DOI: 10.15593/2499-9873/2018.1.01
УДК 517.929

Л.А. Федотова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

Для линейного уравнения нейтрального типа $m(t)x'(t)+p(t)x'(h(t))+(Kx)(t)=f(t)$, $t\in$ [*a*, *b*], получены условия разрешимости задачи Коши. Допускается, что коэффициент $m(\cdot)$ на отрезке [*a*, *b*] может равняться нулю на множестве положительной меры (вырожденный случай).

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, задача Коши, теорема существования.

L.A. Fedotova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON A LINEAR NEUTRAL-TYPE EQUATION IN A DEGENERATE CASE

For the linear neutral-type equation, $m(t)x'(t)+p(t)x'(h(t))+(Kx)(t)=f(t)$, $t\in$ [*a*, *b*], solvability conditions for the Cauchy problem are obtained. It is allowed that the coefficient, $m(\cdot)$, can be zero on a positive-measure set of [*a*, *b*] (the degenerate case).

Keywords: neutral-type equation, Cauchy problem, theorem of existence.

1. Рассмотрим уравнение

$$m(t)x'(t)+p(t)x'(h(t))+(Kx)(t)=f(t)\,,\ t\in[a,b], \tag{1}$$

и исследуем вопрос о существовании решения, удовлетворяющего начальному условию $x(a)=x_0$, в пространстве абсолютно непрерывных функций. Будем предполагать, что: $h([a,b])\subset[a,b]$, функции $m,p:[a,b]\to R^1$ измеримы и ограничены в существенном, K – линейный оператор. В предлагаемой работе рассматривается случай, когда носитель $dom(m)\le b-a$, т.е. допускается, что коэффициент первого слагаемого может обращаться в нуль на множестве положительной меры. В этом и заключается вырожденный случай рассматриваемого уравнения.

Пусть $E=[a,b]\subset R^1=(-\infty,\infty)$. Через L_2 обозначим пространство функций $y:E\to R^1$, суммируемых по Лебегу с квадратом, с нормой $\|y\|_2=\left(\int\limits_E |y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$; L_∞ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $y:E\to R^1$ с нормой $\|y\|_\infty=\operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in E}|y(t)|$. Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию, будем искать в пространстве D_2 таких абсолютно непрерывных функций $x:E\to R^1$, что $x'\in L_2$, с нормой $\|x\|_D=|x(a)|+\|x'\|_2$.

2. В этом пункте напомним необходимые сведения об операторе внутренней суперпозиции и сформулируем вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем. В данной работе систематически используются понятия, связанные с мерой Лебега, в частности производная Радона – Никодима. Приводимые здесь сведения можно найти в монографиях [1–3] и работах [4, 5]. Определение производной Радона – Никодима можно найти в [2], условия ограниченного действия оператора суперпозиции – в [5], а в работе [4] подробно излагаются сведения, относящиеся к мере $\mu(e)$.

Пусть $m(e)$ – мера Лебега измеримого множества $e\subset R^1$ относительно функции h, будем предполагать, что из $m(e)=0$ следует $m\left(h^{-1}(e)\right)=0$. Определим функцию множества $\mu(e)=m\left(h^{-1}(e)\right)$ и пусть существует такая суммируемая функция $\mu'(\cdot)$, что

$$\mu(e)=\int\limits_e \mu'(s)\,ds,\ e\subset E.$$

Функция $\mu'(\cdot)$ называется производной Радона – Никодима функции множества μ. Отметим, что

$$\mu'(s)=\lim_{\substack{m(e)>0\\ m(e)\to 0}}\frac{\mu(e)}{m(e)},$$

где e – отрезок, содержащий точку s.

Предположим, что существует такая измеримая функция h^{-1}, что почти всюду выполняются равенства $h^{-1}(h(t))=t$, $t\in E$, и

$h\left(h^{-1}(\tau)\right)=\tau,\ \ \tau\in h(E)$. Следующие утверждения доказываются с применением формулы замены в интеграле Лебега:

1) пусть $\left|p\left(h^{-1}(\tau)(\mu'(\tau)\right)^{1/2}\right|\le r$ почти всюду. Тогда оператор $S: L_2\to L_2$, $(Sy)(t)=p(t)y(h(t))$ (называемый оператором внутренней суперпозиции, оператором сдвига, композиционным оператором) ограничен;

2) оператор $S^*: L_2\to L_2$, сопряженный с оператором $S: L_2\to L_2$, имеет вид

$$\left(S^*\omega\right)(\tau)=\begin{cases}p\left(h^{-1}(\tau)\right)\mu'(\tau)\omega\left(h^{-1}(\tau)\right), \tau\in h(E),\\ 0,\quad \tau\notin h(E).\end{cases}$$

Положим $M: L_2\to L_2$, $(My)=m(t)y(t)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия: 1) $|m(t)|\le m_0$, $t\in E$, 2) $\mu'(t)\ge\mu_0$, $t\in h(E)$, 3) $|p(t)|\ge p_0$, $t\in E$. Тогда справедливо неравенство

$$\left\|(M+S)^*\omega\right\|_2\ge\left(p_0\sqrt{\mu_0}-m_0\right)\|\omega\|_2,\ \omega\in L_2.$$

Доказательство. Пусть $\omega\in L_2$ – произвольный элемент. Имеем

$$\left\|(M+S)^*\omega\right\|_2\ge\left\|S^*\omega\right\|_2-\left\|M^*\omega\right\|_2.$$

Неравенство $\left\|M^*\omega\right\|_2\le m_0\|\omega\|_2$ очевидно. Для оценки снизу $\left\|S^*\omega\right\|_2$ преобразуем квадрат этого выражения посредством замены переменной в интеграле

$$\left\|S^*\omega\right\|_2=\int\limits_{h(E)}(\mu'(s)p(h^{-1}(s))\omega(h^{-1}(s)))^2\,ds=\int\limits_E\mu'(h(t))(p(t)\omega(t))^2dt.$$

Подробности преобразования интеграла после замены $s=h(t)$ изложены в [4]. В условиях теоремы теперь нетрудно установит оценку $\left\|S^*\omega\right\|_2\ge p_0\sqrt{\mu_0}\,\|\omega\|_2$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $m_0 < p_0\sqrt{\mu_0}$, то в условиях теоремы 1 оператор $(M+S): L_2 \to L_2$ имеет ограниченный правый обратный.

Оператору $K: D_2 \to L_2$ поставим в соответствие оператор $K_0 : L_2 \to L_2$, определенный равенством

$$K_0 y = K\left(\int_a^t y(s)\,ds\right).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, выполнено неравенство $m_0 + \|K_0\| < p_0\sqrt{\mu_0}$. Тогда задача Коши для уравнения (1) имеет хотя бы одно решение для произвольных $f \in L_2$, $x_0 \in R^1$.

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение

$$\left(M + S + K_0\right) y = f\ , \tag{2}$$

полученное из уравнения (1). Полагая $y = x'$, докажем, что уравнение (2) имеет хотя бы одно решение $y \in L_2$ для произвольного элемента $f \in L_2$. Отсюда и будет следовать разрешимость задачи Коши для уравнения (1). Поскольку условия теоремы (1) выполнены, оценим снизу

$$\left\|\left(M + S + K_0\right)^* \omega\right\|_2$$

для произвольного $\omega \in L_2$.

С учетом утверждений теоремы 1 можно получить оценку

$$\left\|\left(M + S + K_0\right)^* \omega\right\|_2 \geq \left(m_0\sqrt{\mu_0} - m_0 - \|K_0\|\right)\|\omega\|_2 .$$

Теорема доказана.

В качестве применения теоремы 2 рассмотрим задачу

$$\begin{cases} m(t)x'(t) + p(t)x'(h(t)) + d(t)x\left(g\left(t\right)\right) = f(t), \quad t \in [0;T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

сохранив прежние предположения на $m(t), p(t), h(t)$. Будем предполагать, что $d \in L_\infty$ и $g : E \to R^1$ – такая измеримая функция, что $g(t) \le t$.

Следствие теоремы 2. Если выполнено неравенство $m_0 + \sqrt{T}\,\|d\|_\infty < p_0\sqrt{\mu_0}$, то задача (3) имеет хотя бы одно решение при произвольных $f \in L_2$, $x_0 \in R^1$.

Замечание 2. Отметим, что в условиях приведенных теорем не участвует «мера вырожденности» коэффициента $m(t)$, т.е. мера множества $E \setminus dom(m)$. Это объясняется тем, что при соответствующих предположениях оператор $S : L_2 \to L_2$ является сюръективным, и поэтому разрешимость задачи Коши для уравнения (1) зависит только от оператора S.

В заключение отметим, что при дополнительном предположении о существовании конечной производной функции $h(t)$ для нахождения производной Радона – Никодима можно воспользоваться следующей формулой:

$$\mu'(t) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(t)\right)} = \left.\frac{1}{h'(s)}\right|_{s=h^{-1}(t)}.$$

Например, для функции $h(t) = |2t-1|$, $t \in [0;1]$ имеем $\mu'(t) = \frac{1}{2}$.

Библиографический список

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 280 с.

2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1972. – 895 с.

3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

4. Абдуллаев А.Р. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций. – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1981. – 20 с.

5. Драхлин М.Е. Оператор внутренней суперпозиции в пространствах суммируемых функций // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 17–24.

References

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F. Vvedenie v teoriyu funkcional'no-differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1982. 280 s.
2. Danford N., SHvarc Dzh.T. Linejnye operatory. Obshchaya teoriya. M.: IL, 1972. 895 s.
3. Natanson I.P. Teoriya funkcij veshchestvennoj peremennoj. M.: Nauka, 1974. 480 s.
4. Abdullaev A.R. Operator vnutrennej superpozicii v prostranstvah summiruemyh funkcij. M.: Izd-vo VINITI, 1981. 20 s.
5. Drahlin M.E. Operator vnutrennej superpozicii v prostranstvah summiruemyh funkcij // Izvestiya vuzov. Matematika. 1986. № 5. S. 17-24.

Получено 16.02.2018

Об авторе

Федотова Людмила Анатольевна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Прикладная математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: olga@pstu.ru).

About the author

Lyudmila A. Fedotova (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: olga@pstu.ru).