УДК 517.977.56

К.Б. Мансимов[1, 2], В.А. Сулейманова[3]

[1] Бакинский государственный университет,
Баку, Азербайджанская Республика
[2] Институт систем управления НАН Азербайджана,
Баку, Азербайджанская Республика
[3] Сумгаитский государственный университет,
Сумгаит, Азербайджанская Республика

ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГУРСА–ДАРБУ

Изучается граничная задача оптимального управления системами Гурса–Дарбу при предположении выпуклости области управления. Установлен аналог линеаризованного условия максимума. Выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: граничное управление, система Гурса–Дарбу, необходимое условие оптимальности, линеаризованный принцип максимума, аналог условия Габасова–Кирилловой, квазиособое управление.

K.B. Mansimov[1, 2], V.A. Suleimanova[3]

[1] Baku State University, Baku, Azerbaijan Republic
[2] Institute of Control Systems of NAS Azerbaijan Republic,
Baku, Azerbaijan Republic
[3] Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan Republic

LINEARIZED AND GUADRATIC NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE BOUNDARY CONTROL PROBLEMS FO GOURSAT–DARBOUX SYSTEMS

In the paper investigated boundary optimal control problem for Goursat–Darboux systems assuming the convex of control domain. Analogous linearization maximum condition is obtained. Necessary optimality conditions of quasi-singular controls are derived.

Keywords: boundary control, Goursat–Darboux system, necessary optimality condition, linearized maximum principle, analogue of Gabasov–Kirillova condition, quasi-singular control.

Введение

Задачи оптимального управления, описываемые системами Гурса–Дарбу и с управляемым граничным условиям, начали изучаться еще в работах А.И. Егорова [1, 2]. Отметим работы [3–9], в которых получен ряд необходимых условий оптимальности и доказаны теоремы существования оптимальных граничных управлений.

В предлагаемой статье исследуется одна граничная задача оптимального управления, описываемая системой Гурса–Дарбу при предположении выпуклости области управления. Установлено необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума, и исследован случай его вырождения (квазиособый случай).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u)=\varphi\left(a\left(t_1\right)\right)+G\left(z\left(t_1,x_1\right)\right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$u(t)\in U\subset R^r,\ \ t\in T=\left[t_0,t_1\right], \tag{2}$$

$$z_{tx}=B(t,x)z_t+f\left(t,x,z,z_x\right),\ \left(t,x\right)\in D=\left[t_0,t_1\right]\times\left[x_0,x_1\right], \tag{3}$$

$$\begin{aligned} z\left(t,x_0\right)&=a(t), \quad t\in T=\left[t_0,t_1\right],\\ z\left(t_0,x\right)&=b(x), \quad x\in X=\left[x_0,x_1\right], \end{aligned} \tag{4}$$

$$a\left(t_0\right)=b\left(x_0\right)=a_0,$$

$$\dot a=g\left(t,a,u\right), \quad t\in T, \tag{5}$$

$$a\left(t_0\right)=a_0. \tag{6}$$

Здесь $f\left(t,x,z,z_x\right)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z,z_x до второго порядка включительно; $B(t,x)$ – заданная измеримая и ограниченная $(n\times n)$-матричная функция; $b(x)$ – заданная n-мерная абсолютно непрерывная вектор-функция; t_0,t_1,x_0,x_1 – $\left(t_0<t_1;\ x_0<x_1\right)$ заданы; a_0 – заданный постоянный вектор; $g\left(t,a,u\right)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a,u) до второго порядка включительно; $\varphi(a)$ и $G(z)$ – заданные дважды непрерывно

дифференцируемые скалярные функции; U – заданное непустое ограниченное и выпуклое множество; $u(t)$ – измеримая и ограниченная r-мерная управляющая вектор-функция.

Каждую управляющую функцию $u(t)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что при заданном допустимом управлении $u(t)$ задача Коши (5)–(6) и задача Гурса (3)–(4) имеют единственное абсолютно непрерывное решение (в смысле [10–13]) $a(t)$ и $z(t,x)$ соответственно.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)–(6), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t),a(t),z(t,x))$ – оптимальным процессом.

2. Специальное приращение функционала качества

Считая $(u(t),a(t),z(t,x))$ фиксированным допустимым процессом, введем обозначения

$$M(t,a,u,q)=q'g(t,a,u),$$

$$H(t,x,z,z_x,\psi)=\psi' f(t,x,z,z_x),$$

$$M_a(t,a(t),u(t),q(t))=M_a(t),$$

$$M_{aa}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{aa}(t),$$

$$M_{ua}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{ua}(t),$$

$$M_{uu}(t,a(t),u(t),q(t))=M_{uu}(t),$$

$$H_z(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_z(t,x),$$

$$H_{zz}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_{zz}(t,x),$$

$$H_{zz_x}(t,x,z(t,x),z_x(t,x),\psi(t,x))=H_{zz_x}(t,x),$$

$$g_a\left(t,a(t),u(t)\right)=g_a(t),$$

$$f_z\left(t,x,z(t,x),z_x(t,x)\right)=f_z(t,x),$$

$$f_{z_x}\left(t,x,z(t,x),z_x(t,x)\right)=f_{z_x}(t,x),$$

где $\psi=\psi(t,x)$ и $q=q(t)$ пока неизвестные n-мерные вектор-функции.

Через $\left(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\ \bar{a}(x)=a(x)+\Delta a(x),\ \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\right.$ $\left.+\Delta z(t,x)\right)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение критерия качества:

$$\Delta I(u)=I(\bar{u})-I(u)=\varphi\left(\bar{a}(t_1)\right)-\varphi\left(a(t_1)\right)+G\left(\bar{z}(t_1,x_1)\right)-G\left(z(t_1,x_1)\right). \quad (7)$$

Далее ясно, что приращение $\left(\Delta a(t),\Delta z(t,x)\right)$ состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$ есть решение задачи

$$\Delta\dot{a}=g\left(t,\bar{a},\bar{u}\right)-g\left(t,a,u\right), \quad (8)$$

$$\Delta a(t_0)=0, \quad (9)$$

$$\Delta z_{tx}=B(t,x)\Delta z_t+f\left(t,x,\bar{z},\bar{z}_x\right)-f\left(t,x,z,z_x\right), \quad (10)$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t,x_0)=\Delta a(t), \quad t\in T,\\ \Delta z(t_0,x)=0, \quad x\in X.\end{gathered} \quad (11)$$

Умножая обе части соотношения (8) ((10)) слева скалярно на $q(t)$ $\left(\psi(t,x)\right)$, а затем интегрируя обе части полученного соотношения по T (по D), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} q'(t)\Delta\dot{a}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[M\left(t,\bar{a}(t),\bar{u}(t),q(t)\right)-M\left(t,a(t),u(t),q(t)\right)\right]dt, \quad (12)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[H\left(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{z}_x(t,x),\psi(t,x)\right)-\right.$$

$$-H\left(t,x,z\left(t,x\right),z_x\left(t,x\right),\psi\left(t,x\right)\right)\Big]dx\,dt. \qquad (13)$$

С учетом тождеств (12) и (13) формула приращения (1) записывается в виде

$$\Delta I\left(u\right)=\varphi\left(\bar{a}\left(t_1\right)\right)-\varphi\left(a\left(t_1\right)\right)+G\left(\bar{z}\left(t_1,x_1\right)\right)-G\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}q'\left(t\right)\Delta\dot{a}\left(t\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Big[M\left(t,\bar{a}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right),q\left(t\right)\right)-M\left(t,a\left(t\right),u\left(t\right),q\left(t\right)\right)\Big]dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'\left(t,x\right)\Delta z_{tx}\left(t,x\right)dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'\left(t,x\right)B\left(t,x\right)\Delta z_t\left(t,x\right)dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[H\left(t,x,\bar{z}\left(t,x\right),\bar{z}_x\left(t,x\right),\psi\left(t,x\right)\right)-$$

$$-H\left(t,x,z\left(t,x\right),z_x\left(t,x\right),\psi\left(t,x\right)\right)\Big]dx\,dt.$$

Отсюда, используя формулу Тейлора, будем иметь

$$I\left(u\right)=\varphi_a\left(a\left(t_1\right)\right)\Delta a\left(t_1\right)+\frac{1}{2}\Delta a'\left(t_1\right)\varphi_{aa}\left(a\left(t_1\right)\right)\Delta a\left(t_1\right)+$$

$$+G_z'\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right)+\frac{1}{2}\Delta z\left(t_1,x_1\right)G_{zz}\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\Delta z\left(t_1,x_1\right)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}q'\left(t\right)\Delta\dot{a}\left(t\right)dt-\int_{t_0}^{t_1}\Big[M_a'\left(t\right)\Delta u\left(t\right)+M_u'\left(t\right)\Delta u\left(t\right)\Big]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta a'\left(t\right)M_{aa}\left(t\right)\Delta a\left(t\right)+2\,\Delta u'\left(t\right)M_{ua}\left(t\right)\Delta a\left(t\right)+\Delta u'\left(t\right)M_{uu}\left(t\right)\Delta u\left(t\right)\Big]dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'\left(t,x\right)B\left(t,x\right)\Delta z_t\left(t,x\right)dx\,dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[H_z'\left(t,x\right)\Delta z\left(t,x\right)+H_{z_x}'\left(t,x\right)\Delta z_x\left(t,x\right)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'\left(t,x\right)H_{zz}\left(t,x\right)\Delta z\left(t,x\right)+\Delta z_x'\left(t,x\right)H_{z_xz}\left(t,x\right)\Delta z\left(t,x\right)+$$

$$+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta a(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x_1)\right\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\left\|\Delta u(t)\right\|+\left\|\Delta a(t)\right\|\right]^2\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta z_x(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt. \tag{14}$$

где $o\left(\alpha^2\right)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Ясно, что

$$\Delta a(t)=\int_{t_0}^{t}\Delta\dot a(\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

$$\Delta z(t,x)=\Delta a(t)+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)\,ds\,d\tau, \tag{16}$$

$$\Delta z_t(t,x)=\Delta\dot a(t)+\int_{x_0}^{x}\Delta z_{ts}(t,s)\,ds, \tag{17}$$

$$\Delta z_{x}(t,x)=\int_{t_0}^{t}\Delta z_{\tau x}(\tau,x)\,d\tau. \tag{18}$$

Используя формулы (15)–(18) и применяя формулу Фубини (см., например, [10]), можно доказать, что

$$\int_{t_0}^{t}M_a'(t)\Delta a(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}M_a'(\tau)\,d\tau\right]\Delta\dot a(t)\,dt, \tag{19}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta z_t(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)B(t,x)\Delta\dot a(t)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{s}^{x_1}\psi'(t,s)B(t,s)\,ds\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt, \tag{20}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\Delta z(t,x)\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\Delta a(t)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_z'(t,x)\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\Delta z_{\tau s}(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]dx\,dt, \tag{21}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'(t,x)\Delta a(t)\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1} H_z'(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta\dot a(t)\,dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z'(\tau,s)\,ds\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_{z_x}'(t,x)\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_t^{t_1} H_{z_x}'(\tau,x)\,d\tau\right]\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt,$$

$$\varphi_a\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\varphi_a\left(a(t_1)\right)\Delta\dot a(t)\,dt,$$

$$G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1) = \int_{t_0}^{t_1} G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta\dot a(t)\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} G_z'\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt. \qquad (22)$$

С учетом доказанных тождеств (19)–(22) формула (14) для приращения функционала качества (1) представляется в виде

$$\Delta I(u) = -\int_t^{t_1}\Delta_{\bar u(t)}M(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\varphi_a\left(a(t_1)\right) + q(t) + G_z\left(z(t_1,x_1)\right) - \int_t^{t_1} M_a(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1} H_z'(\tau,x)\,dx\,d\tau - \int_{x_0}^{x_1} B'(t,x)\psi(t,x)\,dx\Bigg]'\Delta\dot a(t)\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[G_z\left(z(t_1,x_1)\right) - \psi(t,x) - \int_s^{x_1} B'(t,s)\psi(t,s)\,ds -$$

$$-\int_t^{t_1}\int_x^{x_1} H_z'(\tau,s)\,d\tau\,ds - \int_t^{t_1} H_{z_x}'(\tau,x)\,d\tau\Bigg]'\Delta z_{tx}(t,x)\,dx\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta a'(t_1)\varphi_{aa}\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1) + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t) + 2\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t) +$$

$$+\Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\Big]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+$$

$$+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta a'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}M_{aa}(t)\Delta a(t)\,dt+o_1\left(\left\|\Delta a(t_1)\right\|^2\right)+$$

$$+o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x_1)\right\|^2\right)+\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\left\|\Delta a(t)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta z_x(t,x)\right\|\right]^2\right)dx\,dt. \qquad (23)$$

Если предполагать, что $(\psi(t,x),q(t))$ является измеримым и ограниченным решением системы интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\psi(t,x)=-G_z\left(z(t_1,x_1)\right)+\int_s^{x_1}B'(t,s)\psi(t,s)\,ds+$$

$$+\int_t^{t_1}\int_x^{x_1}H_z(\tau,s)\,ds\,d\tau+\int_t^{t_1}H_{z_x}(\tau,x)\,d\tau, \qquad (24)$$

$$q(t)=-\varphi_a\left(a(t_1)\right)-G_z\left(z(t_1,x_1)\right)+\int_t^{t_1}M_{aa}(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\int_t^{t_1}H_z(\tau,x)\,dx\,d\tau+\int_{x_0}^{x_1}B'(t,x)\psi(t,x)\,dx, \qquad (25)$$

то формула приращения (23) примет вид

$$\Delta I(u)=\frac{1}{2}\Delta a'(t_1)\varphi_{aa}\left(a(t_1)\right)\Delta a(t_1)+\frac{1}{2}\Delta z(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)\Delta z(t_1,x_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}M_u'(t)\Delta u(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Big[\Delta a'(t)M_{aa}(t)\Delta a(t)+2\Delta u'(t)M_{ua}(t)\Delta a(t)+$$

$$+\Delta u'(t)M_{uu}(t)\Delta u(t)\big]dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z'(t,x)H_{zz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)+$$

$$+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)\Delta z(t,x)+\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)\Delta z_x(t,x)\Big]dx\,dt+$$

$$+o_1\left(\left\|\Delta a(t_1)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta z(t_1,x_1)\right\|^2\right)-\int_{t_0}^{t_1}o_3\left(\left[\left\|\Delta a(t)\right\|+\left\|\Delta u(t)\right\|\right]^2\right)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_4\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)+\Delta z_x(t,x)\right\|\right]^2\right)dt\,dx. \qquad (26)$$

Пусть $\varepsilon\in[0,\ 1]$ – произвольное число, а $v(t)\in U$, $t\in T$ – произвольная измеримая и ограниченная r-мерная вектор-функция (допустимое управление).

В силу выпуклости области управления U специальное приращение управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\varepsilon\big[v(t)-u(t)\big],\ t\in T. \qquad (27)$$

Через $\left(\Delta a(t;\varepsilon),\Delta z(t,x;\varepsilon)\right)$ обозначим специальное приращение вектора состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$, отвечающее приращению (27) управления $u(t)$.

Из оценок, приведенных, например, в работах [1–4, 6, 7, 11–13], следует, что

$$\left\|\Delta a(t;\varepsilon)\right\|\le L\varepsilon, \qquad (28)$$

$$\left\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\right\|\le L\varepsilon,\quad \left\|\Delta z_x(t,x;\varepsilon)\right\|\le L\varepsilon,\quad (t,x)\in D,$$

где L – некоторая постоянная, $L=\text{const}>0$.

Используя эти оценки и формулу (27), при помощи (8)–(9), (10)–(11) доказывается следующее.

Теорема 1. Для специального приращения $\left(\Delta a(t;\varepsilon),\Delta z(t,x;\varepsilon)\right)$ состояния $\left(a(t),z(t,x)\right)$ имеют место разложения

$$\begin{gathered}\Delta a(t;\varepsilon)=\varepsilon\,\ell(t)+o(\varepsilon;t),\\ \Delta z(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,m(t,x)+o(\varepsilon;t,x),\\ \Delta z_x(t,x;\varepsilon)=\varepsilon\,m_x(t,x)+o(\varepsilon;t,x),\end{gathered}\tag{29}$$

где $\left(\ell(t),m(t,x)\right)$ является решением аналога уравнения в вариациях

$$\dot{\ell}(t)=g_a(t)\ell(t)+g_u(t)\left(v(t)-u(t)\right),t\in T,\tag{30}$$

$$\ell(t_0)=0,\tag{31}$$

$$\begin{gathered}m_{tx}(t,x)=B(t,x)m_t(t,x)+f_z(t,x)m(t,x)+\\ +f_{z_x}(t,x)m_x(t,x),(t,x)\in D,\end{gathered}\tag{32}$$

$$\begin{gathered}m(t,x_0)=\ell(t),t\in T,\\ m(t_0,x)=0,x\in X.\end{gathered}\tag{33}$$

С учетом разложений (29) из формулы приращения (26) получаем, что

$$\begin{gathered}\Delta I_\varepsilon(u)=I(u+\Delta u_\varepsilon)-I(u)=-\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}M_u'(t)\left(v(t)-u(t)\right)dt+\\ +\frac{\varepsilon^2}{2}\Big\{\ell'(t_1)\varphi_{aa}\left(a(t_1)\right)\ell(t_1)+m'(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)m(t_1,x_1)-\\ -\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t)+2\left(v(t)-u(t)\right)'M_{ua}(t)\ell(t)+\\ +\left(v(t)-u(t)\right)'M_{uu}(t)\left(v(t)-u(t)\right)\Big]dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(t,x)\,H_{zz}(t,x)m(t,x)+\\ +m'(t,x)H_{zz_x}(t,x)m_x(t,x)+m_x'(t,x)H_{z_xz}(t,x)m(t,x)+\\ +m_x'(t,x)H_{z_xz_x}(t,x)m_x(t,x)\Big]+dx\,dt\Big\}+o\left(\varepsilon^2\right).\end{gathered}\tag{34}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из разложения (34) сразу следует теорема 2.

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех $v(t)\in U$, $t\in T$ выполнялось соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} M_u'(t)\big(v(t)-u(t)\big)dt = 0 . \tag{35}$$

Необходимое условие оптимальности (35) есть аналог интегрального линеаризованного (см., например, [14]) условия максимума для рассматриваемой задачи. Следуя работам [15, 16], можно доказать нижеприведенное утверждение.

Теорема 3. Необходимое условие оптимальности (35) имеет место тогда и только тогда, когда для всех правильных точек (точек Лебега) управления $u(t)$ (см., например, [17–19]) и для всех $w\in U$ выполняется неравенство

$$M_u'(\theta)\big(w-u(\theta)\big)\le 0 . \tag{36}$$

Соотношение (36) есть аналог линеаризованного (дифференциального) (см., например, [14]) условия максимума, принадлежит классу необходимых условий оптимальности первого порядка и нередко вырождается (см., например, [20]). Такие случаи называются квазиособыми.

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6), если для всех $w\in U$ $\theta\in[t_0,t_1)$

$$M_u'(\theta)\big(w-u(\theta)\big)=0 . \tag{37}$$

Из разложения (34) в силу (35), (36) следует теорема 4.

Теорема 4. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенство

$$\ell(t_1)\varphi_{aa}\big(a(t_1)\big)\ell(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\Big[\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t)+2\big(v(t)-u(t)\big)' M_{ua}(t)\ell(t)+$$

$$+\left(v(t)-u(t)\right)' M_{uu}(t)\left(v(t)-u(t)\right)\Big]dt+m'(t_1,x_1)G_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)m(t_1,x_1)-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Big[m'(t,x)H_{zz}(t,x)m(t,x)+m'(t,x)H_{zz_x}(t,x)m(t,x)+$$

$$+m'_x(t,x)H_{z_x z}(t,x)m(t,x)+m'_x(t,x)H_{z_x z_x}(t,x)m_x(t,x)\Big]dx\,dt\ge 0 \qquad (38)$$

выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (38) есть неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Используя его, можно получить необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, непосредственно выраженные через параметры задачи (1)–(6).

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (30) с начальным условием (31) допускает представление [10, 21]

$$\ell(t)=\int_{t_0}^{t_1}F(t,\tau)g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau, \qquad (39)$$

где $F(t,\tau)$ – $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F_\tau(t,\tau)=-F(t,\tau)g_a(\tau),$$

$$F(t,t)=E,$$

E – $(n\times n)$-единичная матрица.

С помощью результата работы [22] решение краевой задачи записывается в виде

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t}R(t,x;\tau,x_0)\left[\dot\ell(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\ell(\tau)\right]d\tau, \qquad (40)$$

где $R(t,x;\tau,s)$ – $(n\times n)$-матричная функция решения интегрального уравнения.

$$R(t,x;\tau,s)=E+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x;\alpha,\beta)f_z(\alpha,\beta)d\alpha\,d\beta+$$

$$+\int_{\tau}^{t}R(t,x;\alpha,s)f_{z_x}(\alpha,s)d\alpha+\int_{s}^{x}R(t,x;\tau,\beta)B(\tau,\beta)d\beta.$$

Из (40) с учетом (16) имеем

$$m(t,x)=$$

$$=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)\ell(\tau)+g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)-f_{z_x}(\tau,x_0)\ell(\tau)\right]d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\,g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\right]\ell(\tau)\,d\tau. \qquad (41)$$

Полагая, что

$$Q(t,x,\tau)=R(t,x;\tau,x_0)\left[g_a(\tau)-f_{z_x}(\tau,x_0)\right], \qquad (42)$$

из (41) получим

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\,g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau+\int_{t_0}^{t} Q(t,x,\tau)\,\ell(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда в силу представления (39) имеем

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\,g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{\tau} Q(t,x,\tau)\,F(\tau,s)\,g_u(s)\left(v(s)-u(s)\right)ds\right]d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t} R(t,x;\tau,x_0)\,g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} Q(t,x,s)\,F(s,\tau)\,ds\right]g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau.$$

Полагая, что

$$L(t,x,\tau)=R(t,x;\tau,x_0)+\int_{\tau}^{t} Q(t,x,s)\,F(s,\tau)\,ds, \qquad (43)$$

окончательно будем иметь

$$m(t,x)=\int_{t_0}^{t} L(t,x,\tau)\,g_u(\tau)\left(v(\tau)-u(\tau)\right)d\tau. \qquad (44)$$

Следовательно,

$$m_x(t,x)=\int_{t_0}^{t} L_x(t,x,\tau)\,g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau. \tag{45}$$

Используя представления (39), (44), (45), займемся преобразованием отдельных слагаемых в (38).

При помощи представления (39) получим

$$\ell'(t_1)\varphi_{aa}\big(a(t_1)\big)\ell(t_1)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\,g_u'(\tau)F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}\big(a(t_1)\big)\times$$

$$\times F(t_1,s)\,g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau, \tag{46}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\big(v(t)-u(t)\big)'\,M_{ua}(t)\ell(t)\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\delta u'(\tau)M_{ua}(\tau)F(\tau,t)\,d\tau\right]g_u(t)\big(v(t)-u(t)\big)dt\,, \tag{47}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\ell'(t)M_{aa}(t)\ell(t)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)\,g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau\right)'M_{aa}(t)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t}F(t,s)\,g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\right)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\,g_u'(\tau)\left\{\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)\,dt\right\}\times$$

$$\times g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau. \tag{48}$$

Далее при помощи (44), (45) доказывается справедливость тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}m'(t,x)H_{zz}(t,x)m(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t} L(t,x,\tau)\,g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau\right)' H_{zz}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t} L(t,x,s)\,g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\,g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} L'(t,x,\tau)\,H_{zz}(t,x)\,L(t,x,s)\,dx\,dt\right\}\times$$

$$\times\, g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau, \tag{49}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} m'(t,x)\,H_{zz_x}(t,x)\,m_x(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t} L(t,x,\tau)\,g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau\right)' H_{zz_x}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t} L_x(t,x,s)\,g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\,g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} L'(t,x,\tau)\,H_{zz_x}(t,x)\,L_x(t,x,s)\,dx\,dt\right\}\times$$

$$\times\, g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau, \tag{50}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z_x'(t,x)\,H_{z_xz_x}(t,x)\,\Delta z_x(t,x)\,dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t_1} L_x(t,x,\tau)\,g_u(\tau)\big(v(\tau)-u(\tau)\big)d\tau\right)' H_{z_xz_x}(t,x)\times$$

$$\times\left(\int_{t_0}^{t_1} L_x(t,x,s)\,g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\right)dx\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'\,g_u'(\tau)\left\{\int_{x_0}^{x_1}\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} L_x'(t,x,\tau)\,H_{z_xz_x}(t,x)\,L_x(t,x,s)\,dx\,dt\right\}\times$$

$$\times g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau. \tag{51}$$

Введем обозначения

$$K(\tau,s)=-F'(t_1,\tau)\varphi_{aa}\big(a(t_1)\big)F(t_1,s)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_1}\Bigg[F'(t,\tau)M_{aa}(t)F(t,s)+\int_{x_0}^{x_1}\big[L'(t,x,\tau)H_{zz}(t,x)L(t,x,s)+$$

$$+L'(t,x,\tau)H_{zz_x}(t,x)L_x(t,x,s)+L'_x(t,x,\tau)H_{z_xz}(t,x)L(t,x,s)+$$

$$+L'_x(t,x,\tau)H_{z_xz_x}(t,x)L_x(t,x,s)\big]dx\Big\}dt. \tag{52}$$

Матричная функция $K(\tau,s)$ является аналогом матричных функций, введенных в рассмотрение в работах [18, 23, 24].

С учетом обозначения (52) и тождества (46)–(51) неравенство (38) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'g'_u(\tau)K(\tau,s)g_u(s)\big(v(s)-u(s)\big)ds\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\big(v(\tau)-u(\tau)\big)'M_{ua}(\tau)F(\tau,t)d\tau\right]g_u(t)\big(v(t)--u(t)\big)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\big(v(t)-u(t)\big)'M_{uu}(t)\big(v(t)-u(t)\big)dt\le 0. \tag{53}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенство (53) выполнялось для всех $u(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (53) есть интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений и носит довольно общий характер. Из него можно получить, используя произвольность $v(t)$, ряд более легко проверяемых условий оптимальности.

Непосредственным следствием теоремы 5 является теорема 6.

Теорема 6. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $w \in U$ выполнялось неравенство

$$\left(w-u(\theta)\right)' M_{uu}(\theta)\left(w-u(\theta)\right) \le 0. \tag{54}$$

Неравенство (54) есть аналог условия Лежандра–Клебша в случае выпуклой области управления.

Теперь изучим случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша.

Определение 2. Квазиособое управление $u(t)$ назовем квазиособым второго порядка управлением, если для всех $w \in U$, $\theta \in [t_0, t_1)$

$$\left(w-u(\theta)\right)' M_{uu}(\theta)\left(w-u(\theta)\right) = 0. \tag{55}$$

Теорема 7. Если $u(t)$ – квазиособое второго порядка управление, то для его оптимальности необходимо, чтобы

$$\left(w-u(\theta)\right)' \left[g_u'(\theta) K(\theta,\theta) g_u(\theta) + H_{ux}(\theta) g_u(\theta)\right]\left(w-u(\theta)\right) \le 0 \tag{56}$$

выполнялось для всех $w \in U$ и $\theta \in [t_0, t_1)$.

Неравенство (56) есть аналог условия Габасова–Кирилловой, полученный в работах [25, 26] в случае обыкновенной динамической системы другим способом.

Список литературы

1. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Матем. сборник. – 1966. – Т. 69, № 3. – С. 371–421.

2. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Матем. – 1965. – Т. 29, № 6. – С. 1205–1260.

3. Егоров А.И. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Оптимальные системы. Статистические методы. – М.: Наука, 1967. – С. 76–92.

4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. – 160 с.

5. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Л., 1984. – 42 с.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. – Новосибирск: Наука, 1990. – 190 с.

8. Погодаев Н.И. О свойствах решений задачи Гурса–Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. матем. журнал. – 2007. – № 5. – С. 116–123.

9. Погодаев Н.И. О решениях системы Гурса–Дарбу с распределенными граничными управлениями: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Иркутск, 2009. – 18 с.

10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 550 с.

11. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. – Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. – 360 с.

12. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Журн. выч. матем. и матем. физики. – 1972. – № 1. – С. 61–72.

13. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. – 1972. – № 5. – С. 845–856.

14. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова [и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с.

15. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1982. – 110 с.

16. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1970. – 118 с.

17. Мордухович Б.Ш. Метод метрических аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1988. – 359 с.

18. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 394 с.

19. Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: Изд-во ГГУ, 1986. – 87 с.

20. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

21. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. – Минск: Изд-во БГУ, 1973. – 256 с.

22. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. ССР. Физ.-техн. и мат. наук. – 1973. – № 2.

23. Мансимов К.Б. Об одной схеме исследования особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Физ.-техн. и матем. наук. – 1981. – № 2. – С. 100–104.

24. Мансимов К.Б. Исследование особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Баку, 1994. – 42 с.

25. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференц. уравнения. – 1970. – № 4. – С. 665–670.

26. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Об оптимальности особых управлений // Дифференц. уравнения. – 1969. – № 6. – С. 1000–1011.

References

1. Yegorov A.I. Neobkhodimiye usloviya optimalnosti dlya sistem s raspredelennmi parametrami [Necessary optimality conditions for systems with distributed parameters] // Matematicheskii sbornik. 1966, Vol. 69, No. 3, p. 371-421.

2. Yegorov A.I. Optimal’nye protsess v sistemakh s raspredelennmi parametram i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal processes in systems with distributed parameters and some problems of the theory of invariance] Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. math. 1965, Vol. 29, No. 6, p. 1205-1260.

3. Yegorov A.I. Optimal’noye upravleniye sistemami s raspredelennmi parametrami i nekotorye zadachi invariantnosti [Optimal control of systems with distributed parameters and some problems of invariance theory] Sb. Optimal Systems. Statistical methods. M. Science. 1967, p. 76-92.

4. Srochko V.A. Variatsionny printsip maksimuma i metod linearizatsii v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Variational maximum principle and linearization methods in optimal control problems] Irkutsk. Publishing house of Irkutsk University. 1989, 160 p.

5. Vasil'ev O.V. Kachestvennye i konstruktivnye metody optimizatsii sistem s raspredelennymi parametrami [Qualitative and constructive methods for optimizing systems with distributed parameters] avtoref. diss. degree of doctor of phys.-math. sciences. Leningrad. 1984, 42 p.

6. Vasil'ev F.P.Metody resheniya ekstremalnyhk zadach [Methods for solving extremal problems]. M. Nauka, 1981, 400 p.

7. Vasiliev O.V, Srochko V.A, Terletskiy V.A. Metody optimizatsii i ikh prilojenya [Optimization methods and their applications]. Novosibirsk, Science, 1990, 190 p.

8. Pogodayev N.I. O svoystvakh resheniy zadachi Gursa-Darbu s granichnymi i raspredelennymi upravleniyami [On properties of solutions of the Goursat-Darboux problem with boundary and distributed controls] Sibirsk. Mat. Zhurnal. 2007, no. 5. p. 1116-1123.

9. Pogodayev N.I. O resheniyakh sistemy Gursa-Darbu s raspredelennymi granichnymi upravleniyami [On solutions of Goursat-Darboux system with distributed and boundary controls] abstract. diss. scientific degree of candidate of physico-mathematical sciences, Irkutsk, 2009,18 p.

10. Alekseyev V.M, Tikhomirov V.M, Fomin S.V. Optimal'noye upravleniye [Optimal control] M. Nauka, 1979, 550 p.

11. Mansimov K.B, Mardanov M.J. Kachestvennaya teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami Qursa-darbu [Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems] Baku. Elm Publishing, 2010.360 p.

12. Plotnikov V.I, Sumin V.I. Optimizatsiya ob'yektov s raspredelennymi parametrami opisyvaemykh sistemami Gursa-Darbu [Optimization of objects with distributed parameters described by the Goursat-Darboux systems] Zh. vych. mat. i matem. fiziki. 1972, № 1, p. 61-72.

13. Plotnikov V.I, Sumin V.I. Problemy ustoychivosti nelineynykh sistem Gursa-Darbu [Problems of stability of nonlinear Goursat-Darboux systems] Differents. Uravneniya, 1972, № 5, p. 845-856.

14. Gabasov R., Kirillova F.M., and others. Metody optimizatsii[Methods of optimization] Mn. 2011, 472 p.

15. Srochko V.A. Vychislitel’nye metody optimal’nogo upravleniya [Computational methods of optimal control] Irkutsk. Publishing house of Irkutsk University. 1982, 110 p.

16. Girsanov I.V. Lektsii po matematicheskoy teorii ekstremal’nykh zadach [Lectures on the mathematical theory of extremal problems] Publishing house of MGU, 1970, 118 p.

17. Morduhovich B.Sh. Metod metricheskh approksimatsiy v zadachakh optimizatsii i upravleniya [Method of metrix approximations in optimization and control problems] M. Nauka, 1988, 359 p.

18. Pontryagin L.S. and other. Matematicheskaya teoriya optimal’nykh protsessov [Mathematical theory of optimal processes] M. Nauka, 1969, 394 p.

19. Novozhenov M.M, Sumin V.I, Sumin M.I. Metody optimal’nogo upravleniya sistemami matematicheskoy fiziki[Methods of optimal control of systems of mathematical physics] Gor’kiy. Izd-vo GGU, 1986, 87 p.

20. Gabasov R., Kirillova F.M. Osobyye optimal’nyye upravleniya[Singular optimal controls] M. Nauka, 1973, 256 p.

21. Gabasov R., Kirillova F.M. Optimizztsiya lineynykh sisstem [Optimization of linear systems] Minsk. Izd-vo BSU, 1973, 256 p.

22. Akhiyev S.S., Akhmedov K.T.Ob integral’nom predstavleniyii resheniy nekotorykh differentsial’nyhk uravneniy [On the integral representation of solutions of certain differential equations] Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and mat. Sciences. 1973, № 2.

23. Mansimov K.B. Ob odnoy scheme issledovaniya osobykh upravleniy v sistemakh Gursa-Darbu [On a scheme for investigating special controls in Goursat-Darboux systems] Izv. AN Azerb. SSR. Ser. Fiz.-tehn. and math. Sciences. 1981, No. 2, p. 100-104.

24. Mansimov, K.B. Issledovaniye osobykh protsessov v zadachakh optimal’nogo upravleniya[Investigation of singular processes in problems of optimal control] avt. ref. diss. degree of phys.math. sciences. Baku, 1994, 42 p.

25. Gabasov R., Kirillova F.M. K teorii neobkhodimykh usloviy optimalnosti vysokogo poryadka [On the theory of necessary conditions for high-order optimality] Differents. Equations. 1970, No. 4, p. 665-670.

26. Gabasov R., Kirillova F.M. Ob optimal’nosti osobykh upravleniy [On the optimality of singular controls] Differents. Equations. 1969, No. 6, p. 1000-1011.

Получено 06.04.2017

Об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы (Баку, Азербайджанская Республика) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет, руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах», Институт систем управления НАН Азербайджана (AZ1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде 9, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru).

Сулейманова Вусаля Абдулла гызы (Баку, Азербайджанская Республика) – аспирантка, Институт систем управления НАН Азербайджана (AZ1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9).

About the authors

Kamil' B. Mansimov (Baku, Azerbaijan Republic) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Chair of Mathematical Cybernetics Department, Institute of Control Problems of ANAS, Head of the Laboratory of Control With Complex Dynamic Systems" (9, B. Vakhabzade, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic, e-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru).

Vusalia A. Suleimanova (Baku, Azerbaijan Republic) – Postgraduate Student, Institute of Control Problems of ANAS (9, B. Vakhabzade, Baku, AZ1141, Azerbaijan Republic).