УДК 517.929

А.Р. Абдуллаев, Н.А. Лойко, Е.П. Сметанина

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается краевая задача для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа. Краевое условие задачи задается линейным ограниченным функционалом общего вида, определенным на пространстве абсолютно непрерывных функций. Для рассматриваемой задачи получены достаточные условия существования хотя бы одного решения.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа, квазилинейная краевая задача, теоремы существования.

A.R. Abdullaev, N.A. Loiko, E.P. Smetanina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON THE SOLVABILITY OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A QUASILINEAR NEUTRAL TYPE EQUATION

The boundary problem for a quasi-linear differential neutral-type equation is considered. The boundary condition of the problem is given by a general linear bounded functional defined on the space of absolutely continuous functions. For the problem in question, the sufficient conditions of the existence of at least one solution are obtained.

Keywords: neutral-type equation, quasi-linear boundary problem, existence theorems.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'(t)+a(t)x'\left(kt^{\gamma}\right)=f\left(t,(Tx)(t)\right),\ t\in[0;1], & (1)\\ lx=\alpha, & (2)\end{cases}$$

в предположениях: $a:[0;1]\to R^1$ – измеримая и ограниченная в существенном функция, $0<k\le 1$, $\gamma\ge 1$, функция $f:[0;1]\times R^1\to R^1$ удовлетворяет условиям Каратеодори, T – линейный оператор, l – линейный функционал, $\alpha\in R^1$.

Пусть $L_2 = L_2[0;1]$ – пространство суммируемых по Лебегу с квадратом функций с нормой $\|\cdot\|$. Через $D_2 = D_2[0;1]$ обозначим пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[0;1]\to R^1$, что $x' \in L_2$. Норму на D_2 определим равенством $\|x\|_{D_2} = |x(0)| + \|x'\|$.

Решением задачи (1)–(2) будем называть такой элемент $x \in D_2$, который почти всюду на $[0;1]$ удовлетворяет уравнению (1) и для которого выполнено краевое условие (2).

Уравнение вида (1) возникает, в частности, в квантовой механике [1]. Как известно, уравнения нейтрального типа традиционно изучают относительно старшей производной без отклонения, т.е. $x'(t)$. Остальные слагаемые в левой части уравнения играют роль возмущений, которые не нарушают разрешимость уравнения без отклонения. Особенность полученного в предлагаемой работе результата состоит в следующем: в уравнении (1) ведущая роль в разрешимости отводится слагаемому с отклонением аргумента в левой части уравнения.

п1. Рассмотрим оператор $A: L_2 \to L_2$, определенный равенством

$$(Ay)(t) = a(t)\, y\left(kt^{\gamma}\right),$$

где $0 < k \le 1$, $\gamma \ge 1$. Этот оператор является оператором внутренней суперпозиции [2] со специальным запаздыванием вида $h(t) = kt^{\gamma}$.

Лемма 1. Пусть существует константа a_0, такая что $|a(t)| \le a_0 t^{\frac{\gamma-1}{2}}$ почти всюду на $[0;1]$. Тогда оператор $A: L_2 \to L_2$ ограничен, причем $\|A\| \le \dfrac{a_0}{\sqrt{\gamma k}}$.

Доказательство. Произведем в интеграле замену переменной, полагая $s = kt^{\gamma}$, и оценим полученный интеграл с учетом условия на $a(t)$. Получим

$$\|Ay\|^2 = \int_0^1 a^2(t)\, y^2\left(kt^{\gamma}\right) dt = \int_0^k a^2\left(\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) y^2(s)\, s^{\frac{1}{\gamma}-1} ds \le \frac{a_0^2}{k\gamma}\|y\|^2.$$

Следовательно, оператор A ограничен. Из последнего неравенства следует требуемая оценка нормы оператора A. Лемма доказана.

Для оператора $A: L_2 \to L_2$ равенством $q(A) = \inf\limits_{\|\omega\|\neq 0} \dfrac{\|A^*\omega\|}{\|\omega\|}$ определим коэффициент сюръективности, где $A^*: L_2 \to L_2$ – сопряженный с A оператор [3]. Отметим, что сопряженный с A оператор имеет представление

$$\left(A^*\omega\right)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k\gamma} a\left(\left(\dfrac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\left(\dfrac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \omega\left(\left(\dfrac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right), & 0 \le t \le k, \\ 0, & k < t \le 1. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть существует константа $q_0 > 0,$ такая что почти всюду на отрезке $[0;1]$ выполняется неравенство $|a(t)| \ge q_0 t^{\frac{\gamma-1}{2}}$. Тогда оператор A сюръективен, причем $q(A) \ge \dfrac{q_0}{\sqrt{k\gamma}}$.

Доказательство. Имеем

$$\left\|A^*\omega\right\|^2 = \frac{1}{k^2\gamma^2}\int_0^k a^2\left(\left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\left(\frac{t}{k}\right)^{2\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \omega^2\left(\left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) dt .$$

Преобразуем интеграл в правой части равенства

$$\left\|A^*\omega\right\|^2 = \frac{1}{k\gamma}\int_0^1 s^{1-\gamma} a^2(s)\omega(s)\, ds .$$

Оценим интеграл снизу, используя условия леммы. Отсюда получим $\left\|A^*\omega\right\|^2 \ge \dfrac{q_0^2}{k\gamma}\|\omega\|^2$. Лемма доказана.

Далее рассмотрим оператор $Q: L_2 \to L_2$, $(Qy)(t) = y(t) + a(t)\, y\left(kt^{\gamma}\right)$. Отметим, что оператор Q является главной частью оператора [2], стоящего в левой части уравнения (1).

Теорема 1. Пусть существует константа a_0, такая что $\left|a(t)\right| \le a_0 t^{\frac{\gamma-1}{2}}$ почти всюду на $[0;1]$ и $a_0 < \sqrt{k\gamma}$. Тогда оператор $Q : L_2 \to L_2$ обратим, причем $\left\|Q^{-1}\right\| \le \dfrac{\sqrt{k\gamma}}{\sqrt{k\gamma} - a_0}$.

Доказательство. Для оператора Q справедливо представление $Q = I + A$. В силу леммы 1 в условиях теоремы имеем $\|A\| \le \dfrac{a_0}{\sqrt{k\gamma}} < 1$, поэтому оператор Q обратим и $\left\|Q^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|} \le \dfrac{\sqrt{k\gamma}}{\sqrt{k\gamma} - a_0}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть существует константа $q_0 > 0$, такая что почти всюду на отрезке $[0;1]$ выполняется неравенство $\left|a(t)\right| \ge q_0 t^{\frac{\gamma-1}{2}}$ и $q_0 > \sqrt{k\gamma}$. Тогда оператор Q сюръективен, при этом $q(Q) \ge \dfrac{q_0}{\sqrt{k\gamma}} - 1$.

Доказательство. В силу свойств коэффициента сюръективности имеем

$$q(Q) = q(I + A) \ge q(A) - 1 \ge \frac{q_0}{\sqrt{k\gamma}} - 1 > 0 .$$

Здесь при оценке $q(A)$ мы воспользовались утверждением леммы 2. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что при $0 < k < 1$ оператор Q является сюръективным, но необратимым. В этом случае существует ограниченный правый обратный для оператора Q.

п2. Сформулируем условия, при выполнении которых будем рассматривать задачу (1)–(2):

i) существуют неотрицательные константы b, d, такие что неравенство $\left|f(t,u)\right| \le b + d|u|$ выполнено при почти всех $t \in [0;1]$ и произвольного $u \in R$;

ii) линейный оператор $T : D_2 \to L_2$ вполне непрерывен.

Выполнение условия i обеспечивает непрерывность оператора Немыцкого $N : L_2 \to L_2$, определенного равенством $(Nu)(t) = f\left(t, u(t)\right)$. Следовательно, оператор $NT : L_2 \to L_2$ вполне непрерывен.

Замечание 2. В случае когда правая часть имеет вид $f\left(t, x(t)\right)$, в качестве оператора T выступает оператор вложения $J : D_2 \to L_2$, $Jx = x$, который обладает свойством полной непрерывности.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} x'(t) = g(t), \\ lx = \alpha \end{cases} \tag{3}$$

с функционалом $l : D_2 \to R^1$ вида

$$lx = x(0) + \int_0^1 \beta(s)\, x'(s) ds,$$

где $\beta(\cdot)$ – измеримая и ограниченная в существенном функция.

Если задача (3) однозначно разрешима для произвольных пар $g(t) \in L_2$, $\alpha \in R^1$, то решение задачи (3) имеет представление $x = C\alpha + Gg$, где $C = \text{const}$ такова, что $l(C) = 1$, а G – оператор Грина этой задачи, имеющий представление $(Gg)(t) = \int_0^1 G(t,s)\, g(s)\, ds$, где

$$G(t,s) = \begin{cases} 1 - \beta(s), & 0 \le s \le t, \\ -\beta(s), & t < s \le 1. \end{cases}$$

Лемма 3. Для оператора Грина задачи (3) справедлива оценка $\|G\| \le 1 + \|\beta\|$.

Доказательство этого утверждения состоит в непосредственной оценке нормы $\|Gg\|_{D_2}$ с применением неравенства Гельдера.

Теорема 3. Пусть выполнены условия i, ii и условие теоремы 1. Если выполнено неравенство

$$d\left(1 + \|\beta\|\right)\|T\| < \frac{\sqrt{k\gamma}}{\sqrt{k\gamma} - a_0},$$

то задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение для произвольного $\alpha \in R^1$.

Доказательство. Задачу (1)–(2) представим в виде следующей системы:

$$\begin{cases} Qx' = NTx, & (4) \\ lx = \alpha. & (5) \end{cases}$$

В условиях теоремы 3 оператор $Q: L_2 \to L_2$ обратим. Разрешимость задачи (4)–(5) будет следовать из разрешимости операторного уравнения

$$x = C\alpha + GQ^{-1}NTx\,. \tag{6}$$

Рассмотрим оператор $F: L_2 \to L_2$, определенный равенством

$$Fx = C\alpha + GQ^{-1}NTx.$$

Если оператор F имеет неподвижную точку, то этот элемент является решением системы (4)–(5). Следовательно, этот элемент является решением задачи (1)–(2). Для доказательства существования неподвижной точки оператора F применим теорему о неподвижной точке Шаудера. Поскольку для произвольного $x \in D_2$ $\left|f\left(t, Tx\right)\right| \le b + d\left|Tx\right|$, то с учетом свойств нормы в пространстве L_2 имеем $\|NTx\| \le b + d\,\|T\|\|x\|_{L_2}$, поэтому $\|Fx\| = |C\alpha| + d\,\|G\|\left\|Q^{-1}\right\|\|T\|\|x\|$.

В силу условий теоремы 3 выполнено неравенство $\|Fx\| \le C_1 + m\|x\|$, где $m = \|G\|\|T\|\left\|Q^{-1}\right\|$, $m < 1$, $C_1 = |C\alpha|$. Следовательно, оператор F имеет неподвижную точку, т.е. задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены условия *i*, *ii* и условие теоремы 2. Если выполнено неравенство

$$d\left(1 + \|\beta\|\right)\|T\| < \frac{q_0 - \sqrt{k\gamma}}{\sqrt{k\gamma}},$$

то задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение для произвольного $\alpha \in R^1$.

Доказательство этого утверждения проводится по схеме доказательства теоремы 3 с применением утверждения теоремы 2. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} x'(t) + a_0\left(t^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)x'\left(kt^{\gamma}\right) = bx(t) + f(t), \\ x(1) = \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Применение теоремы 4 приводит к следующему результату: пусть выполнено условие $2|b| < \dfrac{|a_0| - \sqrt{k\gamma}}{\sqrt{k\gamma}}$, тогда задача (7) для произвольных $f \in L_2$ и $\alpha \in R^1$ имеет решение.

Список литературы

1. Furi M., Martelli M., Vignoli A. Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spases // Ann. Mat. pura ed appl. – 1978. – № 118. – P. 229–294.

2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

3. Абдуллаев А.Р., Брагина Н.А. Операторы Грина с минимальной нормой // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 4. – С. 3–7.

References

1. Furi, M. Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spases [Текст] /M. Furi, M. Martelli, A. Vignoli//Ann. Mat. pura ed appl. – 1978/ No 118/ P.229-294.

2. Azbelev N.In. Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. the Elements of the modern theory of functional differential equations. Methods and applications (Institute of computer researches, Moscow, 2002).

3. Abdullaev A.R, Bragina N.A. Operatory Grina s minimal'noj normoj [Green operator with minimal norm]. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika. – 2003. – vol. 4. – 3-7 p.

Получено 01.11.2017

Об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Лойко Наталья Александровна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: nataly.loyko@yandex.ru).

Сметанина Елена Павловна (Пермь, Россия) – магистрант кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: elena.smetanina41289@gmail.com).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Department of Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: h.m@pstu.ru).

Natal’ia A. Loiko (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: nataly.loyko@yandex.ru).

Elena P. Smetanina (Perm, Russian Federation) – Master Student, Department of Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: elena.smetanina41289@gmail.com).