - \varphi)\cos(2\pi/3)] = \\
 &= R^2 \left[\cos^2\varphi + \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right)^2 - 2\cos\varphi \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \\
 &= R^2 \left[\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi \right] = \frac{3}{4}R^2. \\
 (x_2x_3)^2 &= R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - \\
 &\quad - 2\cos(\pi/3 - \varphi)\cos(2\pi/3 - \varphi)\cos(\pi/3)] = \\
 &= R^2 \left[\left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right) \left(-\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\
 &= R^2 \left[\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4}\sin^2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos^2\varphi - \frac{3}{4}\sin^2\varphi \right] = \frac{3}{4}R^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, треугольник является равносторонним. Теорема доказана.

Теорема 2. Центр треугольника $x_1x_2x_3$ совпадает с серединой вектора \mathbf{R} .

Доказательство. Пусть r – середина вектора \mathbf{R} . В соответствии с теоремой косинусов

$$(x_1r)^2 = R^2[\cos^2\varphi + 1/4 - 2\cos\varphi(1/2)\cos\varphi] = R^2/4.$$

$$(x_2r)^2 = R^2[\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(\pi/3 - \varphi)] = R^2/4.$$

$$(x_3r)^2 = R^2[\cos^2(2\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2\cos(2\pi/3 - \varphi)(1/2)\cos(2\pi/3 - \varphi)] = R^2/4.$$

Точка r равноотстоит от точек x_1 и x_2 , следовательно, она расположена на прямой, перпендикулярной отрезку x_1x_2 и проходящей через его середину. Это же справедливо в отношении отрезка x_1x_3 . Таким об-

разом, точка r принадлежит двум высотам треугольника $x_1x_2x_3$, следовательно, она лежит на их пересечении, которое для равностороннего треугольника является центром. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют определить конфигурацию триинертного осциллятора, упрощенная схема которого показана на рисунке.

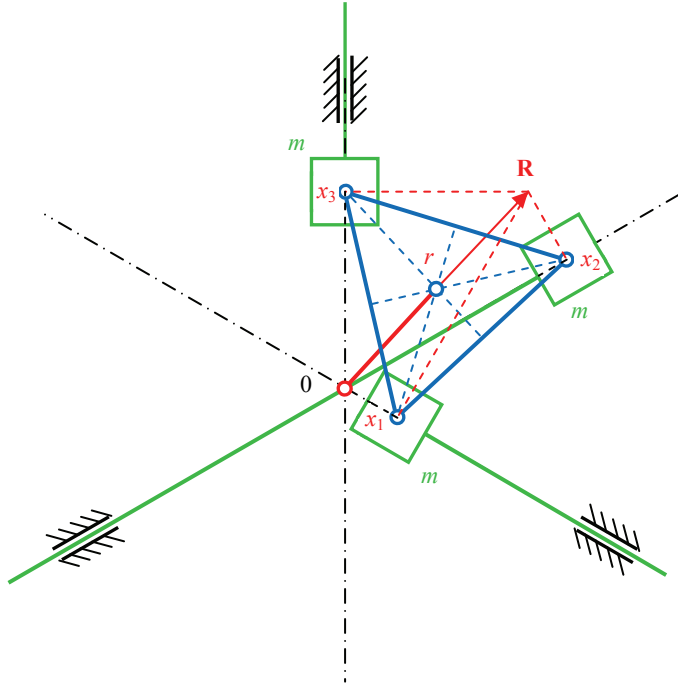


Рис. Триинертный осциллятор

2. Анализ триинертного осциллятора

Внешние усилия к грузам не приложены. Массы связующих элементов и трение не учитываются. Скорости грузов с учетом (1)

$$dx_1/dt = -R\sin\varphi d\varphi/dt,$$

$$dx_2/dt = R\sin(\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt,$$

$$dx_3/dt = R\sin(2\pi/3 - \varphi)d\varphi/dt.$$

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является неизменность полной, в рассматриваемом случае – кинетической – энергии системы:

$$T = 0,5mR^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/3 - \varphi) + \sin^2(2\pi/3 - \varphi)](d\varphi/dt)^2 =$$

$$= 0,75mR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const.}$$

$$d\varphi/dt = C_1,$$

$$\varphi = C_1t + C_2.$$

Пусть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Тогда

$$C_2 = \varphi_0, \quad C_1 = \omega_0.$$

При этом (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\omega_0t + \varphi_0), \\ x_2 &= R\cos(\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0), \\ x_3 &= R\cos(2\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $x_1(0) = x_{10}$, $(dx_1/dt)(0) = v_{10}$. Тогда

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/R, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}.$$

$$-R\omega_0\sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = v_{10},$$

$$\omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}.$$

Таким образом, все три груза совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собой кинетической энергией.

Из уравнений (2) следует, что радиус-вектор \mathbf{R} равномерно вращается с угловой циклической скоростью ω .

Треугольник, образованный шатунами, вращается вокруг точки r и одновременно с радиус-вектором \mathbf{R} – вокруг точки 0 .

При свободных гармонических колебаниях грузов, условием которых является отсутствие трения, необходимости в кривошипе $0r$ не возникает.

При наличии трения кривошип $0r$ необходим для подвода энергии от внешнего привода с целью компенсации ее диссипации. При этом привод не совершает работу, направленную на сообщение грузам гармонических ускорений [10].

Список литературы

1. Попов И.П. Синтез инертно-инертного осциллятора // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 1. – С. 7–13.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, – 1971. – 240 с.
3. Баркгаузен Г. Введение в учение о колебаниях. – М.: Госэнергоиздат, 1934. – 116 с.
4. Benson H. Tongue. Principles of Vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.
5. Thompson W.T. Theory of Vibrations. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.
6. Daniel J. Inman Engineering Vibration. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.
7. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 495 с.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика. – М.: Высш. шк., 1966. – 411 с.
9. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.
10. Попов И.П. Моделирование состояния объекта в виде суперпозиции состояний // Прикладная математика и вопросы управления. – 2015. – № 2. – С. 18–27.

References

1. Popov I.P. Sintez inertno-inertnogo oscilljatora [Synthesis inert-inertial oscillator]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya*, 2017, no. 1, pp. 7–13.
2. Panovko YA.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij [Introduction to mechanical vibrations]. Moscow, 1971. 240 p.
3. Barkgauzen G. Vvedenie v uchenie o kolebaniyah [Introduction to the theory of vibrations]. Moscow, 1934. 116 p.
4. Tongue, Benson. Principles of Vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.
5. Thompson, W.T. Theory of Vibrations. Nelson Thornes Ltd., 1996. 295 p.
6. Inman, Daniel J. Engineering Vibration. – Prentice Hall, 2001. 418 p.
7. Zarubin V.S. Matematicheskoe modelirovanie v tekhnike [Mathematical modeling in engineering]. Moscow, 2010. 495 p.
8. Yablonskij A.A. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. Ch. II. Dinamika [Course of theoretical mechanics. Part II. Dynamics]. Moscow, 1966. 411 p.
9. Markeev A.P. Teoreticheskaya mekhanika: Uchebnik dlya universitetov [Theoretical Mechanics: A Textbook for universities]. Moscow, 1999. 572 p.

10. Popov I.P. Modelirovanie sostoyaniya ob"ekta v vide superpozicii sostoyanij [Modeling state of the object in a superposition of states]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya*, 2015, no. 2, pp. 18–27.

Получено 30.07.2018

Об авторе

Попов Игорь Павлович (Курган, Россия) – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета (640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4, e-mail: ip.popow@yandex.ru).

About the author

Igor' P. Popov (Kurgan, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Machine Tools and Instruments, Kurgan State University (63/4, Sovetskaja st., Kurgan, 640020, Russian Federation, e-mail: ip.popow@yandex.ru).