DOI: 10.15593/2499-9873/2018.1.02
УДК 517.929

А.С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

О СВЯЗИ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ РЕШЕНИЕМ И ФУНКЦИЕЙ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа. Для данного уравнения выведены формулы, связывающие фундаментальное решение и функцию Коши, на основе которых исследуется асимптотическое поведение решений указанного уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, уравнение нейтрального типа, фундаментальное решение, функция Коши, асимптотическое поведение.

A.S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON RELATIONSHIP BETWEEN THE FUNDAMENTAL SOLUTION AND THE CAUCHY FUNCTION FOR NEUTRAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider a linear autonomous neutral functional differential equation. We obtain formulas relating the fundamental solution and the Cauchy function for this equation. On the basis of the formulas the asymptotic behavior of solutions of the equation is studied.

Keywords: functional differential equation, neutral equation, the fundamental solution, the Cauchy function, asymptotic behavior.

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\Delta = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\right\}$, χ – характеристическая функция множества $\mathbb{R}_+$, $C[0,l]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0,l]$ функций.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t)-\sum_{j=1}^{J} a_j\dot{x}\left(t-h_j\right)=\int_0^{\omega} x\left(t-s\right)dr\left(s\right)+f(t)\,, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $J\in\mathbb{N}$, $a_j=\mathrm{const}\in\mathbb{C}$, $h_j=\mathrm{const}\in\mathbb{R}_+$, функция $r:[0,\omega]\to\mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, $r\left(0\right)=0$, функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ суммируема на каждом конечном отрезке. При отрицательном значении аргумента x и $\dot{x}$ доопределим начальными функциями φ и ψ, не зависящими друг от друга; требования «непрерывной стыковки» $x\left(0\right)=\varphi\left(0\right)$ и $\dot{x}\left(0\right)=\psi\left(0\right)$ также не считаются обязательными. Функция $\int_t^{\omega}\varphi\left(t-s\right)dr\left(s\right)$ суммируема на $[0,\omega]$.

Заметим, что при $t\in[0,\omega]$ уравнение (1) понимается следующим образом:

$$\dot{x}\left(t\right)-\sum_{j=1}^{J} a_j\dot{x}\left(t-h_j\right)=\int_0^{t} x\left(t-s\right)dr\left(s\right)+f\left(t\right)+f_{\varphi}\left(t\right),$$

$$f_{\varphi}\left(t\right)=\int_t^{\omega}\varphi\left(t-s\right)dr\left(s\right).$$

Следуя [1], сделаем замену переменных, которая дает возможность отнести начальные функции к внешнему возмущению f. Это позволяет считать, что на отрицательной полуоси обе функции, x и $\dot{x}$, доопределены нулем.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t)=X(t)x(0)+\int_0^{t} C(t,s)f(s)ds\,, \tag{2}$$

где $X:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$ называется *фундаментальным решением*, а $C:\Delta\to\mathbb{C}$ – *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулем фундаментальное решение на отрицательной полуоси, а функцию Коши – вне множества Δ.

Для автономного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, между его фундаментальным решением и функцией Коши существует простая зависимость ([2], с. 116):

$$C(t,s) = X(t-s). \tag{3}$$

Равенство (3) упрощает исследование неоднородных уравнений, сводя любую задачу к изучению соответствующих свойств функции X.

Как показывают простые примеры [3], для уравнений нейтрального типа формула (3) неверна, и вопрос о связи между фундаментальным решением и функцией Коши был и остается одним из важнейших (см., например, [1], с. 83–84).

Существенное продвижение в этом вопросе было достигнуто в работе [3], где для уравнения *с соизмеримыми запаздываниями*

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^{J} a_j \dot{x}\left(t - jh\right) = \sum_{m=0}^{M} b_m \dot{x}\left(t - mh\right) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

методом производящих функций была получена формула, связывающая фундаментальное решение и функцию Коши. Как и ожидалось, эта формула позволила преодолеть ряд трудностей, возникающих при исследовании асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно производной [4–6].

Цель настоящей работы – обобщение результатов работы [3] на уравнение (1): найти связь между фундаментальным решением и функцией Коши этого уравнения.

1. Вспомогательные утверждения

«Функцией скачков» будем называть кусочно-постоянную функцию, имеющую конечное количество скачков (разрывов первого рода) на каждом конечном отрезке в фиксированных точках и непрерывную слева. Пусть $\left[0,l\right]$ – произвольный отрезок, $P\left[0,l\right]$ – пространство функций, представимых в виде суммы непрерывной на $\left[0,l\right]$ функции и функции скачков. Очевидно, что $P\left[0,l\right]$ является линейным пространством с естественными операциями сложения и умножения на число.

Определим операторы S, A, C, R по следующим правилам:

$$(Sy)(t)=\sum_{j=1}^{J}a_j y\left(t-h_j\right),\ (Ay)(t)=\int_0^{\omega}y(t-s)\,dr(s),$$

$$(Cy)(t)=\int_0^{t}y(s)\,ds,\ (Ry)(t)=\int_0^{\omega}y(t-s)\,r(s)\,ds.$$

Области определения и множества значений операторов S, A, C, R характеризуются нижеследующим утверждением.

Утверждение 1. *Операторы* S, A, C, R *действуют в следующих пространствах*: $S:P[0,l]\to P[0,l]$, $A:C[0,l]\to P[0,l]$, $C,R:P[0,l]\to C[0,l]$.

Зафиксируем произвольное $\alpha\in\mathbb{R}$ и введем норму в пространстве $P[0,l]$:

$$\|x\|_{\alpha}=\sup_{t\in[0,l]}\left|x(t)e^{-\alpha t}\right|.$$

Покажем, что операторы S, A, C и R ограничены:

$$\|Sy\|_{\alpha}\le\left(\sum_{j=1}^{J}\left|a_j\right|e^{-\alpha h_j}\right)\|y\|_{\alpha},\ \|Ay\|_{\alpha}\le\left(\int_0^{\omega}e^{-\alpha s}\left|dr(s)\right|\right)\|y\|_{\alpha},$$

$$\|Cy\|_{\alpha}\le\sup_{t\in[0,l]}\left(\int_0^{t}e^{-\alpha(t-s)}\,ds\right)\|y\|_{\alpha}=\sup_{t\in[0,l]}\left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)\|y\|_{\alpha},$$

$$\|Ry\|_{\alpha}\le\sup_{t\in[0,l]}\left(\int_0^{\omega}e^{-\alpha s}r(s)\,ds\right)\|y\|_{\alpha}=\sup_{t\in[0,\omega]}\left|r(t)\right|\sup_{t\in[0,l]}\left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)\|y\|_{\alpha}.$$

Для норм операторов, действующих из $\left(P[0,l],\|\cdot\|_{\alpha}\right)$ в себя, будем использовать обозначение $\|\cdot\|$. Отметим, что выбор величины α позволяет манипулировать величиной нормы операторов R, C, так как при $\alpha\to+\infty$ нормы $\|R\|,\|C\|\to 0$.

Несложно убедиться, что пространство $\left(P[0,l],\|\cdot\|_{\alpha}\right)$ является банаховым.

В разделах 2 и 3 нам понадобится следующая известная теорема об обратном операторе [7, с. 224–230]. Через E здесь и далее будем обозначать тождественный оператор.

Утверждение 2. *Пусть* B *– банахово пространство*, $T:\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ *– линейный ограниченный оператор*, *причем* $\|T\|<1$. *Тогда существует линейный ограниченный оператор* $\left(E-T\right)^{-1}:\mathrm{B}\to\mathrm{B}$, *и при любом* $f\in\mathrm{B}$ *уравнение* $z=Tz+f$ *имеет в* B *единственное решение* $z=\left(E-T\right)^{-1}f$.

Перепишем уравнение (1) в операторном виде (с учетом договоренностей из введения):

$$\dot{x}(t)-\left(S\dot{x}\right)(t)=\left(Ax\right)\left(t\right)+f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Далее вместо уравнения (1) будем использовать эквивалентный вид (5).

2. Фундаментальное решение

Из формулы (2) следует, что функция X определяется как решение следующего уравнения:

$$\dot{X}\left(t\right)-\left(S\dot{X}\right)\left(t\right)=\left(AX\right)\left(t\right),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{6}$$

дополненного начальным условием $X(0)=1$, $\dot{X}(0)=0$.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Функция* $\dot{X}\in P\left[0,l\right]$ *при любом* l.

2. *Существуют* $\alpha\in\mathbb{R}$, $N_1,N_2\in\mathbb{R}_+$ *такие*, *что при любом* $t\geq0$:

а) $\left|X\left(t\right)\right|\leq N_1e^{\alpha t}$;

б) $\left|\dot{X}\left(t\right)\right|\leq N_2e^{\alpha t}$.

Доказательство. Рассмотрим (6) на отрезке $\left[0,l\right]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B=E+S+\ldots+S^{k_0}$, где $k_0h_{\min}<l$, $\left(k_0+1\right)h_{\min}>l$, и учтем, что $\left(S^{(k_0+1)h_{\min}}\dot{X}\right)(t)\equiv0$:

$$\dot{X}(t) = ((BA)X)(t). \tag{7}$$

Утверждение 1 леммы следует из (7) и утверждения 1.

Подействуем на обе части уравнения (7) оператором C (т.е. проинтегрируем обе части уравнения):

$$X(t) = X(0) + ((CBA)X)(t). \tag{8}$$

Заметим, что $CBA: C[0,l] \to C[0,l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|CBA\| < 1$. В силу утверждения 2 получаем, что $X \in \left(C[0,l], \|\cdot\|_\alpha\right)$. Следовательно, $\|X\|_\alpha = N_1 < \infty$, где N_1 не зависит от l. Значит, $|X(t)| \le N_1 e^{\alpha t}$.

В силу уравнения (7) и $|X(t)| \le N_1 e^{\alpha t}$ получаем, $|\dot{X}(t)| \le N_2 e^{\alpha t}$. □

Из уравнения (6), леммы 1 следует, что к уравнению (6) применимо преобразование Лапласа [6, с. 12, 18].

Обозначим

$$S(p) = \sum_{j=1}^{J} a_j\, e^{-ph_j}, \; A(p) = \int_0^{\omega} e^{-p\xi}\, dr(\xi), \; g(p) = p(1 - S(p)) - A(p),$$
$$p \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2. *Лаплас-образ фундаментального решения имеет вид* $L_X(p) = \dfrac{1 - S(p)}{g(p)}$, $\operatorname{Re} p \ge \alpha$.

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (6) и найдем функцию L_X из полученного уравнения. Лаплас-образ функции X определен на множестве $\operatorname{Re} p \ge \alpha$ в силу установленной выше оценки $|X(t)| \le N_1 e^{\alpha t}$. □

Замечание. Функция $L_X(p)$ является мероморфной функцией. Как известно [8, с. 58], мероморфные функций имеют не более чем счетное число изолированных особенностей, которые являются нулями знаменателя. Значит, функция $L_X(p)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением этих точек.

3. Функция Коши

Как показано в ([1], с. 61), функция Коши уравнения (1), как функция второго аргумента (при фиксированном t), при почти всех $s \le t$ удовлетворяет равенству

$$C(t,s) = 1 + \sum_{j=1}^{J} a_j\, C(t, s+h_j) - \int_0^{\omega} C(t, \tau + s)\, r(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

В той же работе установлено, что (9) однозначно определяет функцию Коши уравнения (1) и может быть принято за ее определение. Напомним, что $C(t,s) \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.

Рассмотрим аналог уравнения (9) для функции одной переменной:

$$Y(t) = 1 + (SY)(t) - (RY)(t), \tag{10}$$

где функция Y предполагается равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Уравнение* (10) *однозначно разрешимо в* $P[0,l]$ *при любом* l.

2. *Существуют* $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{R}_+$ *такие*, *что при любом* $t \ge 0$ $|Y(t)| \le Ne^{\alpha t}$.

Доказательство. Заметим, что если $(RY)(t)$ существует, то является локально абсолютно непрерывной функцией на любом конечном отрезке.

Рассмотрим (10) на отрезке $[0,l]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B = E + S + \ldots + S^{k_0}$, где $k_0 h_{\min} < l$, $(k_0+1)h_{\min} > l$, и, учитывая $S^{(k_0+1)h_{\min}} Y(t) \equiv 0$, получаем:

$$Y(t) = (BR)Y(t).$$

Заметим, что $BR : P[0,l] \to P[0,l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|BR\| < 1$. В силу утверждения 2 получаем, что $Y \in \left(P[0,l], \|\cdot\|_{\alpha}\right)$, т.е. утверждение 1 леммы доказано. Отсюда следует, что $\|Y\|_\alpha = N < \infty$, где N не зависит от l. Значит, $|Y(t)| \le Ne^{\alpha t}$, тем самым доказано утверждение леммы 2. □

Лемма 4. $C(t,s) = Y(t-s)$.

Доказательство. Функция $Y(t-s)$ удовлетворяет уравнению (9), которое, как отмечалось выше, однозначно определяет функцию Коши. □

Лемма 5. *Лаплас-образ функции* Y *имеет вид* $L_Y(p) = \dfrac{1}{g(p)}$, $\operatorname{Re} p \ge \alpha$.

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (10) и найдем функцию L_Y из полученного уравнения. Лаплас-образ функции Y определен на множестве $\operatorname{Re} p \ge \alpha$ в силу установленной выше оценки $|Y(t)| \le Ne^{\alpha t}$. □

Замечание. Функция $L_Y(p)$ имеет не более чем счетное число полюсов, являющихся нулями знаменателя (и только ими). Значит, функция $L_Y(p)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость, за исключением этих точек.

4. Основные результаты

Следующие теоремы устанавливают связь между функцией Коши и фундаментальным решением, а также их Лаплас-образами.

Из лемм 2 и 5 очевидным образом следует:

Теорема 1. $L_X(p) = (1 - S(p))L_Y(p)$, $\operatorname{Re} p \ge \alpha$.

Теорема 2. *Пусть* X *– фундаментальное решение, а* Y *– решение уравнения* (10). *Тогда*

$$X(t) = (E - S)Y(t), \tag{11}$$

$$X(t) = 1 - (RY)(t). \tag{12}$$

Доказательство. Равенство (11) получается, если к правой и левой частям равенства из теоремы 1 применить обратное преобразование Лапласа и использовать его элементарные свойства [6, гл. 1]. Из (10) и (11) следует (12). □

Теорема 3. *Фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет оценку*

$$\left|X(t)\right| \leq Ne^{\beta t}, \quad N > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

тогда и только тогда, когда все нули функции $p - \dfrac{A(p)}{1 - S(p)}$ *лежат в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. *Функция Коши уравнения* (1) *имеет оценку*

$$\left|C(t,s)\right| \leq Ne^{\beta(t-s)}, \quad N > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

тогда и только тогда, когда нули функции g *лежат в полуплоскости* $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

Теоремы 3 и 4 доказываются по одной схеме. Наметим ее.

Идея **доказательства** теорем 3 и 4. *Необходимость*. Предположим, что справедлива оценка (13). Значит, L_X является аналитической функцией в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \beta\}$. Следовательно, нули функции $p - \dfrac{A(p)}{1 - S(p)}$ лежат только в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$. Доказательство для функции Коши повторяет данное рассуждение: достаточно (13) заменить на (14), а функцию $p - \dfrac{A(p)}{1 - S(p)}$ заменить на функцию g.

Достаточность. Предположим, что все нули функции $p - \dfrac{A(p)}{1 - S(p)}$ лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник ABCD, вершины которого соответствуют точкам $\alpha - i\gamma$, $\alpha + i\gamma$, $\beta + i\gamma$, $\beta - i\gamma$, где α определяется леммой 1, причем $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$.

Разобьем интеграл $\int\limits_{\mathrm{ABCD}} L_X(p) e^{pt} dp$ на четыре интеграла:

$$I_1 = \int\limits_{\mathrm{AB}} L_X(p) e^{pt} dp, \; I_2 = \int\limits_{\mathrm{BC}} L_X(p) e^{pt} dp,$$

$$I_3 = \int\limits_{\mathrm{CD}} L_X(p) e^{pt} dp, \; I_4 = \int\limits_{\mathrm{DA}} L_X(p) e^{pt} dp.$$

Из теоремы Коши о вычетах [9, с. 79] следует, что $\int\limits_{\mathrm{ABCD}} L_X(p) e^{pt} dp = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. Кроме того [6, гл. 1], функция $\dfrac{A(p)}{1 - S(p)}$ ограничена на контуре ABCD. Поэтому $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_2| = 0$, $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_4| = 0$. С помощью обратного преобразования Лапласа получаем $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} I_1 = 2\pi i \, X(t)$. Для доказательства $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_3| \le M e^{\beta t}$ используется представление L_X в виде суммы двух функций:

$$L_X(p) = \frac{1}{p} + \frac{A(p)}{p\big(p\big(1 - S(p)\big) - A(p)\big)} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{A(p)}{1 - S(p)}}{p\left(p - \frac{A(p)}{1 - S(p)}\right)}.$$

При всех $\beta \in \mathbb{R}$ интеграл $\int\limits_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \dfrac{e^{pt}}{p} dp$ сходится [9, с. 464–465] (равен 0 при $\beta < 0$ и 1 при $\beta > 0$). Интеграл от второго слагаемого оценивается по абсолютной величине.

Таким образом, $2\pi |X(t)| = \lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_1| \le \lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_3| + \lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_2| + \lim\limits_{\gamma \to +\infty} |I_4| \le$ $\le M e^{\beta t}$, откуда получаем оценку (13).

Аналогично доказывается оценка (14), с тем отличием, что здесь для оценки интеграла I_3 используется представление

$$L_Y(p) = \frac{L_X(p)}{1 - S(p)} = \frac{1}{p\big(1 - S(p)\big)} + \frac{\frac{A(p)}{1 - S(p)}}{p\big(1 - S(p)\big)\left(p - \frac{A(p)}{1 - S(p)}\right)}. \qquad \square$$

Легко заметить, что теоремы 3 и 4 обеспечивают *экспоненциальную устойчивость* уравнения (1), если и только если $\beta < 0$.

Следствие 1. *Если имеет место оценка* (14), *то справедлива и оценка* (13).

Из оценки (13) не вытекает оценка (14), как показывает следующий пример [3]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}\left(t-h\right) + bx\left(t\right) - abx\left(t-h\right) = f(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Легко убедиться, что $X(t) = \chi(t)e^{-bt}$ – фундаментальное решение этого уравнения, $C(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(t - jh - s)e^{-b(t-jh-s)}a^j$ – функция Коши. Непосредственный подсчет по направлению $s = 0$ в точках $t = kh$, $k \in \mathbb{N}_0$, приводит к равенствам $C\left(kh, 0\right) = Y\left(kh\right) = \dfrac{a^{k+1} - e^{-b(k+1)}}{a - e^{-b}}$. Очевидно, что при $a > 1$ и $b > 0$ функция Коши неограниченно растет, в то время как фундаментальное решение экспоненциально убывает.

Найдем условия, когда из оценки (13) следует оценка (14).

Следствие 2. *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$. *Для того чтобы оценки* (13) *и* (14) *выполнялись одновременно, необходимо и достаточно*, *чтобы общие нули функций* $1 - S\left(p\right)$ *и* $A\left(p\right)$ *лежали слева от прямой* $\operatorname{Re} p = \beta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00928.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.

3. Баландин А.С., Малыгина В.В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 7 – С. 17–27.

4. Соколов В.А. Об устойчивости одного класса линейных уравнений нейтрального типа // Краевые задачи / Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1984. – С. 60–63.

5. Соколов В.А. Экспоненциальная оценка матрицы Коши и устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа / Перм. политехн. ин-т. – Пермь, 1985. – 21 с. – Деп. ВИНИТИ. 11.04.85. № 2419.

6. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

8. Маркушевич А.И. Целые функции. – М.: Наука, 1965. – 108 с.

9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

References

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina N.F. Vvedenie v teoriiu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. – M.: Izd-vo «Nauka. Gl. red. fiz. mat. lit.», 1991. – 280 s.

2. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoichivost' reshenii uravnenii s obyknovennymi proizvodnymi. – Perm': Izd-vo Permsk. un-ta, 2001. – 230 s.

3. Balandin A.S., Malygina V.V. Ob eksponencial'noj ustojchivosti linejnyh differencial'no-raznostnyh uravneniyah nejtral'nogo tipa // Izv. vuzov. Matematika. 2007. – № 7 – S. 17-27.

4. Sokolov V.A. Ob ustojchivosti odnogo klassa linejnyh uravnenij nejtral'nogo tipa // Kraevye zadachi. – Perm': Perm. Politekh. In-t. – 1984. – S. 60-63.

5. Sokolov V.A. Eksponencial'naya ocenka matricy Koshi i ustojchivost' odnogo klassa uravnenij nejtral'nogo tipa. – Perm': Perm. Politekh. In-t. – 1985. – 21 s. – Dep. VINITI. 11.04.85. №2419.

6. Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnye uravneniia. – M.: Izd-vo «MIR», 1963. – 548 s.

7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. – M.: Nauka, 1981. – 544 s.

8. Markushevich A.I. Celye funkcii. – M.: Nauka, 1965. – 108 s.

9. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcii kompleksnogo peremennogo. – M.: Nauka, 1987. – 688 с.

Получено 16.02.2018

Об авторе

Баландин Антон Сергеевич (Пермь, Россия) – младший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: balandin-anton@yandex.ru).

About the author

Anton S. Balandin (Perm, Russian Federation) – Junior Researcher, Research Center “Functional Differential Equations”, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail:balandin-anton@yandex.ru).