DOI: 10.15593/2499-9873/2018.3.02
УДК 517.929.6

М.М. Байбурин

Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

О МНОГОТОЧЕЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для линейной дифференциальной системы уравнений первого порядка рассматривается многоточечная задача с интегральным условием. Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости, условие корректности и точное решение.

Ключевые слова: многоточечные задачи, корректные задачи, точные решения.

M.M. Baiburin

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Republic of Kazakhstan

ON MULTI-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FIRST ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM

A multipoint problem with an integral condition is considered for first order linear differential equations system. Necessary and sufficient conditions of unique solution are obtained, the correctness condition, and the exact solution.

Keywords: multi-point boundary value problems, Ill-posed problems, exact solutions.

Введение

Многоточечные краевые задачи применяются в различных областях теории управления, строительной механики, экономики и в силу их важности исследованы многими авторами. Особый интерес представляют многоточечные задачи для дифференциальной системы уравнений (ДСУ) с интегральным условием. Возможно, одной из самых ранних работ по этой теме является *Hilb problem* [1] ($Ly = PY' + QY$, $\int_0^1 K(\xi)Y(\xi)\,d\xi+\gamma Y(0)-\Gamma Y$), опубликованная в 1911 г. Тем не менее до сих пор установление корректности подобных задач и получение их точных решений остается актуальной и трудоемкой задачей. В настоящей работе для ДСУ первого порядка рассматривается многоточечная задача с интегральным условием. Задачи подобного типа естественно возникают из теории расширений минимального оператора или теории сужений максимального оператора в банаховых и гильбертовых пространствах. Эта теория в терминах обратных операторов в банаховых пространствах впервые была построена М.О. Отелбаевым и его учениками [2–4], а в терминах прямых операторов Р.О. Ойнаровым и его учениками [5–9]. В работах [5–15] с помощью теории расширений были получены критерии корректности и точные решения некоторых многоточечных и двухточечных задач. Для многих многоточечных задач с дифференциальным и дифференциально-функциональным уравнением получение точных решений невозможно. Поэтому большое количество научных работ посвящено исследованию разрешимости данных задач [16–19]. Меньшее число работ посвящено многоточечным задачам для ДСУ первого порядка [20–23]. Некоторые из них содержат интегральные условия на границе, но не дают точного решения. Чаще всего многоточечные задачи для ДСУ первого порядка с интегральным условием решаются численно [24]. Идеи, представленные в [7], сыграли существенную роль при написании данной статьи.

1. Необходимые определения

Пусть X, Y – комплексные банаховы пространства. Через $D(P)$ и $R(P)$ будем обозначать соответственно область определения и область значения оператора P. Оператор P называется *расширением оператора* P_0, а P_0 – *сужением* оператора P, если $D(P_0) \in D(P)$ и $Px = P_0x$, для всех $x \in D(P_0)$. Оператор P называется *корректным*, если $R(P) = Y$ и обратный оператор P^{-1} существует и непрерывнен. Будем говорить, что задача $Px = y$ корректна, если оператор P корректен. Уравнение $Px = y$ с линейным оператором P однозначно разрешимо на $R(P)$, если однородное уравнение $Px = 0$ имеет только нулевое решение, т.е. если $\ker P = \{0\}$. Уравнение $Px = y$ везде разрешимо на Y, если для любого $y \in Y$ оно имеет решение. В дальнейшем нулевой вектор-столбец мы будем обозначать через $\vec{0}$.

Многоточечные задачи для линейной ДСУ первого порядка

Лемма 2.1. Пусть $F(x) = \mathrm{col}(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$, $C_n[0,1]$ – пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|F\|C_n = \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\| + ... + \|f_n(x)\|, \ \|f(x)\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

и операторы L, K, H: $C_n[0,1]\to C_n[0,1]$ заданы матрицами

$$L(x) = \begin{pmatrix} l_{11} & ... & l_{1n}(x) \\ ... & ... & ... \\ l_{n1}(x) & ... & l_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad K(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & ... & k_{1n}(x) \\ ... & ... & ... \\ k_{n1}(x) & ... & k_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & ... & h_{1n}(x) \\ ... & ... & ... \\ h_{n1}(x) & ... & h_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

где $f_i,\ l_{ij},\ k_{ij},\ h_{ij} \in C[0,1],\ \max_{i,j}|l_{ij}| = l_0,\ \max_{i,j}|k_{ij}| = k_0,\ \max_{i,j}|h_{ij}| = h_0,\ i,\ j = 1,\ ...,\ n,$ и пусть точки z_j удовлетворяют условиям $0 = z_0 < z_1 < ... < z_s < z_{s+1} = 1$. Тогда имеют место оценки

$$\|LF\|_{C_n} \le l_0 n \|F\|_{C_n}, \tag{1}$$

$$\left\|\int_0^x L(t)F(t)dt\right\|_{C_n} \le l_0 n\|F\|_{C_n}, \quad x\in[0,1], \tag{2}$$

$$\left\|K(x)\int_0^X L(t)F(t)dt\right\|_{C_n} \le k_0 l_0 n^2 \|F\|_{C_n}, \quad x\in[0,1], \tag{3}$$

$$\left\|\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(x)F(x)dx\right\|_{C_n} \le k_0 n\|F\|_{C_n}, \tag{4}$$

$$\left\|H(x)\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(t)F(x)dx\right\|_{C_n} \le h_0 k_0 n^2 \|F\|_{C_n}, \quad x\in[0,1], \tag{5}$$

$$\left\|\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(x)\int_0^x L(t)F(t)dtdx\right\|_{C_n} \le k_0 l_0 n^2 \|F\|_{C_n}, \tag{6}$$

$$\left\|H(x)\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(\xi)\int_0^\xi L(t)F(t)dtd\xi\right\|_{C_n} \le k_0 l_0 h_0 n^3 \|F\|_{C_n}, \quad x\in[0,1]. \tag{7}$$

Доказательство.

$$\|LF\|_{C_n}=\left\|\begin{pmatrix} l_{11}(x) & \dots & l_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ l_{n1}(x) & \dots & l_{nn}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ \dots\\ f_n\end{pmatrix}\right\|_{C_n}=\left\|\begin{matrix} l_{11}(x)f_1(x)+\dots+l_{1n}(x)f_n(x)\\ l_{n1}(x)f_1(x)+\dots+l_{nn}(x)f_n(x)\end{matrix}\right\|_{C_n}=$$

$$=\|l_{11}(x)f_1(x)+\dots+l_{1n}(x)f_n(x)\|+\dots+\|l_{n1}(x)f_1(x)+\dots+l_{nn}(x)f_n(x)\|\le$$
$$\le\|l_{11}(x)f_1(x)\|+\dots+\|l_{1n}(x)f_n(x)\|+\dots+\|l_{n1}(x)f_1(x)\|+\dots+\|l_{nn}(x)f_n(x)\|\le$$
$$\le\|l_{11}(x)\|\cdot\|f_1(x)\|+\dots+\|l_{1n}(x)\|\cdot\|f_n(x)\|+\dots+\|l_{n1}(x)\|\cdot\|f_1(x)\|+\dots$$
$$+\|l_{nn}(x)\|\cdot\|f_n(x)\|\le l_0n\|F\|_{C_n}.$$

Формула (1) доказана. Докажем (2):

$$\left\|\int_0^x L(t)F(t)dt\right\|_{C_n}=\left\|\begin{matrix}\int_0^x[l_{11}(t)f_1(t)+\dots+l_{1n}(t)f_n(t)]dt\\ \int_0^x[l_{n1}(t)f_1(t)+\dots+l_{nn}(t)f_n(t)]dt\end{matrix}\right\|_{C_n}=$$

$$=\left\|\int_0^x[l_{11}(t)f_1(t)+\dots+l_{1n}(t)f_n(t)]dt\right\|+\left\|\int_0^x[l_{n1}(t)f_1(t)+\dots+l_{nn}(t)f_n(t)]dt\right\|\le$$
$$\le\|l_{11}(t)f_1(t)+\dots+l_{1n}(t)f_n(t)\|+\dots+\|l_{n1}(t)f_1(t)+\dots+l_{nn}(t)f_n(t)\|.$$

Далее доказательство (2) приводится как в случае (1). Докажем (3):

$$\left\|K(x)\int_0^x L(t)F(t)dtdx\right\|=\left\|\begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ k_{n1} & \dots & k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx\\ \dots\\ \int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\end{pmatrix}\right\|_{C_n}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}k_{11}\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx+\dots+k_{1n}\int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\\ k_{n1}\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx+\dots+k_{nn}\int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\end{matrix}\right\|_{C_n}=$$

$$=\left\|k_{11}\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx+\dots+k_{1n}\int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\right\|+\dots$$
$$+\left\|k_{n1}\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx+\dots+k_{nn}\int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\right\|\le$$
$$\le\|k_{11}\|\cdot\left\|\int_0^x(l_{11}f_1+\dots+l_{1n}f_n)dx\right\|+\dots+\|k_{1n}\|\cdot\left\|\int_0^x(l_{n1}f_1+\dots+l_{nn}f_n)dx\right\|+\dots$$

$$+\|k_{n1}\|\cdot\left\|\int_0^x (l_{11}f_1+\ldots+l_{1n}f_n)dx\right\|+\ldots+\|k_{nn}\|\cdot\left\|\int_0^x (l_{n1}f_1+\ldots+l_{nn}f_n)dx\right\|\le$$
$$\le k_0\left(\left\|\int_0^x (l_{11}f_1+\ldots+l_{1n}f_n)dx\right\|+\ldots+\left\|\int_0^x (l_{n1}f_1+\ldots+l_{nn}f_n)dx\right\|+\ldots\right.$$
$$\left.+\left\|\int_0^x (l_{11}f_1+\ldots+l_{1n}f_n)dx\right\|+\ldots+\left\|\int_0^x (l_{n1}f_1+\ldots+l_{nn}f_n)dx\right\|\right)=$$
$$=k_0 n\left(\left\|\int_0^x (l_{11}f_1+\ldots+l_{1n}f_n)dx\right\|+\ldots+\left\|\int_0^x (l_{n1}f_1+\ldots+l_{nn}f_n)dx\right\|\right)\le$$
$$\le k_0 l_0 n^2\|F\|_{C_n}.$$

Последнее неравенство следует из доказательства (2). Неравенства (4) и (5) сразу следуют из доказательства неравенств (2) и (3), если возьмем $K(x) = H(x)$, $L(x) = K(x)$, $F(x) = F(x)$. Нижний и верхний пределы интегралов в (4) и (5) на доказательство не влияют. Для доказательства (6) введем вектор $F(x) = \int\limits_0^x L(t)F(t)\,dt$. Тогда, последовательно применяя неравенства (4) и (2), получаем:

$$\left\|\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(x)\int_0^x L(t)F(t)dt\right\|_{C_n}=\left\|\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(x)F(x)dx\right\|_{C_n}\le$$
$$\le k_0 n\|F(x)dx\|_{C_n}=k_0 n\left\|\int_0^x L(t)F(t)dt\right\|_{C_n}\le k_0 l_0 n^2\|F\|_{C_n}.$$

Докажем (7), используя вектор $F(x)$ и неравенства (5) и (2):

$$\left\|H(x)\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(\xi)\int_0^\xi L(t)F(t)dtd\xi\right\|_{C_n}=\left\|H(x)\int_{z_j}^{z_{j+1}} K(\xi)F(\xi)d\xi\right\|_{C_n}\le$$
$$\le h_0k_0n^2\|F(\xi)\|_{C_n}=h_0k_0n^2\left\|\int_0^\xi L(t)F(t)dt\right\|_{C_n}\le h_0k_0l_0n^3\|F(t)\|_{C_n}.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим следующую задачу:

$$Y'(x)-AY(x)=F(x),\quad x\in[0,1], \tag{8}$$
$$\sum_{i=0}^{m} A_iY(x_i)+\sum_{j=0}^{s} B_j\int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)Y(x)dx=\vec{0}, \tag{9}$$

где A, A_i, B_j – постоянные матрицы, $C_j(x)$ – переменные матрицы n-го порядка, элементы которых являются непрерывными функциями на [0,1],

$Y(x)$ – вектор-функция с непрерывно дифференцируемыми координатами, т.е. $Y(x) \in C_n^1[0,1]$. Точки x_i, z_j удовлетворяют условиям:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = 1,$$
$$0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_s < z_{s+1} = 1.$$

Пусть $F(x) \in C_n[0,1]$. Заметим, что оператор P, соответствующий задаче (8)–(9), является расширением следующего минимального оператора P_0:

$$P_0Y = Y'(x) - AY(x),$$
$$D(P_0) = \left\{ Y(x) \in C_n^1[0,1] : A_iY(x_i) = \vec{0}, \quad B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)Y(x)dx = \vec{0} \right\},$$

где $i = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, s$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.2. Задача (8)–(9) однозначно разрешима на $C_n[0,1]$ тогда и только тогда, когда

$$\det T = \det\left(\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A} + \sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x) e^{xA} dx \right) \neq 0. \tag{10}$$

Доказательство. Введем оператор P, соответствующий однородной задаче (8)–(9):

$$PY = Y'(x) - AY(x) = \vec{0}, \quad x \in [0,1], \tag{11}$$
$$D(P) = \left\{ Y \in C_n^1[0,1] : \sum_{i=0}^{m} A_iY(x_i) + \sum_{i=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)Y(x)dx = \vec{0} \right\}. \tag{12}$$

Как известно, система уравнений (11) имеет решение

$$Y(x) = e^{xA}D, \tag{13}$$

где e^{xA} – фундаментальная матрица системы (11) и D – произвольный столбец с постоянными коэффициентами. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\ker P = \{0\}$, если и только если $\det T \neq 0$. Пусть $\det T \neq 0$. Из (13) легко следует

$$Y(x_i) = e^{x_i A}D, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

$$C_j(x)Y(x) = C_j(x)e^{xA}D, \quad j = 0,1, \ ..., \ s. \tag{15}$$

Интегрируя соотношение (15), получаем

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)Y(x)dx = \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}dxD, \quad j = 0,1, \ ..., \ s. \tag{16}$$

Из (12) в силу (14) и (16) следует

$$\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A} D + \sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}dxD = \vec{0},$$

или

$$\left(\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A} + \sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}dx \right) D = \vec{0}. \tag{17}$$

Из последнего уравнения и предположения $\det T \neq 0$ получаем $D = \vec{0}$. Подставляя это значение в (13), получаем $Y(x) = \vec{0}$. Следовательно, $\ker P = \{0\}$.

Обратное утверждение докажем методом от противного. Пусть $\det T = 0$. Тогда существует такой столбец $D_0 \neq \vec{0}$ с постоянными коэффициентами, что $TD_0 = \vec{0}$. Рассмотрим вектор-функцию $Y_0(x) = e^{xA}D_0$. Очевидно, что $Y_0(x) \neq \vec{0}$, так как e^{xA} – фундаментальная матрица системы (11). Покажем, что $Y_0(x) \in D(P) \cap \ker P$. Действительно, подставляя последовательно $Y_0(x)$ в (11) и (12), получаем

$$PY_0(x) = Y_0'(x) - AY_0(x) = \left(e^{xA}D_0\right)' - Ae^{xA}D_0 = Ae^{xA}D_0 - Ae^{xA}D_0 = \vec{0},$$

$$\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A} D_0 + \sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}dxD_0 = TD_0 = \vec{0}.$$

Из первого соотношения следует $Y_0(x) \in \ker P$, а из второго – $Y_0(x) \in D(P)$. Таким образом, доказано, что из $\det T = 0$ следует $\ker P \neq \{0\}$, что эквивалентно утверждению: из $\ker P = \{0\}$ следует $\det T \neq 0$.

Теорема доказана. □

Теорема 2.3. Если задача (8)–(9) однозначно разрешима на $C_n[0,1]$, тогда она корректна и единственное решение ее задается формулой

$$Y(x)=e^{xA}\left[\int_0^x e^{-tA}F(t)dt-T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m}A_i e^{x_i A}\int_0^{x_i}e^{-tA}F(t)dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=0}^{z}B_j\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx\right)\right].$$

Доказательство. Пусть задача (8)–(9) однозначно разрешима. Тогда из теоремы 2.2 следует det $T\neq 0$. Как известно, уравнение (8) для любого $F(x)\ \in C_n[0,1]$, имеет решение

$$Y(x)=e^{xA}D+e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dt, \tag{19}$$

где e^{xA} – фундаментальная матрица системы $Y'(x) = AY(x)$ и D – произвольный столбец с постоянными коэффициентами. Из (19) легко следует

$$Y(x_i)=e^{x_iA}D+e^{x_iA}\int_0^{x_i}e^{-tA}F(t)dt,\quad i=1,\ ...,\ m, \tag{20}$$

$$C_j(x)Y(x)=C_j(x)e^{xA}D+C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dt,\quad j=1,\ ...,\ s. \tag{21}$$

Интегрируя соотношение (21), получаем

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)Y(x)dx=\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}dxD+$$

$$+\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx,\quad j=0,1,\ ...,\ s. \tag{22}$$

Из (9) в силу (20) и (22) следует

$$\sum_{i=0}^{m}A_ie^{x_iA}D+\sum_{i=0}^{m}A_ie^{x_iA}\int_0^{x_i}e^{-tA}F(t)dt+\sum_{j=0}^{s}B_j\left(\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}+\right.$$

$$\left.+\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx\right)=\vec{0},$$

или

$$\left(\sum_{i=0}^{m}A_ie^{x_iA}+\sum_{j=0}^{s}B_j\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}dx\right)D=-\sum_{i=0}^{m}A_ie^{x_iA}\int_0^{x_i}e^{-tA}F(t)dt-$$

$$-\sum_{j=0}^{s}B_j\int_{z_j}^{z_{j+1}}C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx.$$

Из последней системы уравнений и предположения det $T \neq 0$ получаем

$$D = -T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A}\int_0^{x_i} e^{-tA}F(t)dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx\right). \tag{24}$$

Подставляя значение D в (19), получаем решение (18) задачи (8)–(9). Поскольку это решение выполняется для любого $F(x) \in C_n[0,1]$, система уравнений (8)–(9) везде разрешима. Используя обозначения оператора P из (11), (12), перепишем решение (18) в виде $Y(x)=P^{-1}F(x)$. Теперь для доказательства корректности задачи (8)–(9) остается показать ограниченность обратного оператора P^{-1}. Из (18) следует

$$Y(x) = e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dt - e^{xA}T^{-1}\sum_{i=0}^{m} A_i e^{x_i A}\int_0^{x_i} e^{-tA}F(t)dt -$$

$$-e^{xA}T^{-1}\sum_{j=0}^{s} B_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} C_j(x)e^{xA}\int_0^x e^{-tA}F(t)dtdx. \tag{25}$$

Вводим $n\times n$-матрицы: $L(x) = (l_{\mu\nu}) = e^{-xA}$, $K(x) = (k_{\mu\nu}) = e^{xA}$, $K_i(x) = (k_{\mu\nu}{}^{(i)}) = e^{xA}T^{-1}A_i e^{xiA}$, $H_j(x) = (h_{\mu\nu}{}^{(j)}) = e^{xA}T^{-1}B_j$, $\hat{K}_j(x) = (\hat{k}_{\mu\nu}{}^{(j)}) = C_j(x)e^{xA}$, $i = 1, \ldots m$; $j = 1, \ldots, s$; $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Элементы всех этих матриц являются непрерывными функциями на $[0,1]$, так как непрерывно дифференцируемы элементы фундаментальной матрицы $K(x) = e^{xA}$ и обратной к ней $L(x) = e^{-xA}$. Поэтому существуют числа

$$l_0 = \max_{\mu,\nu}|l_{\mu\nu}|,\quad k_0 = \max_{\mu,\nu}|k_{\mu\nu}|,\quad k_i = \max_{\mu,\nu}|k_{\mu\nu}^{(i)}|,\quad i = 1,\ \ldots,\ m,$$

$$\hat{k}_j = \max_{\mu,\nu}|\hat{k}_{\mu\nu}^{(i)}|,\quad h_j = \max_{\mu,\nu}|h_{\mu\nu}^{(j)}|,\quad \mu,\nu = 1,\ \ldots,\ n,\quad j = 0,1,\ \ldots,\ s.$$

Перепишем (25) в терминах новых обозначений:

$$Y(x) = K(x)\int_0^x L(t)F(t)dt - K_1(x)\int_0^{x_1} L(t)F(t)dt - \ldots$$

$$- K_m(x)\int_0^{x_m} L(t)F(t)dt - H_0(x)\int_{z_0}^{z_1}\hat{K}_0(x)\int_0^x L(t)F(t)dtdx - \ldots$$

$$- H_s(x)\int_{z_s}^{1}\hat{K}_s(x)\int_0^x L(t)F(t)dtdx.$$

Из этого уравнения при помощи леммы 2.1 следует оценка

$$\|Y(x)\|_{C_n} \le \left[k_0 + k_1 + ... + k_m + (h_0\hat{k}_0 + h_1\hat{k}_1 + ... + h_s\hat{k}_s)n\right] l_0 n^2 \|F(x)\|_{C_n},$$

которая доказывает ограниченность оператора P^{-1}, и, следовательно, задача (8)–(9) корректна.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. – 1975. – T. 5, № 4. – C. 493–542.

2. Кокебаев В.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Доклады Академии наук СССР. – 1983. – Т. 271, № 6. – С. 1307–1310.

3. Байбурин М.М. Многоточечные задачи для дифференциального оператора второго порядка // Вестник КарГУ. Серия: Математика. – 2005. – № 1(37)/2005. – С. 36–40.

4. Шыныбеков А.М. О корректных сужениях и расширениях некоторых дифференциальных операторов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Алма-Ата, 1983. – 16 с.

5. Ойнаров Р.О., Ибатов А. Многоточечные задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, не разрешенных относительно старшей производной // Вестник АН Казахской ССР. – 1984. – № 6. – С. 70–72.

6. Ойнаров Р.О., Ибатов А. Многоточечные задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Известия АН Казахской ССР. Серия: Физико-математические науки. – 1984. – № 5. – С. 70–73.

7. Ойнаров Р.О., Парасиди И.Н. Корректно-разрешимые расширения операторов с конечными дефектами в Банаховом пространстве // Известия АН Казахской ССР. Серия: Физико-математические науки. – 1988. – № 5. – С. 42–46.

8. Ойнаров Р.О., Сагинтаева С.С. Гладкие расширения минимального оператора с конечным дефектом в банаховом пространстве // Известия АН Республики Казахстан. – 1994. – № 5. – С. 43–48.

9. Парасиди И.Н. Корректные расширения минимального оператора с конечным дефектом в банаховом пространстве: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Алма-Ата, 1989. – 16 с.

10. Искакова А.К. О корректности одного оператора в $C[0,1]_n$ // Вестник КазГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 1999. – № 5 (19). – С. 68–72.

11. Отелбаев М.О., Искакова А.К. О многоточечной задаче для оператора $Ly = y'(t)$ в $C^1[0,1]$ // Вестник КазГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 1999. – № 5 (19). – С. 111–115.

12. Parasidis I.N., Tsekrekos P.C. Correct selfadjoint and positive extensions of nondensely defined symmetric operators // Abstract and Applied Analysis. – 2005. – Т. 7. – С. 767–790.

13. Parassidis I.N., Tsekrekos P.C. Some quadratic correct extensions of minimal operators in Banach space // Operators and Matrices. – 2010.

14. Parasidis I.N., Tsekrekos P.C. Correct and selfadjoint problems for quadratic operators // Eurasian Mathematical Journal. – 2010. – Т. 1, № 2. – С. 122–135.

15. Sadybekov M.A., Turmetov B.K. On an Analog of Periodic Boundary Value Problems for the Poisson Equation in the Disk // Differential Equations. – 2014. – Т. 50. – С. 264–268.

16. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. On one class of multipoint boundary value problems for a second-order linear functional-differential equation // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 230. – № 5. – С. 647–650.

17. Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Пермского университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2014. – № 2(25). – С. 5–9.

18. Gupta Ch.P. A generalized multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations // Journal of Applied Mathematics and Computation. – 1998. – № 89. – P. 133–146.

19. Ильин В.А., Моисеев Е.М. Нелокальные краевые задачи первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. – 1987. – № 23(7). – С. 803–810.

20. Ашордия М.Т. Критерий разрешимости одной многоточечной краевой задачи для системы обобщенных обыкновенных дифференциального уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 10. – С. 1303–1311.

21. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новые достижения. – 1987. – Т. 30. – С. 3–103.

22. Климов В.С. Многоточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 8. – С. 1532–1534.

23. Яковлев М.Н. Оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, подчиненных многоточечным и интегральным условиям // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1983. – Т. 124. – С. 131–139.

24. Абдуллаев В.М., Айда-Заде Х.Р. О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 12. – С. 2163–2177.

References

1. Krall A.M. *The development of general differential and general differential-boundary systems – Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 1975, vol.5, no. 4, pp. 493-542.

2. Kokebaev V.K, Otelbaev M.O. Shynybekov A.M. *K voprosam rasshireniia i suzheniia operatorov* [To the questions of expansion and contraction of operators] *Soviet Mathematics. Doklady*. 1983, Vol. 271, No. 6, pp.1307-1310.

3. Baiburin M.M. *Mnogotochechnye zadachi dlia differentsialnogo operatora-vtorogo poriadka* [Multipoint value problems for second order differential operator] – *Vestnik KARgu. Seriia: Matematika*. 2005, No. 1-37/2005, pp. 36-40.

4. Shynybekov A.M. O korrektnykh suzheniiakh i rasshireniiakh nekotorykh differentsialnykh operatorov [On the correct restrictions and extensions of certain differential operators] Abstract of Ph. D. thesis. Alma Ata, 1983, 16 p.

5. Oinarov R.O. Ibatov A. *Mnogotochechnye zadachi dlia differentsialnykh uravnenii s otkloniaiushchimsia argumentum neitralnogo tipa ne razreshennykh otnositelno starshei proizvodnoi* [Multipoint value problems for differential equations with a deviating argument of neutral type that are not re-

solved with respect to the highest derivative] – *Bulletin of National academy of sciences of the Republic of Kazakhstan*. 1984, No. 6, pp. 70-72.

6. Oinarov R.O., Ibatov A. Mnogotochechnye zadachi dlia nelineinogo differentsialnogo uravneniia s otkloniaiushchimsia argumentum neitralnogo tipa [Multipoint value problems for a nonlinear differential equation with a deviating argument of neutral type] – *Journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series*. 1984, No.5, pp. 70-73.

7. Oinarov R.O., Parasidi I.N. *Korrektno razreshimye rasshireniia operatorov s konechnymi defektami v Banakhovom prostranstve* [Correctly solvable extensions of operators with finite defects in a Banach space] – *Journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series*. 1988, No. 5, pp. 42-46.

8. Oinarov R.O., Sagintaeva S.S. *Gladkie rasshireniia minimalnogo operatora s konechnym defektom v Banakhovom prostranstve* [Smooth extensions of a minimal operator with a finite defect in a Banach space] – *Journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*. 1994, No. 5, pp. 43-48.

9. Parasidi I.N. Korrektnye rasshireniia minimalnogo-operatora s konechnym defektom v Banakhovom prostranstve [Correct extensions of a minimal operator with a finite defect in a Banach space]. Abstract of Ph. D. thesis. Alma Ata, 1989, 16 p.

10. Iskakova A.K. *O korrektnosti odnogo operatora v* $C[0,1]_n$ [On the correctness of a single operator in $C[0,1]_n$] – *Vestnik KARgu. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 1999, No. 5, Iss. 19, pp. 68-72

11. Otelbaev M.O., Iskakova A.K. *O mnogotochechnoi zadache dlia operatora* $Ly=y'(t)$ *v* $C_1[0,1]$ [On the multipoint value problem for the operator Ly = y'(t) in $C_1[0,1]$] – *Vestnik KAZgu. Seriia: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 1999, No. 5, Iss. 19, pp. 111-115.

12. Parasidis I.N., Tsekrekos P.C. *Correct selfadjoint and positive extensions of nondensely defined symmetric operators – Abstract and Applied Analysis*. 2005, vol.7, pp. 767-790.

13. Parassidis I.N., Tsekrekos P.C. *Some quadratic correct extensions of minimal operators in Banach space – Operators and Matrices*. 2010.

14. Parasidis I.N., Tsekrekos P.C. *Correct and selfadjoint problems for quadratic operators – Eurasian Mathematical Journal*. 2010,vol. 1, no. 2, pp. 122-135.

15. Sadybekov M. A., Turmetov B.K. *On an Analog of Periodic Boundary Value Problems for the Poisson Equation in the Disk – Differential Equations*. 2014, vol.50, pp. 264-268.

16. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. *On one class of multipoint boundary value problems for a second-order linear functional-differential equation – Journal of Mathematical Sciences*. 2018,Vol. 230, No. 5, pp. 647-650.

17. Abdullaev A.R. Skachkova EA *Ob odnoi mnogotochechnoi kraevoi zadache dlia differentsialnogo uravneniia vtorogo poriadka* [A multi-point boundary value problem for second-order differential equation] – *Vestnik Permskogo Universiteta. Seriia: Matematika. Mekhanika. Iinformatika*. 2014, No.2 (25), pp. 5-9

18. Gupta Ch.P. *A generalized multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations – Journal of Applied Mathematics and Computation*. 1998, no. 89, pp. 133-146.

19. Ilin V.A., Moiseev E.M. *Nelokalnye kraevye zadachi pervogo roda dlia operatora Shturma-Liuvillia v differentsialnoi I raznostnoi traktovkakh* [Nonlocal boundary value problems of the first kind for the Sturm-Liouville operator in differential and difference treatment] – *Differential Equations*. 1987. No. 23, Iss. 7, pp. 803-810.

20. Ashordiia M.T. *Kriterii razreshimosti odnoi mnogotochechnoi kraevoi zadachi dlia sistemy obobshchennykh obyknovennykh differentsialnogo uravnenii* [A criterion for the solvability of a multipoint boundary value problem for a system of generalized ordinary differential equations] – *Differential Equations*. 1996, Vol. 32, No. 10, pp. 1303-1311.

21. Kiguradze I.T. *Kraevye zadachi dlia system obyknovennykh differentsialnykh uravnenii* [Boundary value problems for systems of ordinary differential equations] – *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 1987, Vol. 30, pp. 3-103.

22. Klimov V.S. *Mnogotochechnaia kraevaia zadacha dlia sistemy differentsialnykh uravnenii* [Multipoint boundary value problem for a system of differential equations] – *Differential Equations*. 1969, Vol. 5, No. 8, pp. 1532-1534.

23. Yakovlev M.N. *Otsenki reshenii system nagruzhennykh integro-differentsialnykh uravnenii podchinennykh mnogotochechnym i integralnym usloviiam* [Estimates for solutions of systems of loaded integro-differential equations subject to multipoint and integral conditions] – *Journal of Mathematical Sciences*. 1983, vol. 124, pp. 131-139.

24. Abdullaev V.M., Aida-Zade Kh.R *O chislennom reshenii zadach optimalnogo upravleniia s nerazdelennymi mnogotochechnymi i integralnymi usloviiami* [On the Numerical Solution of Optimal Control Problems with Unshared Multipoint and Integral Conditions] – *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2012, Vol. 52, No. 12, pp. 2163-2177.

Получено 25.07.2018

Об авторе

Байбурин Мерхасыл Мукеевич (Астана, Казахстан) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Фундаментальная математика» Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева (010008, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, e-mail: merkhasyl@mail.ru).

About the author

Merkhasyl M. Baiburin (Astana, Republic of Kazakhstan) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University (2, Satpayev str., Astana, 010008, Republic of Kazakhstan, e-mail: merkhasyl@mail.ru).