DOI: 10.15593/2499-9873/2018.3.01
УДК 517.929.7

А.Р. Абдуллаев[1], Е.А. Скачкова[2], О.С. Зубарева[2]

[1]Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Изучается периодическая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения со специальным отклонением аргумента $x''(t)+a(t)x'(g(t))=f(t,(Rx)(t))$, где R – линейный оператор, $a(t)=a_0+w(t)$, $a_0\in R^1$. Получены новые достаточные условия существования решения исследуемой задачи. Обсуждается случай обыкновенного дифференциального уравнения. Исследования примыкают к работе авторов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; периодическая краевая задача; резонанс.

A.R. Abdullaev[1], E.A. Skachkova[2], O.S. Zubareva[2]

[1]Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation
[2]Perm State University, Perm, Russian Federation

PERIODIC SOLUTIONS OF SECOND ORDER QUASILINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

Periodic boundary value problem for a functional-differential equation with a special deviation of the argument $x''(t)+a(t)x'(g(t))=f(t,(Rx)(t))$ is studied, where R is a linear operator, $a(t)=a_0+w(t)$, $a_0\in R^1$. New sufficient conditions for the existence of the solution of the problem are obtained. The case of an ordinary differential equation is discussed. The investigations adjoin the work of the authors.

Keywords: functional-differential equation; periodic boundary-value problem; resonance.

I. Рассмотрим задачу

$$x''(t)+a(t)x'\left(g(t)\right)=f\left(t,\left(Rx\right)(t)\right),\ t\in\left[0;\mathrm{T}\right], \tag{1}$$

$$x(0)=x(T), x'(0)=x'(T), \tag{2}$$

где $a:[0,T]\to R^1$ – суммируемая функция, $g:\left[0,T\right]\to[0,T]$ – измеримая функция, R – линейный оператор.

Отметим, что задача (1), (2) рассматривалась в работе авторов [1]. Здесь мы исследуем специальный случай этой задачи, т.е. полагаем $g(0)=g(T)$. Кроме того, для случая обыкновенного дифференциального уравнения сформулирована отдельная теорема существования решения (теорема 3).

В настоящей работе также используется подход, основанный на рассмотрении задачи в виде квазилинейного операторного уравнения с необратимым линейным оператором. Отметим, что такой подход традиционно используется многими авторами (J. Mawhin, M. Furi, C.P. Gupta и др.).

II. Пусть X и Y – банаховы пространства. В этом пункте сформулируем теорему о разрешимости квазилинейного операторного уравнения

$$Lx=Fx, \tag{3}$$

где $L:X\to Y$ – линейный ограниченный оператор; $F:X\to Y$ – вполне непрерывный оператор.

Введем следующие обозначения.

Для линейного оператора $L:X\to Y$ ядро и образ обозначим соответственно через $\ker L$ и $\operatorname{im} L$. Пусть $P:X\to X$ проектор на $\ker L$ и $P^C=I-P$ – дополнительный проектор. Через $Q:Y\to Y$ обозначим проектор на $\operatorname{im} L$, $Q_0^c:\mathrm{Y}\to\ker Q$ – сужение проектора $Q^c=I-Q$.

Нам потребуется понятие обобщенно-обратного к оператору L оператора. Поскольку это понятие трактуется по-разному, далее будем следовать определению, сформулированному в [2].

Определение 1. Оператор $K_{\mathrm{P}}:\operatorname{im} L\to X$ будем называть обобщенно-обратным к оператору $L:X\to Y$, ассоциированным с проектором *P*, если справедливы равенства:

1) $LK_P = I_0$, где $I_0 : \operatorname{im} L \to Y$ – оператор естественного вложения;

2) $K_P L = P^c$;

3) $P^c K_P = K_P$.

Пусть ядро и образ линейного ограниченного оператора L дополняемы, т.е. $X = \ker L \oplus X_0$, $Y = \operatorname{im} L \oplus Y_0$. Пусть подпространство Y_0 нетривиально и изоморфно $\ker L$. Через $J : Y_0 \to \ker L$ обозначим выбранный изоморфизм.

Будем рассматривать $H_0 = \ker L$ как гильбертово пространство с нормой $\|x\|_{H_0} = \|x\|_X$.

Теорема 1 [3]. Пусть выполняются условия:

1) существует такая константа $c > 0$, что неравенство

$$\left\langle JQ_0^c\left(F\left(x+u\right)-F\left(x+v\right)\right), u-v\right\rangle_{H_0} \geq c\|u-v\|_{H_0}^2$$

справедливо для всех $x \in X$ и произвольных $u, v \in H_0$;

2) существуют константы $a \geq 0$, $b > 0$ такие, что выполнено неравенство $\|Fx\| \leq a + b\|x\|$ для всех $x \in X$;

3) $b\|K_p\|\left(1+\dfrac{b\|JQ_0^c\|}{c}\right)<1.$

Тогда уравнение (3) имеет хотя бы одно решение.

III. В этом пункте приведем используемые в работе функциональные пространства, а также сформулируем вспомогательные утверждения, относящиеся к линейной части уравнения. Пусть $L_2 = L_2\left[0,T\right]$ – пространство суммируемых с квадратом функций $x:[0,T] \to R^1$ с нормой $\|x\| = \left(\int_0^T \left|x\left(s\right)\right|^2 ds\right)^{1/2}$; $W_2 = W_2\left[0;\mathrm{T}\right]$ – пространство абсолютно непрерывных вместе со второй производной функций $x:[0,T] \to R^1$ таких, что $x'' \in L_2$, с нормой $\|x\|_W = |x(0)| + |x'(0)| + \|x''(t)\|$; $L_\infty = L_\infty\left[0,T\right]$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $x:[0,T] \to R^1$ с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]}|x(t)|$.

Определение 2. Под решением задачи (1), (2) будем понимать всякую функцию $x \in W_2[0;T]$, удовлетворяющую почти всюду на $[0;T]$ уравнению (1) и периодическим условиям (2).

Представим задачу в виде операторного уравнения (3). Через W_2^0 обозначим подпространство пространства W_2, определяемое краевыми условиями (2), т.е.

$$W_2^0 = \{x \in W_2 \mid x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T)\}.$$

Полагаем $L, F : W_2^0 \to L_2$, $(Lx)(t) = x''(t) + a_0 x'(t)$, $(Fx)(t) = f(t, (Rx)(t)) + {}$ $+ a_0(x'(t) - x'(g(t))) - w(t)x'(g(t))$.

Лемма 1. Относительно оператора L справедливы следующие утверждения:

1) $\ker L = \{x \in W_2 \mid x \equiv C \in R^1\}$;

2) $\operatorname{im} L = \left\{ y \in L_2 \mid \int_0^T y(s)\,ds = 0 \right\}$.

Отметим, что оператор $L : W_2^0 \to L_2$ является фредгольмовым [4].

Для применения теоремы 1 нам потребуются проекторы на ядро и образ оператора L. Полагаем

$$Px = x(0),\ Qy = y - \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,ds.$$

Непосредственно проверяется, что операторы $P : W_2 \to W_2$, $Q : L_2 \to L_2$ являются проекторами соответственно на ядро и образ оператора $L : W_2^0 \to L_2$. Тогда дополнительный к Q проектор $Q^C : L_2 \to L_2$ имеет вид

$$Q^C y = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,ds.$$

Следующее утверждение из работы [1] сформулируем в удобной нам форме.

Лемма 2. Оператор K_P, обобщенно-обратный к оператору L, ассоциированный с проектором P, определяется равенством [1]

$$K_P y = \frac{1}{a_0}\int_0^t y(s)\left(1-e^{a_0(s-t)}\right)ds + \frac{e^{-a_0 t}-1}{a_0\left(1-e^{a_0 T}\right)}\int_0^T y(s)e^{a_0 s}ds\,. \qquad (4)$$

Лемма 3. Норма оператора $K_{\text{P}} : \operatorname{im} L \to W_2$ удовлетворяет оценке

$$\|K_P\| \le 1 + \left\|e^{a_0 t}\right\|\left(\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|} + |a_0|\cdot\max\left\{1; e^{-a_0 T}\right\}\sqrt{T}\left(1+\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|}\right)\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\|K_P y\|_W = \left|\frac{\int_0^T y(s)e^{a_0 s}ds}{1-e^{a_0 T}}\right| + \left\|y(t) - a_0 e^{-a_0 t}\left(\int_0^t y(s)e^{a_0 s}ds - \frac{\int_0^T y(s)e^{a_0 s}ds}{1-e^{a_0 T}}\right)\right\|.$$

Выражение в правой части равенства оценим сверху с применением неравенств Минковского и Гельдера. В результате получим

$$\|K_P y\|_W \le \left(1 + \left\|e^{a_0 t}\right\|\left(\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|} + |a_0|\cdot\max\left\{1; e^{-a_0 T}\right\}\sqrt{T}\left(1+\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|}\right)\right)\right)\|y\|.$$

Лемма доказана.

В силу фредгольмовости оператора $L : W_2^0 \to L_2$ подпространства $\ker L$ и $\ker Q$ изоморфны. Определим изоморфизм $J : \ker Q \to \ker L$ равенством $Jy = y,\ \ y \in \ker Q,$ и оператор $Q_0^c : L_2 \to \ker Q$ (сужение проектора Q^c) – равенством $Q_0^c y = Q^c y,\ \ y \in L_2.$

Лемма 4. Для нормы оператора $JQ_0^c : L_2 \to \ker L$ справедлива оценка

$$\left\|JQ_0^c\right\| \le \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\|JQ_0^c y\right\| = \left|\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,ds\right| \le \frac{1}{T}\int_0^T |y(s)|\,ds \le \frac{1}{\sqrt{T}}\|y\|.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение доказывается по схеме доказательства леммы 4 из работы [5].

Лемма 5. Для любого элемента $x(t)\in W_2^0$ справедливы неравенства

$$|x(t)|\le k_0\,\|x\|_W\,,\quad |x'(t)|\le k_1\,\|x\|_W\,,\quad |x'(g(t))|\le k_2\,\|x\|_W\,,$$

где $k_0=\max\left\{1;T;T\sqrt{\dfrac{T}{3}}\right\}$, $k_1=\max\left\{1;\sqrt{T}\right\}$, $k_2=\max\left\{1;\sqrt{\tilde g}\right\}$, $\tilde g=\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]}|g(t)|$.

IV. Для рассматриваемого случая, а именно – $g(0)=g(T)$, справедливо следующее утверждение о разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) существует $\gamma>0$ такое, что $\left(f(t,u)-f(t,v)\right)(u_1-v_1)\ge\gamma(u-v)^2$;

2) существуют $\alpha,\beta\ge 0$ такие, что $\left|f(t,u)\right|\le\alpha+\beta|u|$;

3) $bk\left(1+\dfrac{b\sqrt{T}}{\gamma\int_0^T R(1)(t)\,dt}\right)<1$,

где $k=1+\left\|e^{a_0t}\right\|\left(\dfrac{1}{\left|1-e^{a_0T}\right|}+|a_0|\cdot\max\left\{1;e^{-a_0T}\right\}\sqrt{T}\left(1+\dfrac{1}{\left|1-e^{a_0T}\right|}\right)\right)$, $\tilde w=\|w\|$,

$b=|a_0|(k_1+k_2)\sqrt{T}+k_2\tilde w+\beta\|R\|$, $k_1=\max\left\{1;\sqrt{T}\right\}$, $k_2=\max\left\{1;\sqrt{\tilde g}\right\}$,

$\tilde g=\operatorname*{vraisup}_{t\in[0,T]}|g(t)|$. Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение в пространстве W_2.

Доказательство. В условиях теоремы оператор $F:\mathrm{W}_2\to L_2$ является вполне непрерывным [5].

Для проверки условия 1 теоремы 1 рассмотрим произвольные функции $u,v\in\ker L$, которые являются постоянными, и произвольно фиксированный элемент $x=\left\{x\in W_2^0\mid x(0)=0\right\}$. Имеем

$$\left\langle JQ_0^c\left(F(x+u)-F(x+v)\right),u-v\right\rangle_{H_0}=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T(u-v)\Big(f\big(s,(Rx)(s)+uR(1)(s)\big)-f\big(s,(Rx)(s)+vR(1)(s)\big)\Big)ds.$$

Поскольку функция f удовлетворяет условию 1 теоремы 2,

$$\left\langle JQ_0^c\left(F\left(x+u\right)-F\left(x+v\right)\right),u-v\right\rangle_{H_0}\geq$$

$$\geq\frac{\gamma}{T}\int_0^T\left(u-v\right)^2 R\left(1\right)\left(s\right)ds=\frac{\gamma}{T}\left\|u-v\right\|^2\int_0^T R\left(1\right)\left(s\right)ds.$$

Таким образом, условие 1 теоремы 2 выполняется с константой

$$c=\frac{\gamma}{T}\int_0^T R\left(1\right)\left(t\right)dt.$$

В силу условия 2 настоящей теоремы и леммы 5 получим следующую оценку:

$$\|Fx\|\leq\alpha\sqrt{T}+(|a_0|(k_1+k_2)\sqrt{T}+k_2\tilde{w}+\beta\|R\|)\|x\|_W .$$

Таким образом, неравенство $\|Fx\|\leq a+b\|x\|_{\mathrm{W}}$ выполнено.

Теперь выполнение условия 3 теоремы 2 следует из условия 3 теоремы и леммы 2. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в качестве постоянной a_0 можно взять интегральное среднее значение функции $a,$ т.е. $a_0=\dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^T a(s)ds.$

Пользуясь аналогичной схемой доказательства, приведем теорему о разрешимости периодической краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$x''(t)+a(t)x'\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right)\right),\ t\in\left[0;\mathrm{T}\right], \qquad (5)$$
$$x(0)=x(T),x'(0)=x'(T).$$

Отметим, что сформулированное ниже утверждение непосредственно из теоремы 2 не следует, так как функция $g(t)=t$ не удовлетворяет условию $g(0)=g(T).$

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

1) существует $\gamma>0$ такое, что $\left(f\left(t,u\right)-f\left(t,v\right)\right)\left(u_1-v_1\right)\geq\gamma\left(u-v\right)^2;$

2) существуют $\alpha,\beta\geq0$ такие, что $\left|f\left(t,u\right)\right|\leq\alpha+\beta|u|;$

3) $bk\left(1+\frac{b}{\gamma\sqrt{T}}\right)<1,$

где $k=1+\left\|e^{a_0 t}\right\|\left(\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|}+\left|a_0\right|\cdot\max\left\{1;e^{-a_0 T}\right\}\sqrt{T}\left(1+\frac{1}{\left|1-e^{a_0 T}\right|}\right)\right),\quad \tilde{w}=\|w\|,$

$b=k_1\tilde{w}+k_0\beta\sqrt{T},\quad k_0=\max\left\{1;T;T\sqrt{\frac{T}{3}}\right\},\quad k_1=\max\left\{1;\sqrt{T}\right\}$. Тогда задача (5), (2) имеет хотя бы одно решение в пространстве W_2.

Список литературы

1. Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. О периодической краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Научно-технический вестник Поволжья. – 2017. – № 6. – С. 21–23.

2. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов: монография. – Челябинск, 1994. – 93 с.

3. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В., Савочкина А.А. Разрешимость квазилинейного уравнения с монотонным оператором // Научно-технические ведомости СПбГП. – 2010. – № 2 (98). – С. 80–85.

4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.

5. Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 12. – С. 3–10.

References

1. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. *O periodicheskoi kraevoi zadache dlya funkcionalno-differencialnogo uravnenia vtorogo poryadka* [On a periodic boundary-value problem for a second-order functional-differential equation]. Scientific and Technical Volga region Bulletin no. 6, Kazan 2017, P. 21-23.

2. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. *Elementy teorii topologicheski neterovykh operatorov* [Elements of the theory of topologically noetherian operators]. Chelyabinsk, 1994, 93 p.

3. Abdullaev A.R., Plekhova E.V., Savochkina A.A. *Razreshimost' kvazilineinogo uravneniia s monotonnym operatorom* [Solvability of quasilinear equation with monotone operator]. Nauchno-tekhnicheskie

vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta, 2010, no. 2 (98), pp. 80-85.

4. Kerin S.G. Lineinie uravneniya v banahovom prostranstve [Linear equations in a Banach space]. Moscow: Nauka, 1971. 104 p.

5. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. Periodic boundary value problem for a fourth-order differential equation, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). 2013. no. 12. P. 3-10.

Получено 21.05.2018

Об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Скачкова Елена Александровна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Фундаментальная математика» Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: skachkovaea@gmail.com).

Зубарева Ольга Сергеевна (Пермь, Россия) – ассистент кафедры «Фундаментальная математика» Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: zubarevaos59@gmail.com).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: h.m@pstu.ru).

Elena A. Skachkova (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Fundamental Mathematics, Perm State University (15, Bukirev st., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: skachkovaea@gmail.com).

Olga S. Zubareva (Perm, Russian Federation) – Assistant, Department of Fundamental Mathematics, Perm State University (15, Bukirev st., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: zubarevaos59@gmail.com).