DOI: 10.15593/2499-9873/2018.2.02
УДК 517.92

Д.Л. Горбунов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМОЙ В КВАДРАТУРАХ

Рассматривается система двух нелинейных дифференциальных уравнений, для которой найден прием, позволяющий представить ее решение в виде квадратур. Полученные результаты применены к исследованию двух математических моделей, одна из которых описывает конъюнктуру рынка труда в случае замкнутой моноотраслевой экономики, вторая имеет гидродинамическое происхождение.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, интегрируемость в квадратурах, математическая модель конъюнктуры рынка труда, модель турбулентности жидкости.

D.L. Gorbunov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS INTEGRABLE IN QUADRATURES

We consider a system of two nonlinear differential equations, for which we found an approach allowing to represent a solution in the form of quadratures. The obtained results are applied to the investigation of two mathematical models. One of them describes labor market conditions in the case of closed mono-branch economy. The other model has hydrodynamic origin.

Keywords: system of differential equations, integrability in quadratures, mathematical model of labor market conditions, model of liquid turbulence.

Введение

Если задачу об отыскании всех решений системы дифференциальных уравнений удается свести к вычислению конечного множества интегралов от элементарных функций и к алгебраическим операциям над ними, то говорят, что система *интегрируема в квадратурах.* В начальный период развития теории под решением дифференциальных уравнений понимали именно интегрирование в квадратурах. Позже, когда выяснилось, что решение в этом смысле существует лишь для немногих типов уравнений и систем, «центр тяжести» теории был перенесен на изучение общих закономерностей поведения решений, а для их построения стали широко применяться приближенные и численные методы.

Тем не менее существует немало важных задач (см. [1–4]), решить которые удалось за счет интегрирования в квадратурах. Каждая система дифференциальных уравнений (в особенности являющаяся математической моделью реального физического процесса) обладает рядом специфических особенностей, учет которых может существенно упростить исследование, а иногда и дать возможность найти точное аналитическое решение.

1. Построение решения системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t, x, y)x + ax + by, \\ \dot{y}(t) = \varphi(t, x, y)y + px + qy, \end{cases} \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где φ – однородная функция порядка μ, т.е. $\varphi(t, \lambda x, \lambda y) = \lambda^{\mu}\varphi(t, x, y)$ при любом вещественном λ, а a, b, p, q – произвольные вещественные числа.

Предполагаем, что функция φ удовлетворяет условиям, при которых задача Коши для системы (1) однозначно разрешима.

Покажем, что общее решение системы (1) может быть выражено в квадратурах. Система (1) имеет очевидное тривиальное решение $x(t) = y(t) \equiv 0$, которое реализуется только при нулевых начальных условиях. Далее мы исключаем его из рассмотрения и предполагаем, что хотя бы одно из начальных условий отлично от нуля. Ради определенности пусть $y(0) \neq 0$.

Умножим уравнение для $\dot{x}$ на y, а уравнение для $\dot{y}$ на x, вычтем второе уравнение системы (1) из первого и разделим полученную разность на y^2:

$$\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y^2} = \frac{(a-q)xy + by^2 - px^2}{y^2}.$$

Используя формулу для производной частного и обозначая $x/y = z$, получаем дифференциальное уравнение *в разделяющихся переменных* [5]:

$$\dot{z} = -pz^2 + (a-q)z + b. \qquad (2)$$

Правая часть уравнения (2) – квадратный трехчлен. Исследуем его свойства. Квадратное уравнение

$$-pz^2 + (a-q)z + b = 0 \qquad (3)$$

имеет дискриминант $D = (a-q)^2 + 4pb$, от знака которого зависит вид решений уравнения (2). Рассмотрим три случая.

***Случай 1*: $D > 0$**. Уравнение (3) имеет два различных вещественных корня, z_1 и z_2, трехчлен (3) разлагается на линейные множители и уравнение (2) интегрируется в элементарных функциях $\frac{1}{z_1 - z_2}\ln\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = -pt + c_1$. Раскрывая модуль и переобозначая произвольные постоянные, получаем, что общее решение уравнения (2) имеет вид

$$z(t) = \frac{C_1 z_2 - z_1 e^{-\omega t}}{C_1 - e^{-\omega t}}, \qquad (4)$$

где $\omega = p\left(z_2 - z_1\right)$. Постоянная C_1 определяется из начального условия $z(0) = z_0$, если $z_0 \neq z_2$. Если же $z_0 = z_2$, то (2) имеет особое решение: $z(t) \equiv z_2$.

Случай 2: $D = 0$. Уравнение (3) имеет кратный вещественный корень z^*, т.е. трехчлен является точным квадратом $-p\left(z - z^*\right)^2$, и уравнение (2) интегрируется в элементарных функциях: $\left(z - z^*\right)^{-1} =$ $= pt + C_1$. Общее решение уравнения (2) в этом случае имеет вид

$$z(t) = z^* + \frac{1}{pt + C_1}. \qquad (5)$$

Постоянная C_1, так же как и в случае 1, определяется из начального условия $z(0) = z_0$, если $z_0 \neq z^*$. Если $z_0 = z^*$, то (2) имеет особое решение: $z(t) \equiv z^*$.

Случай 3: $D < 0$. Уравнение (3) имеет два комплексно-сопряженных корня. Общее решение уравнения (2) в этом случае имеет вид

$$z(t) = \frac{a-q}{2p} + \omega\,\mathrm{tg}\left(C_1 - \omega pt\right), \tag{6}$$

где $\omega = \sqrt{-D}\big/2p$. Постоянная C_1 определяется из начального условия $z(0) = z_0$. Особых решений в этом случае у уравнения (2) нет.

Подставляя во второе уравнение системы (1) $x = zy$, где функция $z(t)$ – в зависимости от знака D – определена равенствами (4), (5) или (6), и используя однородность функции φ, получаем для определения функции $y(t)$ уравнение Бернулли [5]:

$$\dot{y}(t) - (pz+q)\,y = y^{\mu+1}\phi(t), \tag{7}$$

где $\phi(t) = \varphi(t, z(t), 1)$. Решение уравнения (7) представимо в виде $y(t) = \xi(t)\zeta(t)$, где $\xi(t) = \exp\left(qt + p\int\limits_0^t z(s)ds\right)$, а ζ определяется из уравнения $\dot{\zeta} = \zeta^{\mu+1}(t)\xi(t)\phi(t)$. Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\zeta(t) = \begin{cases} \left(C - \mu\int\limits_0^t \xi(s)\phi(s)ds\right)^{-1/\mu}, & \text{если } \mu \neq 0, \\ \exp\left(\int\limits_0^t \xi(s)\phi(s)ds + C\right), & \text{если } \mu = 0. \end{cases}$$

Поскольку $y(t) = \xi(t)\zeta(t)$, а $x(t) = \xi(t)\zeta(t)z(t)$, функции ξ и ζ представимы в виде квадратур, а функция z во всех рассмотренных выше случаях выражается через элементарные функции, то тем самым мы установили, что решение системы (1) представимо в виде квадратур.

Покажем, что результаты раздела 1 можно применить к исследованию математических моделей, при описании которых возникает система вида (1).

2. Математическая модель конъюнктуры рынка труда

В работе [6] предложена математическая модель конъюнктуры рынка труда, имеющая вид системы трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \left(\dfrac{A - M\alpha(t)}{N} \right) \left(\gamma(t) + k\beta(t) \right), \\ \dot{\beta}(t) = \left(\dfrac{B - M\beta(t)}{N} \right) \left(\gamma(t) + k\beta(t) \right) - k\beta(t), \\ \dot{\gamma}(t) = \left(\dfrac{G - M\gamma(t)}{N} \right) \left(\gamma(t) + k\beta(t) \right) - \gamma(t). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\alpha(t)$ – доля специалистов высокой категории от общего числа трудоустроенных субъектов; $\beta(t)$ – доля специалистов средней категории от общего числа трудоустроенных субъектов; $\gamma(t)$ – доля специалистов низкой категории от общего числа трудоустроенных субъектов; M – общее количество трудоустроенных граждан; N – общее количество безработных; A – общее количество специалистов высокой категории на рынке труда; B – общее количество специалистов средней категории; G – общее количество специалистов низкой категории; k – коэффициент подготовки кадров, причем $k \in (0;1]$. Отметим, что $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ – неизвестные функции от времени; A, B, G, M, N – положительные константы. Кроме того, из определения функций $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ следует, что

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) \equiv 1. \tag{9}$$

Второе и третье уравнение системы (8) не содержат $\alpha(t)$, значит, их можно рассматривать как самостоятельную систему относительно двух неизвестных функций $\beta(t), \gamma(t)$. Функция $\alpha(t)$ определяется через них из соотношения (9), следовательно, первое уравнение системы (8) можно отбросить, оно эквивалентно тождеству (9). Осталось исследовать систему

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \left(\dfrac{B - M\beta}{N} \right) \left(\gamma + k\beta \right) - k\beta, \\ \dot{\gamma} = \left(\dfrac{C - M\gamma}{N} \right) \left(\gamma + k\beta \right) - \gamma. \end{cases} \tag{10}$$

Для компактности записи обозначим в системе (10) $M/N = m$, $B/N = b$, $G/N = g$ и введем новые переменные: $m\beta = x$, $m\gamma = y$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\left(y + kx\right)x + k(b-1)x + by, \\ \dot{y} = -\left(y + kx\right)y + gkx + (g-1)y, \end{cases} \tag{11}$$

которая является частным случаем системы (1) при $a = k(b-1)$, $b = b$, $p = gk$, $q = g-1$ и $\varphi(t, x, y) = -\left(y + kx\right)$. Проверяем условие однородности, получаем $\varphi(t, \lambda x, \lambda y) = -\left(\lambda y + k\lambda x\right) = -\lambda\left(y + kx\right) = \lambda\varphi(t, x, y)$, следовательно, φ есть однородная функция порядка 1. Легко видеть, что

$$D = (1 - k + kb - g)^2 + 4kgb > 0\,, \tag{12}$$

так как по физическому смыслу задачи $k > 0,\ g > 0,\ b > 0.$ Следовательно, мы в условиях случая 1. Из формул представления решения системы (1) при $\mu = 1$ получаем решение системы (11) в виде квадратур:

$$x(t) = \frac{y_0 z(t) u(t)}{y_0 \int\limits_0^t (1 + kz(s))u(s)ds + 1}, \quad y(t) = \frac{y_0 u(t)}{y_0 \int\limits_0^t (1 + kz(s))u(s)ds + 1}. \tag{13}$$

Здесь $z(t)$ определяется равенством (4), $u(t) = \left|\dfrac{C - e^{-\omega t}}{C - 1}\right| e^{(g-1+z_2 kg)t}$, $\omega = \sqrt{D}$, где D вычисляется по формуле (12), а z_1 и z_2 – меньший и больший корни квадратного уравнения $-kgz^2 + (1 - k + kb - g)z + b = 0$, $C = \dfrac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}.$

Возвращаясь к исходным обозначениям, находим решение системы (8):

$$\beta(t) = x(t)/m,\ \ \gamma(t) = y(t)/m,\ \ \alpha(t) = 1 - \beta(t) - \gamma(t).$$

На основе формул (13) в работе [6] показано, что решение системы (8) продолжаемо на всю полуось, неотрицательно и имеет два равновесных состояния – тривиальное и нетривиальное.

3. Система Лэнгфорда

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, имеющую гидродинамическое происхождение.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\nu - 1)x_1 - x_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\nu - 1)x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_3 = \nu x_3 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right). \end{cases} \tag{14}$$

В работе [7] Э. Хопфом была предложена модель турбулентности жидкости, представляющая собой счетномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее полное исследование было сопряжено с большими техническими трудностями. Предложенная Лэнгфордом [8] система (14) представляет собой упрощенный вариант системы Хопфа, но ее решения сохраняют богатый набор асимптотических свойств.

Используя результаты раздела 1, покажем, что система (14) имеет периодические решения.

Рассмотрим первые два уравнения системы (14), считая x_3 пока неизвестной фиксированной функцией:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\nu - 1)x_1 - x_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (\nu - 1)x_2 + x_2x_3. \end{cases} \tag{15}$$

Система (15) является частным случаем системы (1), где функция $\varphi\left(t, x_1, x_2\right) = x_3(t)$, т.е. является однородной функцией порядка $\mu = 0$; $a = \nu - 1$, $b = -1$, $p = 1$, $q = \nu - 1$.

Поскольку $D = (a - q)^2 + 4bp = -4 < 0$, то мы находимся в условиях случая 3. Из формулы (6) получаем $\dfrac{x_1(t)}{x_2(t)} = \mathrm{tg}(C - t)$, или $\dfrac{x_1(t)}{\sin(C - t)} =$ $= \dfrac{x_2(t)}{\cos(C - t)} = R(t)$. Поскольку наша цель – найти периодическое решение системы (14), то необходимо, чтобы функция R была периодической с периодом, кратным 2π. В частности, такой функцией может быть постоянная $R(t) \equiv R$, если удастся подобрать ее так, чтобы функция x_3 также оказалась периодической.

Подставляя $x_1(t) = R\sin(C - t)$, $x_2(t) = R\cos(C - t)$ в любое из уравнений системы (15), получаем:

$$-R\cos(C - t) = (\nu - 1)R\sin(C - t) - R\cos(C - t) + x_3(t)R\sin(C - t),$$

откуда $x_3(t) = 1 - \nu$. Подстановка в третье уравнение системы (14) дает $0 = \nu(1-\nu) - \nu^2 - R^2$, следовательно, $R = \pm\sqrt{(1-\nu)(2\nu-1)}$. Для вещественности R необходимо и достаточно, чтобы $1/2 \le \nu \le 1$.

Таким образом, если $1/2 \le \nu \le 1$, то система (14) имеет однопараметрическое периодическое решение вида

$$x_1(t) = \pm\sqrt{(1-\nu)(2\nu-1)}\,\sin(C-t),\ x_2(t) = \pm\sqrt{(1-\nu)(2\nu-1)}\,\cos(C-t),$$

$$x_3(t) = 1 - \nu.$$

Легко видеть, что $x_1^2(t) + x_2^2(t) = R^2$ при всех $t \ge 0$, следовательно, если $|x_1(0)| \le |R|$, $|x_2(0)| \le |R|$, то постоянная C однозначно определяется: поскольку $x_1(0) = R\sin C$, $x_2(0) = R\cos C$, то C – угол между осью x_2 и начальным вектором $\{x_1(0), x_2(0)\}$. Знак R определяет направление движения точки от начального положения и не меняет вид кривой.

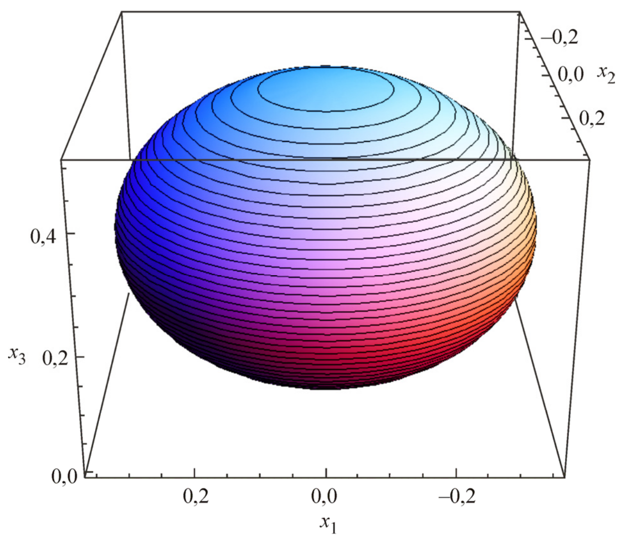

Рис. Периодические решения системы (14)

На рисунке периодические решения изображены тонкими черными линиями. Множество таких решений образует поверхность эллипсоида вращения $x_1^2 + x_2^2 + 2\left(x_3 - 1/4\right)^2 = 1/8$. Точка $(0,0,0)$ задает тривиальное решение, все остальные сечения образуют нетривиальные решения. Точка $(0,0,1/2)$ соответствует стационарному решению: $x_1(t)=0,\ x_2(t)=0,\ x_3(t)=1/2$.

Заключение

Изученный в работе класс нелинейных систем дифференциальных уравнений оказался применим к двум различным математическим моделям: одна из них возникает при моделировании замкнутой модели экономики, вторая – при моделировании турбулентности жидкости. Автор не исключает других возможностей применения полученных результатов, так как представление решения системы дифференциальных уравнений в виде квадратур позволяет провести полное исследование ее свойств.

Список литературы

1. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование / пер. с франц. О.Н. Бондаренко; под ред. и с послесл. Ю.М. Свирежева. – М.: Наука, 1976. – 287 с.
2. Gause G.F. The struggle for existence. – N.Y.: Hafner, 1934. – 163 p.
3. Мальтус Т.Р. Опыт закона о народонаселении. – Петрозаводск: Петроком, 1993. – 136 с.
4. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии / НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. – Ижевск, 2002. – 232 с.
5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука: Физматлит, 1998. – 232 с.
6. Горбунов Д.Л. Об одной замкнутой моноотраслевой модели конъюнктуры рынка труда // Вестник ПГУ. Сер. «Экономика». – 2018. (В печати.)
7. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. – 1948. – № 1. – P. 303–322.
8. Hassard B., Kazarinoff N., Wan Y. Theory and applications of Hopf bifurcation rozhdeniya cikla. – Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1981. – 280 p.

References

1. Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie. Per. s franc. O. N. Bondarenko. Pod red. i poslesloviem YU. M. Svirezheva. M.: Nauka, 1976. 287 c.
2. Gause G.F. The struggle for existence. N. Y.: Hafner, 1934. 163 p.
3. Mal'tus T.R. Opyt zakona o narodonaselenii. Petroza-vodsk: Petrokom, 1993. 136 s.
4. Riznichenko G.YU. Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii. Izhevsk: NIC Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, 2002. 232 s.
5. Tihonov A.N., Vasil'eva A.B., Sveshnikov A.G. Differencial'nye uravneniya. M., Nauka, Fizmatlit, 1998. 232 s.
6. Gorbunov D.L. Ob odnoj zamknutoj monootraslevoj modeli kon"yunktury rynka truda. Vestnik PGU, ser. «Ekonomika», 2018 (v pechati).
7. Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence. – Comm. Pure Appl. Math., 1948, №1. P. 303-322.
8. Hassard B., Kazarinoff N., Wan Y. Theory and applications of Hopf bifurcation rozhdeniya cikla. Cambridge, Cambridge Univer. Press, 1981. 280 p.

Получено 17.03.2018

Об авторе

Горбунов Даниил Львович (Пермь, Россия) – магистрант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru).

About the author

Daniil L. Gorbunov (Perm, Russian Federation) – Master Student, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: call-of-monolit@yandex.ru).