

УДК 519.7

**О.Ю. Сметанников, Г.В. Ильиных**

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет, Пермь, Россия

## **МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА И ЕЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ**

Построены феноменологические определяющие соотношения для волокнистых композитных материалов в условиях терморелаксационных (стеклование) переходов. Модель основана на подходе, примененном ранее авторами для описания термомеханического поведения стеклующихся аморфных полимеров с обобщением на класс анизотропных стеклующихся материалов. Разработана и реализована методика экспериментальной идентификации полученной физической модели. На примере двух материалов – эпоксидного связующего и тканевого стеклопластика – получены термомеханические константы, входящие в модель. В проверочных испытаниях подтверждена адекватность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** полимерные композиты, определяющие соотношения, релаксационный период, математическое моделирование, экспериментальная идентификация.

**O.Iu. Smetannikov, G.V. Il'inykh**

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

## **MODEL OF VISCOELASTIC THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF FIBROUS COMPOSITE AND ITS EXPERIMENTAL IDENTIFICATION**

Phenomenological determining relationships for fibrous composite materials under the conditions of thermo-relaxation (vitrification) transitions are created. The model is based on the approach used earlier by the authors to describe the thermomechanical behavior of glassy amorphous polymers with a generalization to the class of anisotropic glass materials. A technique for the experimental identification of the obtained physical model was developed and implemented. On the example of two materials – epoxy binder and fabric glass fiber reinforced plastic on its basis thermomechanical constants included in the model were obtained. In the testing experiments, the adequacy of the proposed approach was confirmed.

**Keyword:** polymer composites, constitutive equations, relaxation transition, mathematical modeling, experimental identification.

Проблеме построения определяющих соотношений для волокнистых композиционных полимерных материалов в широком диапазоне температур, включающем диапазон температур релаксационного перехода (стеклования) в связующем, уделяется большое внимание исследователей в связи с ее практической и научной значимостью, особенно с точки зрения описания поведения композитов в условиях их изготовления, что зачастую сопровождается процессами отверждения связующего. Среди многочисленных исследований большое внимание уделяется особенностям деформационного поведения аморфных полимеров, использующихся в качестве связующих в композитах. В отечественной и зарубежной литературе хорошо известны модели поведения отверждающихся полимерных связующих материалов, предложенные в разное время в работах И.И. Бугакова [1, 2], В.В. Болотина [3], Р.А. Турусова [4], В.Т. Томашевского [5], В.В. Shaffer, М. Lewitsky [6, 7] и др. Общая черта этих моделей – стремление получить возможность простой оценки остаточных напряжений, без точного учета влияния релаксационных свойств и наследственных механизмов. В результате теряется существенный объем важной информации, например информации об эволюции технологических напряжений в процессе изготовления. В работах последних лет (М.С. Boyce, R.V. Dupaix [8], А.Г. Varghese, R.C. Vatra [9] и других авторов) предложен ряд моделей для описания механического поведения аморфных полимеров как в застеклованном состоянии, так и в температурном диапазоне, включающем температуру стеклования. Различным аспектам деформационного поведения полимеров, связанным с исследованием эффектов памяти формы, посвящено большое число публикаций, в том числе обзорного характера (работы С. Liu, Н. Qin, Р.Т. Mather [10, 11], В. Dietsch, Т.А. Tong [12], I.S. Gunes, S.C. Jana [13] и др.).

Анализ публикаций показал, что большинство предлагаемых в них моделей предназначены для описания поведения полимера в достаточно узком температурном диапазоне и моделирования конкретного механизма памяти формы и не могут описывать другие важные термомеханические эффекты. В статье приводится модель термомеханического поведения композиционных материалов, основанная на разработанном ранее подходе к построению определяющих соотношений при релаксационных и фазовых переходах [14–17]. Представлены результаты нескольких видов экспериментов, предназначенных для идентифика-

ции и верификации полученной модели применительно как к полимерному связующему, так и к композитному материалу.

## **1. Построение феноменологических определяющих соотношений для волокнистых композитных материалов в условиях терморелаксационных переходов**

Алгоритм построения основан на подходе, примененном ранее для описания термомеханического поведения стеклующихся аморфных полимеров с обобщением на класс анизотропных стеклующихся материалов [14–17].

### ***1.1. Определяющие соотношения упругого приближения для композита в режиме релаксационного перехода***

В композите благодаря взаимодействию волокна и связующего с различными термомеханическими характеристиками переход связующего в твердую фазу (стеклование) приводит к достаточно резкому изменению ЛКТР. Необходимо также учитывать анизотропию изменения эффективных свойств композита при переходе через интервал стеклования.

Вывод определяющих соотношений основан на введении следующих упрощающих гипотез [1]:

1) характерные времена внешних воздействий намного меньше времен релаксации связующего в стеклообразном состоянии ( $T < T_{g2}$ );

2) характерные времена внешних воздействий значительно превышают пределы релаксационного спектра высокоэластического связующего ( $T > T_{g1}$ ).

Введение гипотез 1, 2 позволяет считать композитный материал за пределами интервала стеклования связующего ( $T_{g2} \leq T \leq T_{g1}$ ) упругим. Будем также полагать, что поведение полимера в интервале стеклования при уменьшении температуры обусловлено нарастанием величины механической жесткости вследствие постепенного уменьшения сегментальной подвижности и увеличения энергии межмолекулярного взаимодействия. Для количественного описания этих процессов в дальнейшем используется удельная свободная энергия упругого ма-

териала, завершенность процесса характеризуется скалярным параметром  $N(T) \in [0, 1]$  – степенью стеклования вида

$$N_L(T, \dot{T}) = \begin{cases} 1 - 0,5e^{-\frac{T-T_g(\dot{T})}{\gamma_L}}, & T < T_g; \\ 0,5e^{-\frac{-(T-T_g(\dot{T}))}{\gamma_L}}, & T \geq T_g, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\gamma_L$  – параметр, определяющий ширину интервала стеклования;  $T_g$  – температура стеклования.

Обозначим через  $F_1$  удельную свободную энергию композита с высокоэластическим связующим, через  $F_2$  – удельную свободную энергию дополнительных связей полностью застеклованного композита.

На основе сделанных предположений получим выражение удельной свободной энергии композиционного материала в виде

$$F(\hat{\varepsilon}(t)) = F_1(\hat{\varepsilon}(t)) + \int_0^{N(t)} F_2(\hat{\varepsilon}(t) - \hat{\varepsilon}(\tau)) dN(\tau), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\hat{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{Tkl}^{(1)} - S_1 T; \\ F_2(\hat{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{Tkl}^{(2)} - S_2 T; \\ \varepsilon_{Tkl}^{(1)} &= \int_{T_H}^T \alpha_{kl}^{(1)}(T) dT; \quad \varepsilon_{Tkl}^{(2)} = \int_{T_H}^T \alpha_{kl}^{(2)}(T) dT, \end{aligned} \quad (3)$$

$C_{ijkl}^{(1)}, \alpha_{kl}^{(1)}$  – компоненты эффективных тензоров жесткости и коэффициентов линейного температурного расширения композита при  $T \geq T_{g1}$ ;

$C_{ijkl}^{(2)}, \alpha_{kl}^{(2)}$  – те же величины для образующихся в процессе стеклования

связующего связей;  $S$  – удельная энтропия;  $C_{ijkl}^{(2)} = C_{ijkl}^g - C_{ijkl}^{(1)}$ ;

$\alpha_{11}^{(2)} = \alpha_{11}^g, \alpha_{22}^{(2)} = \alpha_{33}^{(2)} = 0,5(\alpha_{22}^{(1)} + \alpha_{22}^g)$ .

После подстановки (3) в (2) получаем

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) = C_{ijkl}^{(1)}(T) \varepsilon_{kl}(t) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_{ijkl}^{(2)}(T) \int_{T_H}^{T(t)} [\varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{kl}(\tau)] dN(T(t)) - C_{ijkl}^{(1)}(T) \varepsilon_{Tkl}^{(1)}(t) - \\
 &- C_{ijkl}^{(2)}(T) N(T) \varepsilon_{Tkl}^{(2)}(t) + C_{ijkl}^{(2)}(T) \int_{T_H}^{T(t)} \varepsilon_{Tkl}^{(2)}(\tau) dN(T(\tau)). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Для определения  $C_{ijkl}^{(2)}, \alpha_{kl}^{(2)}$  рассмотрим поведение композита в стеклообразном состоянии ( $T < T_{g2}$ ). При этом степень стеклования  $N = 1$  и не меняется с изменением температуры, поэтому интегралы в правой части выражения (4) становятся постоянными величинами. Пусть при фиксированной температуре  $T$  материал деформируется, в результате чего компоненты тензора деформаций получают приращение  $\Delta\varepsilon_{ke}$ . Напряжения в этом случае изменятся следующим образом:

$$\Delta\sigma_{ij} = (C_{ijkl}^{(1)}(T) + C_{ijkl}^{(2)}(T)) \Delta\varepsilon_{kl}.$$

Поскольку композит по условию полностью отвержден, коэффициент пропорциональности между  $\Delta\sigma_{ij}$  и  $\Delta\varepsilon_{kl}$  есть компонент тензора упругих характеристик стеклообразного материала  $C_{ijkl}^{(2)}$ . Следовательно,

$$C_{ijkl}^{(2)} = C_{ijkl}^g - C_{ijkl}^{(1)}. \quad (5)$$

Пусть далее при той же температуре произошел подогрев на  $\Delta T$ . Считая, что материал остался недеформированным, запишем выражение для приращения напряжений из формулы (4):

$$\Delta\sigma_{ij}^T = -[C_{ijkl}^{(1)}(T) + C_{ijkl}^{(2)}(T)] \Delta\varepsilon_{Tkl}^{(2)}, \quad (6)$$

где  $\Delta\varepsilon_{kl}^{0(i)} \equiv \varepsilon_{kl}^{0(i)}(\Delta T)$ . Определим ту же величину через эффективные характеристики застеклованного композита:

$$\Delta\sigma_{ij}^T = -C_{ijkl}^g(T) \Delta\varepsilon_{Tkl}^g, \quad (7)$$

где  $\Delta\varepsilon_{Tkl}^g = \alpha_{kl}^g(T) \Delta T$ . Приравнявая правые части (6), (7), получим систему в общем случае шести уравнений относительно неизвестных независимых компонент тензора  $\Delta\varepsilon_{Tkl}^g$ . Для трансверсально-изотропных

и ортотропных материалов число независимых компонентов тензора деформаций сокращается до трех:

$$\sum_{j=1}^3 \Delta \varepsilon_{Tii}^{(2)} C_{jji}^{(2)}(T) = \sum_{j=1}^3 \left( \Delta \varepsilon_{Tii}^g C_{jji}^g(T) - \Delta \varepsilon_{Tii}^{(1)} C_{jji}^{(1)}(T) \right). \quad (8)$$

Разрешая систему трех линейных уравнений (8), получим искомые значения  $\Delta \varepsilon_{Tii}^{(2)}$ . Если  $\Delta T = 1$ , то  $\alpha_{ii}^{(2)} = \Delta \varepsilon_{Tii}^{(2)}$ , и свободную деформацию  $\varepsilon_{Tii}^{(2)}$  можно определить по формуле  $\varepsilon_{Tii}^{(2)} = \int_{T_H}^{T(t)} \alpha_{ii}^{(2)}(T) dT$ . Для приближенных вычислений можно принимать  $\alpha_{11}^{(2)} = \alpha_{11}^g$ ,  $\alpha_{22}^{(2)} = \alpha_{33}^{(2)} = 0,5(\alpha_{22}^{(1)} + \alpha_{22}^g)$ . Методика численного расчета входящих в формулу (4) констант по известным свойствам волокна и связующего, а также численный эксперимент по проверке адекватности данной методики описаны ниже.

### 1.2. Вязкоупругие определяющие соотношения для композита в режиме релаксационного перехода

Будем полагать, что, в отличие от рассмотренной в п. 1.1 модели, композиционный материал в стеклообразном состоянии является вязкоупругим. При этом переход из высокоэластического в стеклообразное состояние сопровождается наращиванием межмолекулярных связей в связующем, каждая из которых в момент возникновения обладает вязкоупругими свойствами.

После применения подхода, описанного в п. 1.1, с учетом термореологически простого поведения композита при температурах ниже  $T_{g2}$  получим следующие определяющие соотношения:

- при охлаждении:

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{kl}^{(1)}(t) + \int_0^t R_{ijkl}^{(2)}(t - \tau') N(\tau) d\bar{\varepsilon}_{kl}^{(2)}(\tau), \quad (9)$$

где  $R_{ijkl}^{(2)}(t) = R_{ijkl}^{(g)}(t) - C_{ijkl}^{(1)}$ ,  $R_{ijkl}^{(g)}(t)$  – тензор функций релаксации композита со связующим в стеклообразном состоянии;  $\bar{\varepsilon}_{kl}^{(i)}(t) = \varepsilon_{kl}(t) - \varepsilon_{Tkl}^{(i)}(t)$ ,  $t'$ ,  $\tau'$  – приведенные с учетом температурно-временной аналогии времена;

- при нагреве:

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{(1)} \bar{\epsilon}_{kl}^{(1)}(t) + N(t) \int_0^t R_{ijkl}^{(2)}(t' - \tau') d\bar{\epsilon}_{kl}^{(2)}(\tau). \quad (10)$$

При выводе выражения (10) полагалось, что к моменту начала нагрева деформационная история «забыта» (макронапряжения полностью отрелаксировали). Объединяя формулы (9) и (10), получим

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^{(1)} \bar{\epsilon}_{kl}^{(1)}(t) + N_1(t, t_1) \int_0^t R_{ijkl}^{(2)}(t' - \tau') N_2(\tau, t_1) d\bar{\epsilon}_{kl}^{(2)}(\tau), \quad (11)$$

где  $N_1(t, t_1) = \{1, t < t_1; N(t), t \geq t_1\}$ ;  $N_2(\tau, t_1) = \{N(\tau), \tau < t_1; N(t_1), \tau \geq t_1\}$ ;  $t_1$  – время окончания охлаждения и начала нагрева. Соотношения (11) допускают обобщение на случай многократного повторения циклов охлаждения-нагрева.

## 2. Термомеханические испытания цилиндрических одноосных образцов и одноосная релаксация эпоксидного связующего

Механические свойства композита в существенной мере определяются характеристиками связующего. Соотношения (11) в частном случае изотропного материала пригодны для описания термомеханического поведения полимера в условиях релаксационного перехода, поэтому на первом этапе была проведена серия идентификационных экспериментов для эпоксидного связующего ARALDITE LY8615/ARADUR 8615. Испытания проводились на динамическом механическом анализаторе DMA Q800 TA Instruments, который предназначен для исследования механических свойств различных материалов и имеет следующие возможности: диапазон температур – от  $-145$  до  $600$  °C при скорости нагревания до  $20$  °C/мин. Изменение свойств образца определяется по семи экспериментальным параметрам: температуре, времени, частоте, механическому напряжению, силе, смещению и деформации.

При проведении квазистатических термомеханических испытаний (ТМА) используется цилиндрический образец ( $D = 6$  мм,  $L = 7,8$  мм). Образец нагружается при комнатной температуре постоянным весом  $4,9$  Н и нагревается до температуры  $250$  °C со скоростью  $2$  °C/мин.

На рис. 1 показана экспериментальная температурная зависимость деформации образца под постоянной нагрузкой. Зона падения

деформации соответствует релаксационному переходу в высокоэластическое состояние.

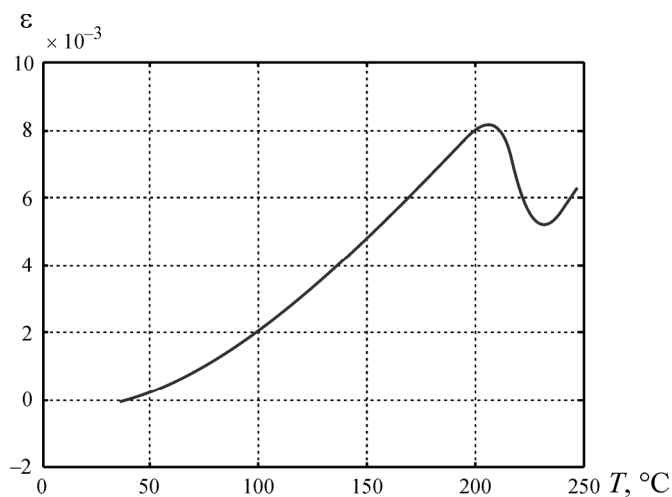


Рис. 1. Экспериментальная зависимость деформации нагруженного образца от температуры,  $^\circ\text{C}$

На рис. 2 приведен результат дополнительного эксперимента по нагреву свободного (ненагруженного) образца, результаты которого использованы для определения параметров коэффициента температурного расширения.

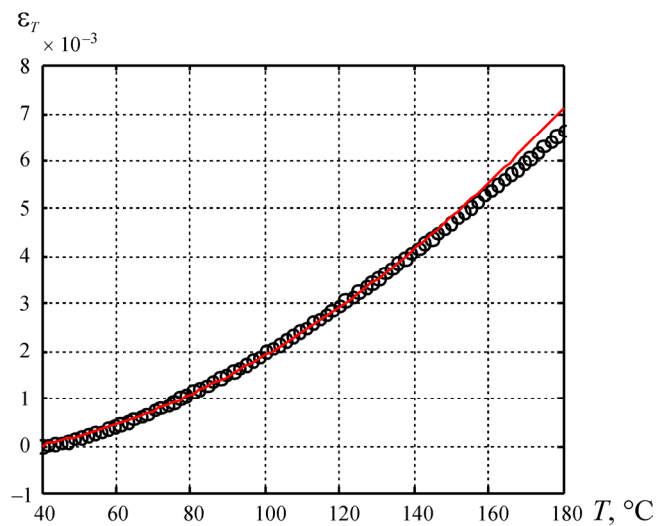


Рис. 2. Температурная деформация образца. Точки – эксперимент, линия – аппроксимация полиномом



Аппроксимация ЛКТР осуществлялась полиномом первого порядка  $\alpha_T = A_\alpha + B_\alpha (T - T_0)$ . Коэффициенты определялись методом наименьших квадратов. Найденные значения в числе прочих материальных констант модели представлены в табл. 1.

Следующий вид испытаний связующего ARALDITE LY8615/ARADUR 8615 – релаксация при комнатной температуре. Эксперимент проводился на электромеханической универсальной машине с термокриокамерой Instron 5882. Результат эксперимента приведен на рис. 3. Начальное напряжение в образце – 20 МПа. Время испытания – 12 часов.

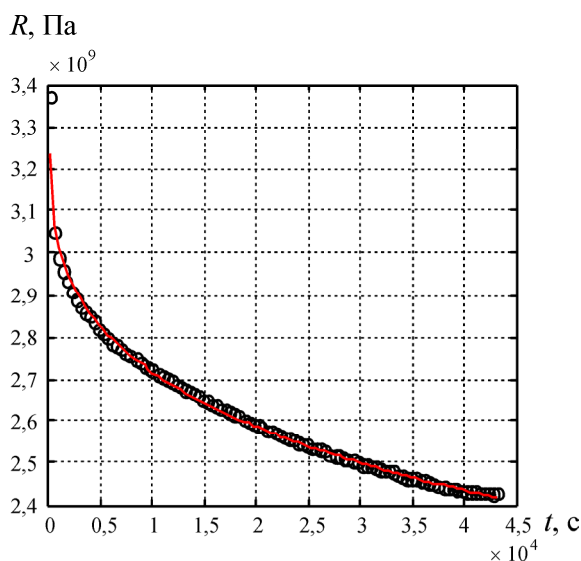


Рис. 3. Функция релаксации. Точки – эксперимент, линия – расчет по модели (11)

### 2.1. Идентификация вязкоупругой модели связующего по результатам эксперимента

Определялись материальные константы модели (11), преобразованной для одноосного напряженного состояния с функцией релаксации в виде суммы экспонент

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + E_2 N(t) \int_0^t \left[ \frac{E_{2\infty}}{E_2} + \sum_{i=1}^{N_e} C_i e^{-\frac{t-\tau}{\beta_i}} \right] d\varepsilon(\tau), \quad (12)$$

где  $E_1$  – модуль Юнга связующего в высокоэластическом состоянии;  $E_2 = E_g - E_1$ ,  $E_g$  – мгновенный модуль застеклованного связующего;  $E_{2\infty} = E_{1\infty} - E_1$ ,  $E_{1\infty}$  – равновесный модуль застеклованного связующего;  $\sum_{i=1}^{N_e} C_i = \frac{E_g - E_{1\infty}}{E_2}$ ;  $N_c$  – количество экспонент функции релаксации;  $\beta'_i = \beta_i / a_T$ ;  $\beta_i$  – времена релаксации;  $a_T$  – коэффициент температурно-временного сдвига по модели Вильямса–Ланделла–Ферри,  $\lg a_T = \frac{D_1(T - T_b)}{D_2 + (T - T_b)}$ ;  $E_\infty \equiv E_{1\infty}$ ;  $E_0 \equiv E_g$ ;  $\sum_{i=1}^{N_e} C_i = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}$ .

Исходными данными служили результаты испытаний на релаксацию (точки на рис. 4) и термомеханические кривые (см. рис. 4). Температурная деформация, аппроксимированная ранее, исключалась из рассмотрения путем вычета из измеренной в ТМА эксперименте деформации (см. рис. 4).

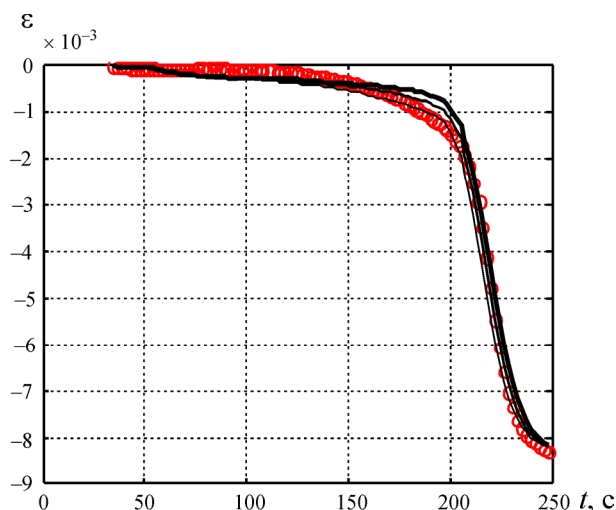


Рис. 4. Активная (за вычетом температурной) деформация нагруженного образца при нагревании. Точки – эксперимент; линии – расчет по модели (1); скорость нагрева – 1 К/с (тонкая кривая), 2 К/с (средняя кривая) и 4 К/с (жирная кривая)

Функция релаксации представлялась суммой из  $N_e = 18$  экспонент. Времена релаксации  $\beta_i$  задавались распределенными равномерно на логарифмической шкале времени в интервале от 1 до  $10^{18}$  с. Кон-

станты  $C_i$  считались кусочно-линейной функцией от  $i$ , количество вершин ломаной, распределенных равномерно на интервале [1, 18], при этом составило  $N_v = 7$ .

Определялись следующие константы:

- $E_2, E_{2\infty}, T_g, \gamma_L, D_1, D_2$  и семь ординат ломаной  $Y_{C_k}$ , описывающей функцию  $C_i(i)$ . При этом  $E_1$  вычислялся из термомеханической зависимости (см. рис. 4) по формуле  $E_1 = \sigma_0 / \varepsilon(250^\circ\text{C})$ .

- Модуль  $E_2 = E_g - E_1$ , где  $E_g$  определялся из экспериментальной кривой функции релаксации (см. рис. 3):  $E_g = \max(R(t))$ .

- Аналогично  $E_{2\infty} = R(t_{\max})$  по данным рис. 3.

Таким образом, остается 11 неизвестных коэффициентов (вектор варьируемых параметров  $\mathbf{x}$ ):  $T_g, \gamma_L, D_1, D_2$  и  $Y_{C_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ).

Поиск оставшихся неизвестных констант проводился методом нелинейного программирования в пакете MatLab с использованием функции `fminsearch`. Решалась задача поиска минимума комбинированной невязки между экспериментальными и рассчитанными по модели (1), (12) характеристиками:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_R(\mathbf{x})\Phi_{TMA}(\mathbf{x}) \rightarrow \min,$$

где  $\Phi_R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_R} |R_j^{\text{exp}} - R_j^{\text{sol}}| / N_R$ ,  $\Phi_{TMA}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{TMA}} |\varepsilon_j^{\text{exp}} - \varepsilon_j^{\text{sol}}| / N_{TMA}$ , индексы

$TMA$  и  $R$  относятся к термомеханическому и релаксационному экспериментам соответственно;  $\text{exp}$  и  $\text{sol}$  – экспериментальные и расчетные значения в каждой точке измерения. Дополнительно накладывались ограничения на неотрицательность коэффициентов  $C_i$ :  $C_i \geq 0$ .

В табл. 1 представлены найденные значения материальных констант.

Таблица 1

Материальные константы вязкоупругих определяющих соотношений

$E_1$ , МПа	$E_2$ , МПа	$E_{2\infty}$ , МПа	$T_g$ , °C	$\gamma_L$ , °C	$A_\alpha$ , °C <sup>-1</sup>	$B_\alpha$ , °C <sup>-2</sup>	$D_1$	$D_2$ , °C
21	3380	119	202	8,63	17,1	0,481	10,2	39,4

На рис. 5 показана зависимость от температуры степени стеклования  $N(t)$ , вычисленная по формуле (1) со значениями констант из табл. 1. На рис. 6 представлены значения найденных констант разложения функции релаксации  $C_i$ .

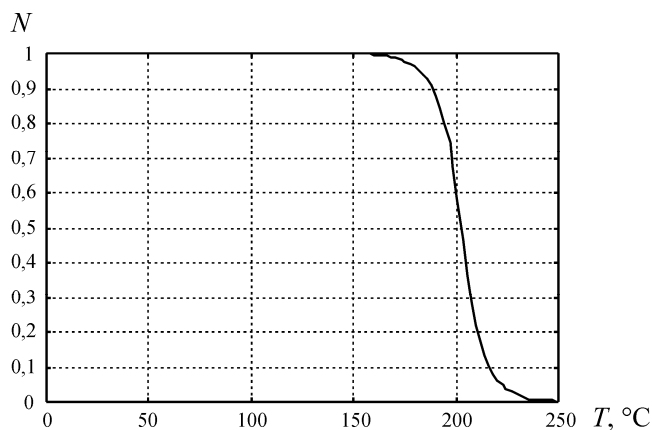


Рис. 5. Температурная зависимость степени стеклования  $\sigma$

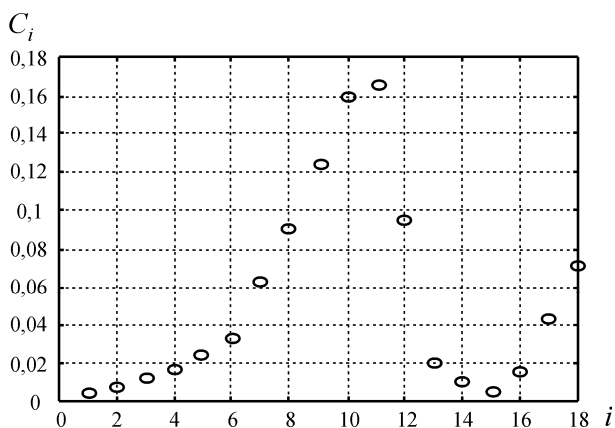


Рис. 6. Константы разложения функции релаксации  $\epsilon_{ст}$

На рис. 4 расчетные кривые построены для трех различных скоростей нагрева. Видно, что рост скорости изменения температуры приводит к смещению зоны падения деформации на графиках вправо. Это соответствует экспериментальным данным, наблюдаемым для сшитых полимеров, к которым относятся эпоксидные смолы [1, 2]. В дальнейшем предполагается подтвердить полученные данные расчета в аналогичных натурных испытаниях.

### 3. DMA-испытания пластинчатых образцов из трехслойного тканевого стеклопластика на трехточечный изгиб с постоянной частотой и переменной температурой

#### 3.1. Программа эксперимента

Эксперимент проводился на образцах стеклопластика на основе эпоксидного связующего ARALDITE LY8615/ARADUR 8615, армированного равнопрочной стеклотканью Porcher 7781 с сатиновым 8-ремизным плетением. В качестве испытательной машины был использован динамический механический анализатор DMA Q800 TA Instruments. Образцы – 65×12,55×1,85 мм, расстояние между опорами – 50 мм. Применялось предварительное нагружение  $F_0 = 5$  Н для устранения несовершенств формы с последующим знакопеременным нагружением амплитудой  $F_a = 2$  Н с частотой  $\omega = 1$  Гц. Интервал изменения температуры – от 25 до 100 °С. Результаты измерения компонентов комплексного модуля представлены на рис. 7, а, б (точки).

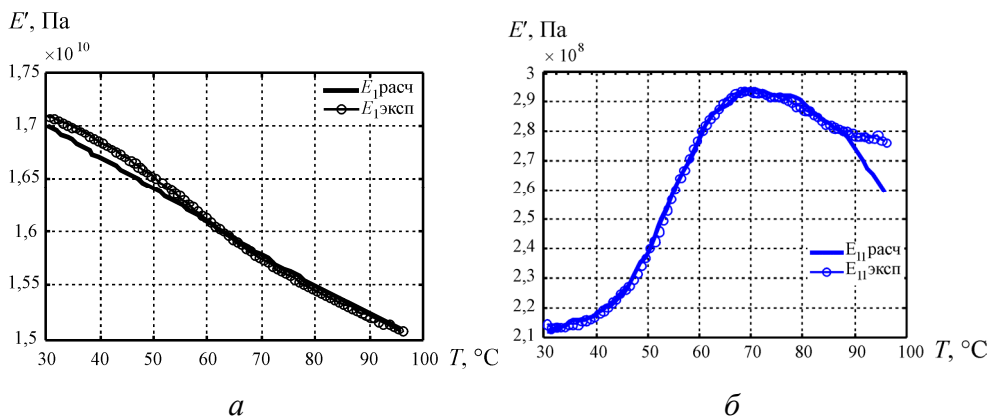


Рис. 7. Действительная (а) и мнимая (б) части комплексного модуля стеклопластика. Точки – эксперимент; сплошные линии – расчет

#### 3.2. Идентификация термомеханических констант композита

Целью DMA-испытаний в применении к разработанной физической модели является построение температурной зависимости комплексного модуля материала в диапазоне ниже интервала стеклования ( $T < T_{g2}$ ). С учетом того что степень стеклования в указанном интер-

вале  $N = 1$ , соотношения (12) принимают вид линейных наследственных соотношений.

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[ E_\infty + E_0 \sum_{i=1}^{N_e} C_i \exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta'_i}\right) \right] d\varepsilon(\tau), \quad (13)$$

где  $E_\infty \equiv E_{1\infty}$ ,  $E_0 \equiv E_g$ ,  $\sum_{i=1}^{N_e} C_i = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}$ .

В дальнейших выкладках учтено, что температурная нагрузка квазистационарна (температура на протяжении нескольких циклов внешнего периодического воздействия постоянна). При гармоническом кинематическом нагружении деформацией  $\varepsilon(t) = \varepsilon_a \sin(\omega t)$  после подстановки в (17) и математических преобразований получаем на  $t \rightarrow \infty$  следующий вид зависимости напряжения от времени

$$\sigma(t) = \varepsilon_a \left\{ \sin(\omega t) \left[ E_\infty + \omega^2 E_0 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\beta_i'^2 C_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2} \right] + \cos(\omega t) \omega E_0 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\beta_i' C_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2} \right\}. \quad (14)$$

Используя к (14) известные соотношения для расчета компонент комплексного модуля из работы [18], получаем следующие выражения:

$$E' = E_\infty + \omega^2 E_0 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\beta_i'^2 C_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2}; \quad (15)$$

$$E'' = \omega E_0 \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\beta_i' C_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2}. \quad (16)$$

Для поиска входящих в выражения для модулей констант применялась методика поиска минимума комбинированной невязки между экспериментальными и расчетными значениями, аналогичная описанной в разделе 2.

Функция релаксации представлялась суммой из  $N_e = 13$  экспонент. Времена релаксации  $\beta_i$  задавались распределенными равномерно на логарифмической шкале времени в интервале от 1 до  $10^7$  с. Константы  $C_i$  считались кусочно-линейной функцией от  $i$ , количество вершин ломаной, распределенных равномерно на интервале [1, 13], при этом составило  $N_v = 5$ .

Определялись следующие константы:  $E_0$ ,  $E_\infty$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  и пять ординат ломаной  $Yc_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ), описывающей функцию  $C_i(i)$ , – всего девять неизвестных коэффициентов.

Результаты поиска показаны в табл. 2 и на рис. 8.

Таблица 2

Материальные константы вязкоупругости стеклопластика

$E_0$ , ГПа	$E_\infty$ , ГПа	$D_1$	$D_2$ , °К
17,48	14,70	18,7	151

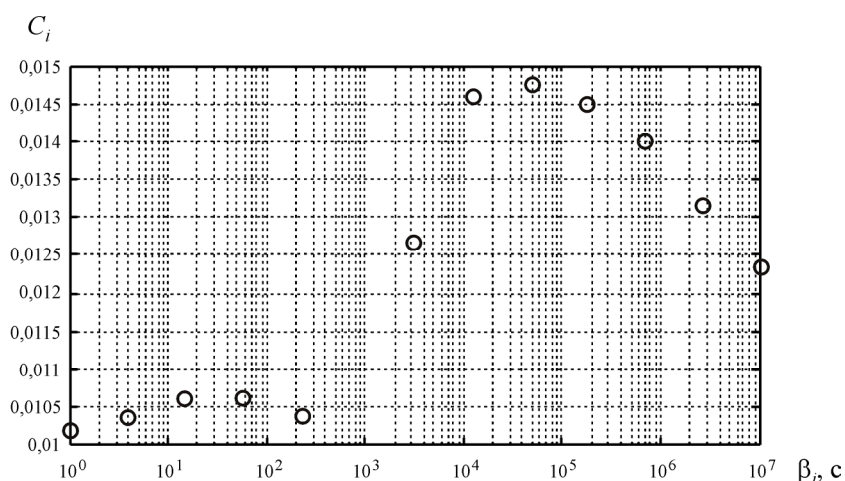


Рис. 8. Зависимость коэффициентов ядра релаксации стеклопластика  $C_i$  от времен релаксации  $\beta_i$ , с

Из анализа рис. 7 следует, что максимальная относительная погрешность расчетных результатов не превышает 6 %.

### 3.3. Верификационный эксперимент. Ступенчатый трехточечный изгиб с переменной температурой

Эксперимент проводился на описанных выше пластинчатых образцах. Всего было проведено два опыта. Графики изменения температуры и нагрузки во времени представлены на рис. 9. Там же показаны кривые измеренного перемещения точки приложения изгибающей силы.

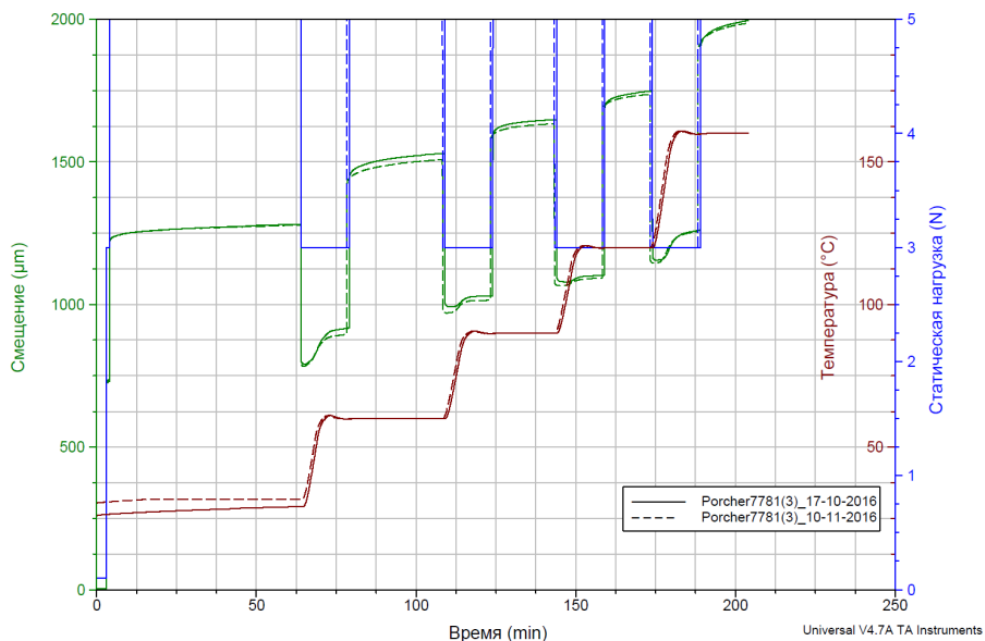


Рис. 9. Программа ступенчатого температурно-силового нагружения и измеренного перемещения при трехточечном изгибе пластинчатого стеклопластикового образца (результаты двух опытов)

Для численного моделирования данной краевой задачи использовался пакет ANSYS Mechanical APDL. На прямоугольную область продольного сечения пластины нанесена сетка изопараметрических элементов Plane183, работающих по схеме обобщенного плоского деформированного состояния. Материал считается изотропным, линейно-вязкоупругим (модель Prony). Вводится также гипотеза о постоянстве объемного модуля, коэффициент Пуассона при нормальных условиях  $\nu = 0,4$ . Константы модели Prony с учетом температурно-временного сдвига взяты из эксперимента. Температурная деформация не учитывается. Программа температурно-силового нагружения соответствует экспериментальной.

На рис. 10 красная кривая отражает расчетную зависимость перемещений в точке приложения силы от времени. Как видно на рисунке, отличие от экспериментальных данных довольно существенно, особенно на заключительных этапах нагружения. Это объясняется накоплением погрешности эксперимента, связанной с периодическим изменением знака нагрузки, а также температурной деформацией эле-



ментов трансмиссии испытательного оборудования. Для исключения данных факторов построены кривые перемещения контрольной точки по отдельности для каждого цикла ступенчатого увеличения нагрузки относительно начального для цикла значения перемещения (рис. 11).

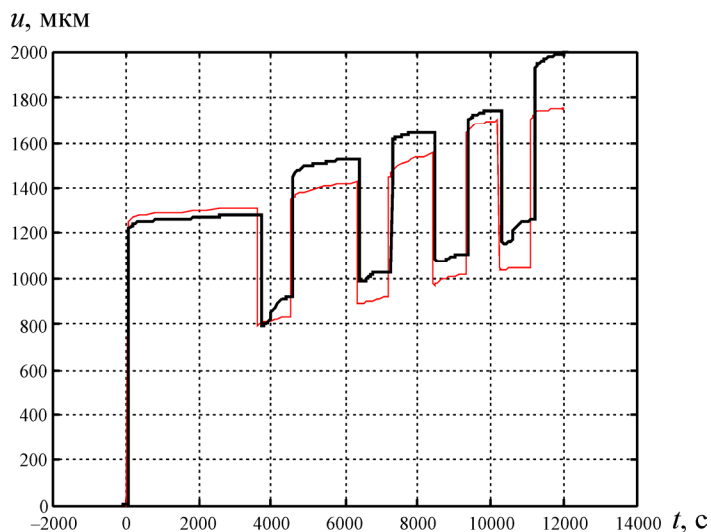


Рис. 10. Зависимость перемещений в контрольной точке, мкм, от времени, с. Жирная линия – эксперимент; тонкая – расчет в ANSYS

Для наглядности начало каждого цикла нагрузки смещено относительно предыдущего на 1000 с.

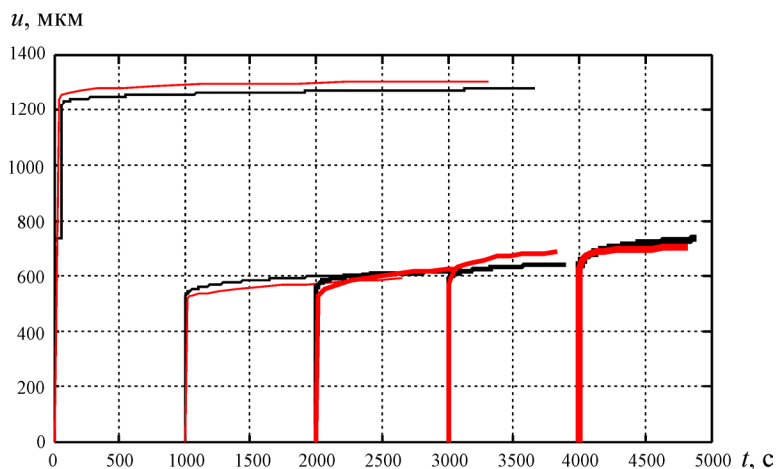


Рис. 11. Поэтапные относительные перемещения контрольной точки, мкм, от времени, с. Черные линии – эксперимент; красные – расчет в ANSYS

Рис. 11 можно интерпретировать как последовательность кривых ползучести при изгибе, построенных для различных постоянных во времени температур. Как видно на рисунке, в этом случае максимальная погрешность не превышает 7 %, что подтверждает адекватность предложенной физической модели.

Таким образом, в представленной работе построены феноменологические определяющие соотношения для волокнистых композитных материалов в условиях терморелаксационных (стеклование) переходов. Разработана и реализована методика экспериментальной идентификации полученной физической модели. На примере двух материалов – эпоксидного связующего и тканевого стеклопластика – получены термомеханические константы, входящие в модель. Экспериментальная верификация показала адекватность предложенного подхода. В дальнейшем планируется разработка численных алгоритмов многоуровневого прогнозирования эффективных свойств композитного стеклующегося материала по свойствам компонентов, основанная на представленной физической модели.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-48-590809 p\_a, 16-01-00474 А).*

### Список литературы

1. Бугаков И.И. Способ оценки остаточных температурных напряжений в полимерных телах // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 3. – С. 68–74.
2. Бугаков И.И. Определяющие уравнения для материалов с фазовым переходом // Механика твердого тела. – 1989. – № 3. – С. 111–117.
3. Болотин В.В., Воронцов А.Н., Мурзаханов Р.Х. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления // Механика композитных материалов. – 1990. – № 3. – С. 500–508.
4. Турусов Р.А. Механические явления в полимерах и композитах (в процессах формирования): дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1983.
5. Tomashevskii V.T., Yakovlev V.S. Models in the engineering mechanics of polymer-matrix composite systems // International Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 40, № 6. – P. 601–621.

6. Shaffer B.W., Lewitsky M. Thermoelastic constitutive equation for chemically hardening materials // *Journal of Appl. Mech.* – 1974. – Vol. 41, № 3. – P. 652–657.

7. Lewitsky M., Shaffer B.W. Residual thermal stresses in a solid sphere cast from a thermosetting material // *Journal of Appl. Mech.* – 1975. – Vol. 42, № 9. – P. 651–655.

8. Dupaix R.B., Boyce M.C. Constitutive modeling of the finite strain behavior of amorphous polymers in and above the glass transition // *Mechanics of Materials.* – 2006. – Vol. 39, № 1. – P. 39–52.

9. Varghese A.G., Batra R.C. Constitutive equations for thermo-mechanical deformation of glassy polymers // *International Journal of Solids and Structures.* – 2009. – № 46. – P. 4079–4094.

10. Liu C., Qin H., Mather P.T. Review of progress in shape-memory polymers // *J. Mater. Chem.* – 2007. – Vol. 17. – P. 1543–1558.

11. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling / Y.P. Liu, K. Gall, M.L. Dunn, A.R. Greenberg, J. Diani // *Int. J. Plast.* – 2006. – Vol. 22. – P. 279–313.

12. Dietsch B., Tong T. A review: features and benefits of shape memory polymers (SMPs) // *J. Adv. Mater.* – 2007. – Vol. 39. – P. 3–12.

13. Gunes I.S., Jana S.C. Shape memory polymers and their nanocomposites: a review of science and technology of new multifunctional materials // *J. Nanosci. Nanotechnol.* – 2008. – Vol. 8. – P. 1616–1637.

14. Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю., Труфанов А.Н. Модели формирования полей технологических и остаточных напряжений в условиях релаксационного перехода (стеклования) // *Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского.* – 2011. – № 4 (5). – С. 2534–2536.

15. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition / V.P. Matveenko, O.Yu. Smetannikov, N.A. Trufanov, I.N. Shardakov // *Acta Mechanica.* – 2012. – Vol. 223, № 6. – P. 1261–1284.

16. Сметанников О.Ю., Самусев И.В. Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 105–116.

17. Constitutive relations for viscoelastic materials under thermorelaxation transition / V.P. Matveenko, O.Yu. Smetannikov, N.A. Trufanov, I.N. Shardakov // *Acta Mechanica.* – 2015. – Vol. 226, № 7. – P. 2177–2194.

18. ГОСТ ИСО 10112–2002. Материалы демпфирующие. Графическое представление комплексных модулей упругости. – М., 2002.

### References

1. Bugakov I.I. Spособ otsenki ostatochnykh temperaturnykh napriazhenii v polimernykh telakh // Izv. AN SSSR. MTT. - 1978. - № 3. - S. 68-74.

2. Bugakov I.I. Opredel'aiushchie uravneniia dlia materialov s fazovym perekhodom // Mekhanika tverdogo tela. - 1989. - № 3. - S. 111-117.

3. Bolotin V.V., Vorontsov A.N., Murzakhanov R.Kh. Analiz tekhnologicheskikh napriazhenii v namotochnykh izdeliakh iz kompozitov na protiazhenii vsego protsessa izgotovleniia // Mekhanika kompozitnykh materialov. - 1990. - №3. - S. 500-508.

4. Turusov R.A. Mekhanicheskie iavleniia v polimerakh i kompozitakh (v protsessakh formirovaniia). Diss...dokt. fiz.-mat. nauk. - M., 1983.

5. Tomashevskii V.T., Yakovlev V.S. Models in the engineering mechanics of polymer-matrix composite systems // International Applied Mechanics. 2004. T. 40. № 6. C. 601-621.

6. Shaffer B.W., Lewitsky M. Thermoelastic Constitutive Equation for Chemically Hardening Materials // Journal of Appl. Mech. - vol. 41. - № 3 // Trans. Asme. - vol. 96.- ser. E.- Sept. - 1974. - p. 652-657.

7. Lewitsky M., Shaffer B.W. Residual Thermal Stresses in a Solid Sphere Cast From a Thermosetting Material // Journal of Appl. Mech. - 1975. - 42. - № 9. - p. 651-655.

8. Dupaix, R.B., Boyce, M.C. Constitutive Modeling of the Finite Strain Behavior of Amorphous Polymers in and above the Glass Transition // Mechanics of Materials, 39, 1, 39-52, 2006.

9. Varghese A.G., Batra R.C. Constitutive Equations for Thermo-mechanical Deformation of Glassy Polymers // International Journal of Solids and Structures, 46 (2009), pp. 4079-4094.

10. Liu C., Qin H., Mather P.T. Review of progress in shape-memory polymers // J. Mater. Chem. - 2007, V. 17. - P. 1543-1558.

11. Liu Y.P., Gall K., Dunn M.L., Greenberg A.R., Diani J. Thermomechanics of shape memory polymers: uniaxial experiments and constitutive modeling // Int. J. Plast. - 2006, V. 22. - P. 279-313.

12. Dietsch B, Tong T. A review: features and benefits of shape memory polymers (SMPs) // J. Adv. Mater. - 2007, V. 39. - P. 3-12.
13. Gunes I.S., Jana S.C. Shape memory polymers and their nanocomposites: a review of science and technology of new multifunctional materials // J. Nanosci. Nanotechnol. - 2008, V. 8. - P. 1616-1637.
14. Trufanov N.A., Smetannikov O.Iu., Trufanov A.N. Modeli formirovaniia polei tekhnologicheskikh i ostatochnykh napriazhenii v usloviiaxh relaksatsionnogo perekhoda (steklovaniiia) // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo. - 2011, № 4(5). - S. 2534-2536.
15. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // Acta Mechanica. - 2012, V. 223, N 6. - P. 1261-1284.
16. Smetannikov O.Iu., Samusev I.V. Eksperimental'naia identifikatsiia parametrov opredeliaiushchikh sootnoshenii dlia fotopolimernogo kompozita // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. – 2013, T. 19. № 1. - S. 105-116.
17. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Constitutive relations for viscoelastic materials under thermorelaxation transition // Acta Mechanica. - 2015, V. 226, N 7. - Pp. 2177-2194.
18. GOST ISO 10112-2002. Materialy dempfiruiushchie. Graficheskoe predstavlenie kompleksnykh modulei uprugosti.

Получено 02.12.2017

### **Об авторах**

**Сметанников Олег Юрьевич** (Пермь, Россия) – доктор технических наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 49, e-mail: sou2009@mail.ru).

**Ильиных Глеб Валентинович** (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Вычислительная математика и механика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 49, e-mail: ilinykh.pnpu@yandex.ru).

### **About the authors**

**Oleg Iu. Smetannikov** (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of Computational Mathematics and Mechanics Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: sou2009@mail.ru).

**Gleb V. Il'inykh** (Perm, Russian Federation) – Postgraduate Student, Computational Mathematics and Mechanics Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: ilinykh.pnpu@ yandex.ru).