DOI: 10.15593/2499-9873/2018.2.01
УДК 517.977.56

К.Б. Мансимов[1, 2], Т.Ф. Мамедова[2]

[1] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини – Маркезини, в предположении открытости областей управления. Установлены аналог уравнения Эйлера и квадратичное необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: дискретная двухпараметрическая система типа Форназини – Маркезини, квадратичное необходимое условие оптимальности, ступенчатая задача, оптимальное управление, аналог уравнения Эйлера, открытая область управления.

K.B. Mansimov[1, 2], T.F. Mamedova[2]

[1] Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

FIRST AND SECOND ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE STEP CONTROL PROBLEM OF DISCRETE TWO-PARAMETRIC SYSTEMS

One step optimal control problem described by discrete two-parameter systems of the Fornazini – Markesini type is considered, assuming openness of the control domain. An analog of the Euler equation and a quadratic necessary optimality condition are established.

Keywords: Fornazini – Markesini type discrete two-parameter system, quadratic necessary optimality condition, step problem, optimal control, analogue of the Euler equation, open control domain.

Введение

В последние годы много внимания уделяется изучению многоэтапных (ступенчатых, составных) задач оптимального управления. Под многоэтапными процессами понимаются процессы, в которых изменения вектора состояния объекта управления рассматриваются на ряде отрезков или областей. Подобные задачи оптимального управления возникают в робототехнике, космической навигации, химической технологии, экологии и др. (см., например, [1–6]). В работах [1–6] и других исследованы различные задачи оптимального управления ступенчатыми процессами, описываемые обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями. В исследованиях [7–14] и других изучены различные аспекты задач оптимального управления, описываемые дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини – Маркезини. Подобными системами описываются многие реальные процессы [7–10].

В предлагаемой работе исследуется одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретной двухпараметрической системой (система Форназини – Маркезини) при открытости областей управления. Установлен аналог уравнения Эйлера и доказано необходимое условие оптимальности второго порядка. Частный случай рассматриваемой задачи изучен в [15, 16].

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x+1)=f\left(t,x,z(t,x),u(t,x)\right),$$

$$(t,x)\in D_1=\left\{(t,x):\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\right\}; \tag{1}$$

$$y(t+1,x+1)=g\left(t,x,y(t,x),v(t,x)\right),$$

$$(t,x)\in D_2=\left\{(t,x):\ t=t_1,t_1+1,\dots,t_2-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\right\}, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$z(t,x_0)=b_1(t),\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1, \tag{3}$$

$$a(x_0)=b_1(t_0);$$

$$y(t_1,x)=G\left(z(t_1,x)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$y(t,x_0)=b_2(t),\ t=t_1,t_1+1,...,t_2, \tag{4}$$

$$G\big(z(t_1,x_0)\big)=b_2(t_1).$$

Здесь $f(t,x,z,u)$ – заданная n-мерная, а $g(t,x,y,v)$ – m-мерная вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по третьему и четвертому аргументам до второго порядка включительно; $a(x)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей; $G(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция; t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданные числа, причем разности t_2-t_0 и $X-x_0$ есть натуральные числа; $u(t,x)$ – r-мерный, а $v(t,x)$ – q-мерный дискретные векторы управляющих воздействий, причем

$$\begin{aligned} &u(t,x)\in U, \quad (t,x)\in D_1,\\ &v(t,x)\in V, \quad (t,x)\in D_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $U\subset R^r$ и $V\subset R^q$ – заданные непустые открытые и ограниченные множества.

Пару (u,v) с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*, а соответствующий набор (u,v,z,y) – *допустимым процессом.*

На решениях краевой задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u,v)=\varphi_1\big(z(t_1,X)\big)+\varphi_2\big(y(t_2,X)\big). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление, доставляющее минимум функционалу (6), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс – *оптимальным процессом*.

2. Разложение специального приращения функционала качества

Пусть $(u^{\text{o}},v^{\text{o}},z^{\text{o}},y^{\text{o}})$ – фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar u,\bar v,\bar z,\bar y)$, где $\bar u(t,x)=u^{\text{o}}(t,x)+\Delta u(t,x)$, $\bar v(t,x)=v^{\text{o}}(t,x)+$

$+\Delta v(t,x)$, $\bar z(t,x)=z^{\circ}(t,x)+\Delta z(t,x)$, $\bar y(t,x)=y^{\circ}(t,x)+\Delta y(t,x)$, обозначим произвольный допустимый процесс.

Введем функции Гамильтона – Понтрягина:

$$H\left(t,x,z,u,\psi^{\circ}\right)=\psi_1^{\circ\prime}\cdot f\left(t,x,z,u\right),$$

$$M\left(t,x,y,v,p^{\circ}\right)=\psi_2^{\circ\prime}\cdot g\left(t,x,y,v\right),$$

где ψ_1°, ψ_2° – пока неизвестные вектор-функции соответствующих размерностей, а штрих ($'$) – операция транспонирования.

Запишем приращение функционала качества:

$$\Delta S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=S\left(\bar u,\bar v\right)-S\left(u^{\circ},v^{\circ}\right)=$$

$$=\varphi_1\left(\bar z\left(t_1,X\right)\right)-\varphi_1\left(z^{\circ}\left(t_1,X\right)\right)+\varphi_2\left(\bar y\left(t_2,X\right)\right)-\varphi_2\left(y^{\circ}\left(t_2,X\right)\right). \qquad (7)$$

Приращения $\Delta z(t,x)$, $\Delta y(t,x)$ являются решением краевой задачи

$$\Delta z\left(t+1,x+1\right)=f\left(t,x,\bar z\left(t,x\right),\bar u\left(t,x\right)\right)-f\left(t,x,z^{\circ}\left(t,x\right),u^{\circ}\left(t,x\right)\right),$$

$$\Delta z\left(t_0,x\right)=0,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$\Delta z\left(t,x_0\right)=0,\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1; \qquad (8)$$

$$\Delta y\left(t+1,x+1\right)=g\left(t,x,\bar y\left(t,x\right),\bar v\left(t,x\right)\right)-g\left(t,x,y^{\circ}\left(t,x\right),v^{\circ}\left(t,x\right)\right),$$

$$\Delta y\left(t_1,x\right)=G\left(x,\bar z\left(t_1,x\right)\right)-G\left(x,z^{\circ}\left(t_1,x\right)\right),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X, \qquad (9)$$

$$\Delta y\left(t,x_0\right)=0,\quad t=t_1,t_1+1,\dots,t_2.$$

С учетом (8), (9) и определения функций H, M имеем:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{\circ\prime}\left(t,x\right)\Delta z\left(t+1,x+1\right)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[H\left(t,x,\bar z\left(t,x\right),\bar u\left(t,x\right),\psi_1^{\circ}\left(t,x\right)\right)-$$

$$-H\left(t,x,z^{\circ}\left(t,x\right),u^{\circ}\left(t,x\right),\psi_1^{\circ}\left(t,x\right)\right)\Big],$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o\prime}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=$$
$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[M\left(t,x,\bar{y}(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)-$$
$$-M\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\Big].$$

Сделав замену переменных $t+1=\tau,\;\; x+1=s,$ получим:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o\prime}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=$$
$$=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o\prime}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)-\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o\prime}(t_0-1,x-1)\Delta z(t_0,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=\psi_1^{o\prime}(t_1-1,X-1)\Delta z(t_1,X)-$$
$$-\psi_1^{o\prime}(t_1-1,x_0-1)\Delta z(t_1,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o\prime}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o\prime}(t-1,X-1)\Delta z(t,X)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o\prime}(t-1,x_0-1)\Delta z(t,x_0)+$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta z(t,x),\tag{10}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o\prime}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=$$
$$=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o\prime}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o\prime}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=\psi_2^{o\prime}(t_2-1,X-1)\Delta y(t_2,X)-$$
$$-\psi_2^{o\prime}(t_2-1,x_0-1)\Delta y(t_2,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o\prime}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-$$
$$-\psi_2^{o\prime}(t_1-1,X-1)\Delta y(t_1,X)+\psi_2^{o\prime}(t_1-1,x_0-1)\Delta y(t_1,x_0)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o\prime}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o\prime}(t-1,X-1)\Delta y(t,X)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o\prime}(t-1,x_0-1)\Delta y(t,x_0)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta y(t,x). \qquad (11)$$

Полагая $N\left(\psi_2^{o},z,x\right)=\psi_2^{o\prime}(t_1-1,x-1)\,y(t_1,x)\equiv\psi_2^{o\prime}(t_1-1,x-1)\times$ $\times G\left(x,z(t_1,x)\right)$ и учитывая тождества (10), (11), преобразуем (7) к виду

$$\Delta S\left(u^{o},v^{o}\right)=\frac{\partial\varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\frac{\partial\varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2,X)+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)+$$

$$+\psi_1^{o\prime}(t_1-1,X-1)\Delta z(t_1,X)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o\prime}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o\prime}(t-1,X-1)\Delta z(t,X)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o\prime}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_u\left(t,x,z^{o}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_z'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^{o}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta z(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{o}(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\Delta u(t,x)+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_3\left(\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right)^2\right)+$$

$$+\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_2-1,X-1)\Delta y(t_2,X)-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-$$

$$-N_z\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}},X\right)\Delta z(t_1,X)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{X-1}N_z'\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,x),x\right)\Delta z(t_1,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t_1,x)N_{zz}\left(\psi_2^{\mathrm{o}},z^{\mathrm{o}}(t_1,x),x\right)\Delta z(t_1,x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{X-1}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t-1,X-1)\Delta y(t,X)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{\mathrm{o}\prime}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M_u'\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),\overline{v}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta v(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta v'(t,x)M_y\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),\overline{v}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta y(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta y(t,x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta v'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),\overline{v}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta v(t,x)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_5\left(\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right)^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M_y'\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\Delta y(t,x). \qquad (12)$$

Если предположить, что функции $\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)$ являются решением системы разностных уравнений

$$\psi_1^{\mathrm{o}}(t-1,x-1)=H_z(t,x),$$

$$\psi_1^o(t_1-1,x-1)=G_z'\left(x,z^o(t_1,x)\right)\psi_1^o(t_1-1,x),$$

$$\psi_1^o(t-1,X-1)=0,$$

$$\psi_1^o(t_1-1,X-1)=-\frac{\partial\varphi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z}+G_z'\left(x,z^o(t_1,x)\right)\psi_2^o(t_1-1,X-1),$$

$$\psi_2^o(t-1,x-1)=M_y(t,x),$$

$$\psi_2^o(t-1,X-1)=0,\ \psi_2^o(t_2-1,x-1)=0,$$

$$\psi_2^o(t_2-1,X-1)=-\frac{\partial\varphi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y},$$

то формула приращения (12) примет вид

$$\Delta S\left(u^o,v^o\right)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_u'\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta u(t,x)+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+2\Delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),\bar{u}(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta u(t,x)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^o,z^o(t_1,X),X\right)\Delta z(t_1,X)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta y(t,x)+$$

$$+2\Delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^o(t,x),\bar{v}(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta y(t,x)+$$

$$+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta v(t,x)\Big]+o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} M_v'\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)\Delta v(t,x)+$$

$$+\,\text{o}_2\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\text{o}_4\left(\left\|\Delta z(t,x)\right\|^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\text{o}_5\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|^2\right)-\text{o}_3\left(\left\|\Delta y(t,x)\right\|^2\right). \tag{13}$$

Пусть ε – любое достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t,x)\in R^r$, $(t,x)\in D_1$, $\delta v(t,x)\in R^q$, $(t,x)\in D_2$ – произвольные ограниченные вектор-функции. Выберем допустимые управляющие функции $\overline{u}(t,x;\varepsilon)$, $\overline{v}(t,x;\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\overline{z}(t+1,x+1;\varepsilon)\equiv f\left(t,x,\overline{z}(t,x;\varepsilon),\overline{u}(t,x;\varepsilon)\right)\equiv$$

$$\equiv f\left(t,x,\overline{z}(t,x;\varepsilon),u^{\text{o}}(t,x)\right)+\varepsilon\,\delta u(t,x), \tag{14}$$

$$\overline{z}(t_0,x;\varepsilon)=\alpha(x),\ x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$\overline{z}(t,x_0;\varepsilon)=\beta_1(t),\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1;$$

$$\overline{y}(t+1,x+1;\varepsilon)\equiv g\left(t,x,\overline{y}(t,x;\varepsilon),\overline{v}(t,x;\varepsilon)\right)\equiv$$

$$\equiv g\left(t,x,\overline{y}(t,x;\varepsilon),v^{\text{o}}(t,x)\right)+\varepsilon\,\delta v(t,x), \tag{15}$$

$$\overline{y}(t_1,x;\varepsilon)=G\left(x,\overline{z}(t_1,x;\varepsilon)\right),\ x=x_0,x_0+1,\dots,X,$$

$$\overline{y}(t,x_0;\varepsilon)=\beta_2(t),\ t=t_1,t_1+1,\dots,t_2.$$

В силу определения вариации $\delta z(t,x)=\left.\dfrac{\partial\overline{z}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$, $\delta y(t,x)=$ $=\left.\dfrac{\partial\overline{y}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$. Учитывая условия, наложенные на правые части уравнений (1), (2), при помощи (14), (15) получаем:

$$\Delta z(t,x;\varepsilon)=\overline{z}(t,x;\varepsilon)-z^{\text{o}}(t,x)=\varepsilon\,\delta z(t,x)+\text{o}(\varepsilon;t,x), \tag{16}$$

$$\Delta y(t,x;\varepsilon) = \bar{y}(t,x;\varepsilon) - y^{\text{o}}(t,x) = \varepsilon\,\delta y(t,x) + o(\varepsilon;t,x), \tag{17}$$

где $\delta z(t,x)$ и $\delta y(t,x)$ являются решениями краевых задач

$$\delta z(t+1,x+1) = \frac{\partial f\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x)\right)}{\partial z}\delta z(t,x) +$$
$$+\frac{\partial f\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x)\right)}{\partial u}\delta u(t,x), \tag{18}$$
$$\alpha(t_0,x) = 0,\ \alpha(t,x_0) = 0;$$
$$\delta y(t+1,x+1) = \frac{\partial g\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x)\right)}{\partial y}\delta y(t,x) +$$
$$+\frac{\partial g\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x)\right)}{\partial v}\delta v(t,x),$$
$$\delta y(t_1,x) = G_z\left(x,z(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x),\ \delta y(t,x_0) = 0.$$

Учитывая разложения (16), (17), из формулы (13) получаем:

$$\Delta S_\varepsilon\left(u^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x)\right) = S\left(\bar{u}(t,x;\varepsilon),\bar{v}(t,x;\varepsilon)\right) - S\left(u^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x)\right) =$$
$$= -\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} H'_u\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\delta u(t,x) -$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} M'_v\left(t,x,y^{\text{o}}(t,x),v^{\text{o}}(t,x),\psi_2^{\text{o}}(t,x)\right)\delta v(t,x) +$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\text{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X) -$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$
$$+2\delta u'(t,x) H_{uz}\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$
$$+\delta u'(t,x) H_{uu}\left(t,x,z^{\text{o}}(t,x),u^{\text{o}}(t,x),\psi_1^{\text{o}}(t,x)\right)\delta u(t,x)\Big]\Bigg] +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)-\right.$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\times\right.$$

$$\times\delta y(t,x)+2\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta y(t,x)+$$

$$\left.\left.+\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta v(t,x)\right]\right]-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\delta z'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^{o},z^{o}(t_1,X),X\right)\delta z(t_1,X)+o\left(\varepsilon^2\right). \qquad (19)$$

Из разложения (19) в силу открытости областей управлений U и V (с учетом результатов вариационного исчисления (см. например [17, 18])) следует, что для оптимальности допустимого процесса $\left(u^{o},v^{o},z^{o},y^{o}\right)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_u'\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta u(t,x)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M_v'\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta v(t,x)=0, \qquad (20)$$

$$\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)-$$

$$-\delta z'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^{o},z^{o}(t_1,X)\right)\delta z(t_1,X)-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta z(t,x)+\right.$$

$$+2\delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta z(t,x)+$$

$$\left.+\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta u(t,x)\right]+$$

$$+\delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{o}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\delta y(t_2,X)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\times\right.$$

$$\times \delta y(t,x) + 2\delta v'(t,x) M_{vy}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta y(t,x) +$$

$$+ \delta v'(t,x) M_{vv}\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right)\delta v(t,x)\Big]\Big] \geq 0 \qquad (21)$$

выполнялись для всех $\delta u(t,x) \in U$ при $(t,x) \in D_1$ и для всех $\delta v(t,x) \in V$ при $(t,x) \in D_2$.

Из тождества (20), в силу независимости и произвольности допустимых управлений (u,v), получаем следующее утверждение:

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления* (u^{o},v^{o}) *в задаче* (1)–(6) *необходимо выполнение соотношений:*

$$H_u\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right) = 0, \ (t,x) \in D_1, \qquad (22)$$

$$M_v\left(t,x,y^{o}(t,x),v^{o}(t,x),\psi_2^{o}(t,x)\right) = 0, \ (t,x) \in D_2. \qquad (23)$$

Пара соотношений (22), (23) есть аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Допустимое управление (u^{o},v^{o}), удовлетворяющее уравнениям (22), (23), следуя [19], назовем *классической экстремалью*.

Ясно, что число классических экстремалей может быть достаточно большим. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности, позволяющие сузить множество классических экстремалей, подозрительных на оптимальность.

Используя произвольность и независимость допустимых вариаций $\delta u(t,x)$, $\delta v(t,x)$, из неравенства (21) получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Для оптимальности классической экстремали* (u^{o},v^{o}) *необходимо, чтобы вдоль процесса* $(u^{o},v^{o},z^{o},y^{o})$ *выполнялись неравенства:*

$$1)\ \delta z'(t_1,X)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{o}(t_1,X)\right)}{\partial z^2} - N_{zz}\left(\psi_2^{o},z^{o}(t_1,X)\right)\right]\delta z(t_1,X) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\delta z'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z^{o}(t,x),u^{o}(t,x),\psi_1^{o}(t,x)\right)\delta z(t,x) +$$

$$+2\delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta z(t,x)+$$

$$+\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta u(t,x)\Big]-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_1(t,x)+$$

$$+\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)\geq 0, \tag{24}$$

где $\delta z(t,x)$ *есть решение краевой задачи* (18), *а* $\beta_1(t,x)$ *есть решение задачи*

$$\beta_1(t+1,x+1)=g_y\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_1(t,x), \tag{25}$$

$$\beta_1(t_1,x)=G_z\left(x,z^{\mathrm{o}}(t_1,x)\right)\delta z(t_1,x),\ \beta_1(t,x_0)=0;$$

2) $$\beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\beta_2'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\beta_2(t,x)+2\delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_2(t,x)+$$

$$+\delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta v(t,x)\Big]\geq 0, \tag{26}$$

где $\beta_2(t,x)$ *есть решение задачи*

$$\beta_2(t+1,x+1)=g_z\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\beta_2(t,x)+$$

$$+g_v\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta v(t,x), \tag{27}$$

$$\beta_2(t_1,x)=0,\ \beta_2(t,x_0)=0.$$

Неравенства (24), (26) являются неявными необходимыми условиями оптимальности. Используя их, получим явное необходимое условие оптимальности.

Решение $\delta z(t,x)$ краевой задачи (18) допускает представление [14]

$$\delta z(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\,\tau,s)\,f_u\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right)\delta u(\tau,s). \quad (28)$$

Здесь $R_1(t,x;\,\tau,s)$ – $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением задачи

$$R_1(t,x;\,\tau-1,s-1)=R(t,x;\,\tau,s)\,f_z\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right),$$

$$R_1(t,x;\,\tau-1,x-1)=0,\ R_1(t,x;\,t-1,s-1)=0,\ R_1(t,x;\,t-1,x-1)=E_1,$$

где E_1 – единичная $n\times n$-матрица.

Через $R_2(t,x;\,\tau,s)$ обозначим $(m\times m)$-матричную функцию, являющуюся решением задачи

$$R_2(t,x;\,\tau-1,s-1)=R_2(t,x;\,\tau,s)\,g_y\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s)\right),$$

$$R_2(t,x;\,\tau-1,x-1)=0,\ R_2(t,x;\,t-1,s-1)=0,\ R_2(t,x;\,t-1,x-1)=E_2,$$

где E_2 – единичная $m\times m$-матрица.

Решения краевых задач (25) и (27) допускают соответственно представления

$$\beta_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\tau,s)\,f_u\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right)\delta u(\tau,s), \quad (29)$$

$$\beta_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\,\tau,s)\,g_v\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s)\right)\delta v(\tau,s),$$

где $Q(t,x;\,\tau,s)$ определяется формулой

$$Q(t,x;\,\tau,s)=R_2(t,x;\,t_1-1,x-1)\,G_z\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)R_1(t_1,x;\,\tau,s)+$$
$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}R_2(t,x;\,t_1-1,\beta-1)\,G_z\left(x,z^{\circ}(t_1,x)\right)R_1(t_1,\beta;\,\tau,s).$$

Используя представления (28), (29) по схеме, аналогичной схеме работ [20, 21], будем иметь:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\,\tau,s)f_u\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\delta u(\tau,s)\right)'\times$$

$$\times H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\ell=t_0}^{t-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}R(t,x;\,\ell,m)f_u\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell)\right)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}f_u'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\delta u'(\tau,s)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\;\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R'(t,x;\,\tau,s)H_{zz}\times\right.$$

$$\left.\times\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)R(t,x;\,\ell,m)\right\}\times$$

$$\times f_u\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta z(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\delta u'(\tau,s)H_{uz}\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s),\psi_1^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;\,t,x)\right)\times$$

$$\times f_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta u(t,x),$$

$$\delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\delta z(t_1,X)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta u'(\tau,s)f_u'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times R_1(t,X;\,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\times$$

$$\times R_1(t_1,X;\,\ell,m)f_u\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell),\qquad(30)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\beta_1(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\,\tau,s)\,f_u\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right)\delta u(\tau,s)\right)'\times$$

$$\times M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}Q(t,x;\,\ell,m)\,f\left(\ell,m,z^{\circ}(\ell,m),u^{\circ}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell)\right)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta u'(\tau,s)\,f_u'\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\,\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^{\circ}(t,x),v^{\circ}(t,x),\psi_2^{\circ}(t,x)\right)\right\}\times$$

$$\times f_u\left(\ell,m,z^{\circ}(\ell,m),u^{\circ}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell), \tag{31}$$

$$\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\delta u'(\tau,s)\,f\left(\tau,s,z^{\circ}(\tau,s),u^{\circ}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times Q'(t_2,X;\,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\times$$

$$\times\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}Q(t_2,X;\,\ell,m)\,f\left(\ell,m,z^{\circ}(\ell,m),u^{\circ}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell). \tag{32}$$

При помощи представления (30) получаем, что

$$\beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\circ}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)=$$

$$=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta v'(\tau,s)\,g_v'\left(\tau,s,y^{\circ}(\tau,s),v^{\circ}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times R_2'\left(t_2, X;\, \tau, s\right)\frac{\partial^2 \varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}\left(t_2, X\right)\right)}{\partial y^2}\times$$

$$\times R_2\left(t_2, X;\, \ell, m\right) g_v\left(\ell, m, y^{\mathrm{o}}\left(\ell, m\right), v^{\mathrm{o}}\left(\ell, m\right)\right)\delta v\left(m, \ell\right), \tag{33}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta v'\left(t,x\right)M_{vy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\beta_2\left(t,x\right)=$$

$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\delta v'\left(\tau,s\right)M_{vy}'\left(\tau,s,y^{\mathrm{o}}\left(\tau,s\right),v^{\mathrm{o}}\left(\tau,s\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(\tau,s\right)\right)R_2\left(\tau,s;\,t,x\right)\right]\times$$

$$\times g_v\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\delta v\left(t,x\right), \tag{34}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_2'\left(t,x\right)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\beta_2\left(t,x\right)=$$

$$=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta v'\left(\tau,s\right)g_v'\left(\tau,s,y^{\mathrm{o}}\left(\tau,s\right),v^{\mathrm{o}}\left(\tau,s\right)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\;\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'\left(t,x;\,\tau,s\right)\times\right.$$

$$\left.\times M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)R_2\left(t,x;\,\ell,m\right)\right\}\times$$

$$\times g_v\left(\ell,m,y^{\mathrm{o}}\left(\ell,m\right),v^{\mathrm{o}}\left(\ell,m\right)\right)\delta v\left(m,\ell\right). \tag{35}$$

Введем две матричные функции:

$$K\left(\tau,s,\ell,m\right)=\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\;\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_1'\left(t,x;\,\tau,s\right)\times$$

$$\times H_{zz}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),u^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_1^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)\times$$

$$\times R\left(t,x;\,\ell,m\right)-R_1'\left(t_1,X;\,\tau,s\right)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^{\mathrm{o}}\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z^2}R_1\left(t_1,X;\,\ell,m\right)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\;\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'\left(t,x;\,\tau,s\right)M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),v^{\mathrm{o}}\left(t,x\right),\psi_2^{\mathrm{o}}\left(t,x\right)\right)-$$

$$-Q'(t_2,X;\,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\,\ell,m);$$

$$L(\tau,s,\ell,m)=-R_2'(t_2,X;\,\tau,s)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^{\mathrm{o}}(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\,\ell,m)+$$

$$+\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\ \sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'(t_2,X;\,\tau,s)\times$$

$$\times M_{yy}\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)R_2(t_2,X;\,\ell,m).$$

Учитывая тождества (31)–(35) и выражения для $K(\tau,s,\ell,m)$, $L(\tau,s,\ell,m)$, неравенства (36), (37) можно переписать в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta u'(\tau,s)\,f_u'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)K(\tau,s,\ell,m)\times$$

$$\times f_u\left(\ell,m,z^{\mathrm{o}}(\ell,m),u^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)\delta u(m,\ell)+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\delta u'(\tau,s)H_{uz}'\left(\tau,s,z^{\mathrm{o}}(\tau,s),u^{\mathrm{o}}(\tau,s),\psi_1^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\times\right.$$

$$\left.\times R_1(\tau,s;\,t,x)\right]f_u\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x)\right)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^{\mathrm{o}}(t,x),u^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_1^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta u(t,x)\le 0;\quad (36)$$

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\delta v'(\tau,s)\,g_v'\left(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)\times$$

$$\times L(\tau,s,\ell,m)\,g_v\left(\ell,m,y^{\mathrm{o}}(\ell,m),v^{\mathrm{o}}(\ell,m)\right)+$$

$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\delta v'(\tau,s)M_{vy}'\left(\tau,s,y^{\mathrm{o}}(\tau,s),v^{\mathrm{o}}(\tau,s),\psi_2^{\mathrm{o}}(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;\,t,x)\right]\times$$

$$\times g_v\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta v(t,x)+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\delta v'(t,x)M_{vy}'\left(t,x,y^{\mathrm{o}}(t,x),v^{\mathrm{o}}(t,x),\psi_2^{\mathrm{o}}(t,x)\right)\delta v(t,x)\le 0.\quad (37)$$

Теорема 3. *Для оптимальности классической экстремали* (u°, v°) *необходимо, чтобы неравенства* (36), (37) *выполнялись для всех* $\delta u(t,x) \in R^r$ *при* $(t,x) \in D_1$ *и для всех* $\delta v(t,x) \in R^q$ *при* $(t,x) \in D_2$.

Заключение

В работе ставится и исследуется одна ступенчатая задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини – Маркезини. При помощи модифицированного варианта метода приращений получен аналог уравнения Эйлера. Затем, исходя из условия неотрицательности второй вариации критерия качества вдоль оптимального процесса, установлено явно выраженное через параметры рассматриваемой задачи необходимое условие оптимальности второго порядка при помощи методики работ [19, 21].

Авторы выражают глубокую благодарность уважаемому рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению первоначального варианта статьи.

Список литературы

1. Величенко В.В. Задачи оптимального управления с промежуточными условиями // Сб. «Исследования операций» / ВЦ АН СССР. – М.: Наука, 1974. – Вып. 4. – С. 126–145.

2. Габелко К.Н. Оптимизация многоэтапных процессов: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Иркутск, 1975. – 18 с.

3. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 6. – С. 32–36.

4. Кириченко С.В. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 4. – С. 104–111.

5. Магеррамов Ш.Ф., Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления // Выч. мат. и мат. физики. – 2001. – № 3. – С. 360–366.

6. Медведев В.А., Розова В.Н. Оптимальное управления ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 3. – С. 15–23.

7. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1976. – Vol. AC-21, № 4. – P. 484–492.

8. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. – Berlin, 1985.

9. Гайшун И.В., Хоанг Ван Куанг. Условия полной управляемости дискретных двухпараметрических систем // Дифференциальные уравнения. – 1991. – № 2. – С. 187–193.

10. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. – Минск: Изд-во ИМ НАН Белоруси, 1996. – 200 с.

11. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 175, № 1. – С. 17–19.

12. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информ. сб. тр. ВЦ Иркутского гос. ун-та. – Иркутск, 1968. – Вып. 2. – С. 87–104.

13. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференциальные уравнения. – 1978. – № 12. – С. 2190–2195.

14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. – Баку: Изд-во БГУ, 2013. – 151 с.

15. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Математическое и компьютерное моделирование. – 2011. – Вып. 5. – С. 162–179.

16. Насияти М.М. Условия оптимальности в ступенчатых дискретных двухпараметрических задачах управления: автореф. дис. … д-ра философии по математике. – Баку, 2015. – 22 с.

17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 576 с.

18. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высшая школа, 2005. – 335 с.

19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: URSS, 2013. – 256 с.

20. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. – 362 с.

21. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2013. – 363 с.

References

1. Velichenko V.V. Zadachi optimal'nogo upravleniya s promezhutochnymi usloviyami[Problems of optimal control with intermediate conditions] v.sb. Issledovaniya operatsiy . VTS. AN SSSR M Nauka, 1974, vyp. 4, p. 126-145.

2. Gabelko K.N. Optimizatsiya mnogoetapnykh protsessov [Optimization of multi-stage processes] avtoref. diss. na soisk. uch.stepeni kand. fiz.-mat. nauk. Irkust, 1975, 18 p.

3. Zakharov G.K. Optimizatsiya stupenchatykh sistem s upravlyaemimi usloviyami perekhoda [optimization of step-by-step systems with control over transition conditions] Avtomatika i telemekhanika, 1993, № 6, p. 32-36.

4. Kirichenko S.V. Optimal'noye upavleniye sistemami s promezhutochnymi fazovymi ogranicheniyami[optimum packing by systems with intermediate phase constraints] kibernetika i sistemnyy analiz. 1994. № 4, p. 104-111.

5. Magerramov Sh. F., Mansimov K.B. Optimizatsiya odnogo klassa diskretnykh stupenchatykh sistem upravleniya [optimization of a class of discrete step control systems] zhurn. vych. mat. i mat. fiziki., 2001, № 3, p. 360-366.

6. Medvedev V.A., Rozova V.N. Optimal'noye upravleniya stupenchatymi sistemami [optimum control of stepwise systems] avtomatika i telemekhanika, 1972, № 3, p. 15-23.

7. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans. Automat. Contr. 1976, vol. AC-21, № 4, pp. 484-492.

8. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.

9. Gayshun I.V., Khoang Van Kuang. Usloviya polnoy upravlyayemosti diskretnykh dvukhparametricheskikh sistem [Conditions for complete controllability of discrete two-parameter systems] Differents. uravneniya. 1991, № 2, p. 187-193.

10. Gayshun I.V. Mnogoparametricheskiye sistemy upravleniya [Multiparameter control systems] Minsk. Izd-vo IM NAN Belorusi. 1996, 200 p.

11. Vasil'yev O.V., Kirillova F.M. Ob optimal'nykh protsessakh v dvukhparametricheskikh diskretnykh sistemakh [On Optimal Processes in Two-Parameter Discrete Systems] Dokl. AN SSSR. 1967, v. 175, № 1, p. 17-19.

12. Vasil'yev O.V. K optimal'nym protsessam v nepreryvnykh i diskretnykh dvukhparametricheskikh sistemakh [To optimal processes in continuous and discrete two-parameter systems] Inform. sb. trudov vts. Irkutskogo Gosuniversiteta. Irkutsk. 1968, v. 2, p. 87-104.

13. Stepanyuk N.N. Nekotoryye zadachi upravlyayemosti i nablyudayemosti dvukhparametricheskikh diskretnykh sistem [Some problems of controllability and observability of two-parameter discrete systems] Differents. uravneniya. 1978, № 12, p. 2190-2195.

14. Mansimov K.B. Diskretnyye sistemy [Discrete systems] Baku. Izd-vo BGU, 2013, 151 p.

15. Mansimov K.B., Nasiyati M.M. Neobkhodimyye usloviya optimal'nosti v odnoy mnogoetapnoy diskretnoy zadache upravleniya [Necessary Optimality Conditions in a Multi-Stage Discrete Control Problem] Matem. i komp'yuternoye modelirovaniye. 2011, v. 5, p. 162-179.

16. Nasiyati M.M. Usloviya optimal'nosti v stupenchatykh diskretnykh dvukhparametricheskikh zadachakh upravleniya [Optimality conditions in stepwise discrete two-parameter control problems] avtoref. diss. na soisk. uch. stepeni doktora filosofii po matematike. Baku, 2015, 22 p.

17. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noye upravleniya[optimal control] M. Nauka, 1979, 576 p.

18. Demyanov V.F. Usloviya ekstrimuma i variatsionnyye ischisleniya [Extreme conditions and variational calculus] M. vysshchaya shkola, 2005, 335p.

19. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobyye optimal'nyye upravleniya [Special optimal controls] M. URSS. 2013, 256 p.

20. Mansimov K.B., Mardanov M.J. Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Gursa-Darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems] Baku, Izd-vo ELM. 2010, 362 p.

21. Mardanov M.J., Mansimov K.B., Melikov T.K. Issledovaniye osobykh upravleniy i neobkhodimyye usloviya optimal'nosti vtorogo

poryadka v sistemakh s zapazdyvaniyem[Investigation of special controls and necessary conditions for second-order optimality in systems with delay] Baku, Izd-vo «ELM», 2013, 363 p.

Получено 11.02.2018

Об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджан) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (Az1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Мамедова Туркан Фикрет кызы – аспирантка Института систем управления НАН Азербайджана, e-mail: kmansimov@mail.ru.

About the authors

Mansimov Kamil Bayramali (Baku, Azerbaijan) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Head of the Laboratory of Control with Complex Dynamic Systems, Institute of Control Problems of ANAS, (9, B. Vahabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com).

Mamedova Turkan Fikret (Baku, Azerbaijan) – Postgraduate Student, Institute of Control Systems of ANAS (9, B. Vahabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan, e-mail: kmansimov@mail.ru).