

УДК 517.929

М.В. Мулюков

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрена модель перевернутого маятника с запаздывающей обратной связью. Модель представляет собой линейное автономное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя сосредоточенными запаздываниями. Соотношение запаздываний составляет один к двум. Найден критерий асимптотической устойчивости этого уравнения методом *D*-разбиения.

Ключевые слова: перевернутый маятник, дифференциальные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, эффективные признаки, *D*-разбиение.

M.V. Mulyukov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

STABILITY OF INVERTED PENDULUM WITH DELAYED FEEDBACK

A model of an inverted pendulum with delayed feedback is considered. The model is a second order linear autonomous differential equation with two delays. The ratio of delays is one to two. The criterion for the asymptotic stability of the equation is obtained by the method of *D*-subdivision.

Keywords: inverted pendulum, delay differential equations, asymptotic stability, effective criteria, *D*-subdivision.

Введение

Задача об устойчивости перевернутого маятника привлекает внимание исследователей в связи с моделированием системы равновесия человеческого тела. Запаздывание в механизме обратной связи обусловлено взаимодействием нейронов. Учет его влияния на устойчивость перевернутого маятника является актуальным направлением исследований [1–6]. Модели, основанные на автономных дифференциальных уравнениях второго порядка с сосредоточенными запаздываниями, появились первыми и остаются востребованными [7–10; 11, с. 118–129]. Исследованию уравнений такого типа посвящено большое количество литературы [12–18; 19, с. 130].

Рассмотрим модель перевернутого маятника с запаздывающим механизмом обратной связи. Пусть маятник занимает неустойчивое положение равновесия. Обозначим отклонение от положения равновесия через x . Будем предполагать, что в механизме обратной связи может быть реализовано только сосредоточенное запаздывание в упругой силе. Тогда уравнение для линейного приближения имеет вид

$$\ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = \sum_{n=1}^N k_n x(t - h_n), \quad (1)$$

где ω – собственная частота свободных колебаний маятника, $k_n \in \mathbb{R}$ и $h_n > 0$.

Для корректной постановки задачи решение необходимо доопределить начальной функцией ψ при отрицательных значениях аргумента:

$$x(\xi) = \psi(\xi) \text{ при } \xi \in [-h, 0], \quad (2)$$

где функция ψ суммируема на отрезке $[-h, 0]$.

Решение уравнения (1), дополненное условием (2) и начальными условиями $x(0), \dot{x}(0) \in \mathbb{R}$, в пространстве функций с локально абсолютно непрерывными производными существует, единственно и представимо в виде

$$x(t) = X_1(t)x(0) + X_2(t)\dot{x}(0) + \sum_{n=1}^N k_n \int_0^{\min\{t, h_n\}} X_1(t-s)x(s-h_n) ds, \quad (3)$$

где функции X_1, X_2 называются *фундаментальными решениями* и являются решениями уравнения (1) при условиях $X_1(0) = \dot{X}_2(0) = 1$, $\dot{X}_1(0) = X_2(0) = 0$ и $X_1(\xi) = X_2(\xi) = 0$ при $\xi \in [-h, 0]$ [20–22].

Из представления (3) вытекает, что асимптотические свойства любого решения уравнения (1) определяются свойствами фундаментальных решений.

В частности, уравнение (1) называется *асимптотически устойчивым*, если $X_1(t)$ и $X_2(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Из (3) видно, что асимптотическая устойчивость уравнения (1) эквивалентна тому, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ при любой суммируемой начальной функции и любых вещественных $x(0), \dot{x}(0)$.

В силу автономности уравнения (1) фундаментальные решения стремятся к нулю в том и только том случае, когда существуют положительные константы M , σ , такие что $|X_i(t)| < Me^{-\sigma t}$ при $t \geq 0$, $i = 1, 2$.

Применив к фундаментальным решениям преобразование Лапласа, получим следующие представления для их Лаплас-образов:

$$\mathcal{L}\{X_1(t)\} = 1/\Phi(z), \quad \mathcal{L}\{X_2(t)\} = z/\Phi(z),$$

где Φ называется характеристической функцией уравнения (1) и имеет вид

$$\Phi(z) = z^2 - \omega^2 - \sum_{n=1}^N k_n e^{-h_n z}. \quad (4)$$

Оценки $|X_i(t)| < Me^{-\sigma t}$, $i = 1, 2$, имеют место в том и только том случае, когда все корни функции (4) лежат слева от мнимой оси [23, с. 209].

Будем называть функцию комплексной переменной *устойчивой*, если все ее корни лежат слева от мнимой оси.

Рассмотрим функцию $f(z) = z^2 + a + be^{-hz}$ и переформулируем установленный в работе [16] признак устойчивости.

Утверждение 1. *Для того чтобы функция f была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{cases} (-1)^n b < 0, \\ \pi^2 n^2 h^{-2} + |b| < a < \pi^2 (n+1)^2 h^{-2} - |b|, \end{cases}$$

где n – целая часть числа $h\pi^{-1}\sqrt{a}$.

Таким образом, если $N = 1$, то при любых $k_1 \in \mathbb{R}$ и $h_1 > 0$ функция Φ имеет корни с положительной вещественной частью, поэтому невозможно подобрать такой механизм обратной связи с одним сосредоточенным запаздыванием в упругой силе, чтобы тривиальное положение равновесия перевернутого маятника было локально асимптотически устойчивым.

Можно ли подобрать механизм обратной связи, включающий в себя два сосредоточенных запаздывания, стабилизирующий триви-

альное положение равновесия перевернутого маятника? При этом интересно получить не только достаточные, но и необходимые условия асимптотической устойчивости линейного приближения.

Уравнение (1) при $N = 2$ принимает вид

$$\ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = k_1 x(t - h_1) + k_2 x(t - h_2). \quad (5)$$

Точная область устойчивости данного уравнения для произвольного отношения запаздываний имеет, по-видимому, очень сложную структуру. Однако если отношение h_2 к h_1 фиксировано и рационально, то можно рассчитывать получить критерий устойчивости уравнения (5).

2. Критерий устойчивости уравнения (5) для случая $h_2 = 2h_1$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда отношение запаздываний равно двум. Обозначив h_1 через h , перепишем уравнение (5) в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - \omega^2 x(t) = k_1 x(t - h) + k_2 x(t - 2h), \\ x(\xi) = \psi(\xi), \xi \in [-h, 0). \end{cases} \quad (6)$$

Характеристическая функция системы (6) имеет вид

$$\Phi(z) = z^2 - \omega^2 - k_1 e^{-hz} - k_2 e^{-2hz}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию $F(z) = e^z \Phi(z/h)$. Функции F и Φ являются устойчивыми или не являются таковыми одновременно. Имеем

$$F(z) = z^2 e^z + \chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \beta, \quad (8)$$

где $\chi = -h^2(k_2 + \omega^2)$, $\zeta = h^2(k_2 - \omega^2)$ и $\beta = -h^2 k_1$.

Сначала найдем критерий устойчивости функции (8) в терминах ее коэффициентов, затем полученный критерий применим для функции (7).

Будем фиксировать параметр ζ и исследовать функцию F методом D -разбиения в плоскости параметров (χ, β) .

Каждой точке \mathbf{a} этой плоскости поставим в соответствие число $\rho(\mathbf{a})$, равное количеству корней функции F с неотрицательной ве-

вещественной частью. Это число всегда конечно, будем его называть абсолютным индексом точки.

При непрерывном изменении χ , ζ корни функции F с положительной правой частью могут появляться только вследствие перехода через мнимую ось. Найдем условия на параметры χ и β , при которых F имеет корни с нулевой вещественной частью. Для этого разделим вещественную и мнимую части уравнения $F(i\varphi) = 0$:

$$\begin{cases} \chi \cos \varphi + \beta = \varphi^2 \cos \varphi, \\ \zeta \sin \varphi = \varphi^2 \sin \varphi. \end{cases} \quad (9)$$

Второе уравнение системы (9) обращается в тождество, если $\varphi = \pi n$ или $\zeta = \varphi^2$.

Подставив $\varphi = \pi n$ в первое уравнение, получаем прямую в плоскости (χ, β) , которую будем обозначать через L_n . Данная прямая задается уравнением $\beta = (-1)^n (\pi^2 n^2 - \chi)$. Заметим, что прямые, номера которых имеют одинаковую четность, параллельны.

Подставив $\zeta = \varphi^2$ в первое уравнение, получаем прямую $\beta = (\zeta - \chi) \sin \sqrt{\zeta}$, которую будем обозначать через L^* . Данная прямая существует только при $\zeta \geq 0$ и совпадает с L_n при $\zeta = \pi^2 n^2$.

Прямые L_n и L^* разбивают плоскость (χ, β) на связные выпуклые области, которые будем называть *областями D-разбиения*. Все точки некоторой области D -разбиения M имеют один и тот же абсолютный индекс, поэтому это число будем называть *абсолютным индексом* области M и обозначать $\rho(M)$.

Итак, основная задача – найти область с нулевым абсолютным индексом. Областей D -разбиения бесконечно много, поэтому перебрать их все невозможно и необходимо провести анализ возрастания вещественной части корня при переходе через эти прямые. Для этого приведем в удобной для нас форме теорему о неявном операторе [24].

Утверждение 2. *Рассмотрим точку \mathbf{a} , принадлежащую прямой L_n или L^* , такую что $F'(z) \neq 0$. В окрестности точки \mathbf{a} существует единственная аналитическая функция $Z_{\mathfrak{g}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, такая что*

$Z_{\vartheta}(\mathbf{a}) = i\vartheta$ и $F(Z_{\vartheta}(\chi, \beta)) \equiv 0$, где $\vartheta = \pi n$ для прямой L_n и $\vartheta = \sqrt{\zeta}$ для прямой L^* . Кроме того, имеет место формула

$$\bar{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\vartheta}(\mathbf{a}) = \operatorname{Re} \frac{1}{F'(i\vartheta)} \{\cos \vartheta, 1\}. \quad (10)$$

Если вектор $\bar{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\vartheta}$ ненулевой, то его направление определяет возрастание вещественной части корня при переходе через прямые $\{L_n\}$ и L^* . При этом при переходе через L_0 индекс области меняется на единицу, а через любую другую прямую – на двойку. В первом случае через мнимую ось перешел простой корень, приняв нулевое значение, во втором – перешла пара простых комплексно-сопряженных корней.

Применим утверждение 2 к прямым L_n . В данном случае имеем $F'(i\pi n) = (-1)^n (\zeta - \pi^2 n^2 + 2\pi ni)$, следовательно, данное утверждение не применимо только к прямой L_0 и только в случае $\zeta = 0$. В противном случае из (10) вытекает формула

$$\bar{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\pi n} = \frac{\pi^2 n^2 - \zeta}{|F'(i\vartheta)|^2} \{(-1)^n, 1\}. \quad (11)$$

Итак, прямая L_n разбивает плоскость (χ, β) на две полуплоскости. Обозначим через Π_n ту из них, в которую направлен вектор $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\pi n}$. Из (11) вытекает, что Π_n задается неравенством

$$((-1)^n \beta + \chi - \pi^2 n^2)(\zeta - \pi^2 n^2) > 0.$$

Обозначим через D_0 пересечение всех Π_n , таких что $\zeta \neq \pi^2 n^2$.

Рассмотрим точку \mathbf{b} с координатами $\{\sqrt{|\zeta|} \operatorname{sgn} \zeta, 0\}$. Точка \mathbf{b} , очевидно, принадлежит D_0 и L^* . Выберем произвольную точку \mathbf{c} , не принадлежащую ни области D_0 , ни одной из линий L^*, L_0, L_1, \dots

Обозначим через \mathbf{d}_n точку пересечения отрезка \mathbf{bc} с прямой L_n . Имеем $(\bar{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\pi n}(\mathbf{d}_n), \overline{\mathbf{bc}}) > 0$ по определению Π_n , следовательно, $\rho(\mathbf{c}) > 0$.

Итак, область с нулевым абсолютным индексом в плоскости (χ, β) либо не существует, либо является подмножеством D_0 .

Лемма 1. Если $\zeta < 0$, то областей с нулевым абсолютным индексом не существует.

Доказательство. Область D_0 является внутренностью бесконечного угла, образованного лучами прямых L_0 и L_1 , и задается системой неравенств

$$\begin{cases} \chi + \beta < 0, \\ \chi - \beta < \pi^2. \end{cases}$$

С другой стороны, если $\chi + \beta < 0$, то $F(0) < 0$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = +\infty$ при $z \in \mathbb{R}$, следовательно, F имеет вещественный положительный корень. Таким образом, абсолютный индекс области D_0 положителен. \square

Лемма 2. Если $\zeta = \pi^2 n^2$, то функция F неустойчива.

Доказательство. Согласно утверждению 1 функция $f(z) = \alpha + \gamma e^{-2z} + z^2$ не является устойчивой при $\alpha - \gamma = \pi^2 n^2$, поэтому функция F не является устойчивой при $\zeta = \pi^2 n^2$, $\beta = 0$ и любом вещественном χ .

Прямая L^* совпадает с L_n и разбивает D_0 на две подобласти, каждая из которых содержит участки прямой $\beta = 0$ и, следовательно, имеет положительный абсолютный индекс. \square

Применим утверждения 1 к прямой L^* . В данном случае имеем $F'(i\sqrt{\zeta}) = 2\sqrt{\zeta} (i \cos \sqrt{\zeta} - \sin \sqrt{\zeta})$, следовательно, данное утверждение применимо к прямой при любом $\zeta > 0$. Далее из (10) получаем

$$\bar{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\sqrt{\zeta}} = \frac{2\sqrt{\zeta} \sin \sqrt{\zeta}}{|F'(i\vartheta)|^2} \{ \cos \sqrt{\zeta}, 1 \}. \quad (12)$$

Прямая L^* разбивает плоскость (χ, β) на две полуплоскости. Обозначим через Π^* ту из них, в которую направлен вектор $-\nabla \operatorname{Re} Z_{\sqrt{\zeta}}$. Из (12) вытекает, что Π^* задается неравенством

$$(\beta + (\chi - \zeta) \cos \sqrt{\zeta}) \sin \sqrt{\zeta} < 0.$$

Обозначим $D_1 = D_0 \cap \Pi^*$. На рис. 1 и 2 границы области D_0 обведены жирными линиями, а область D_1 закрашена.

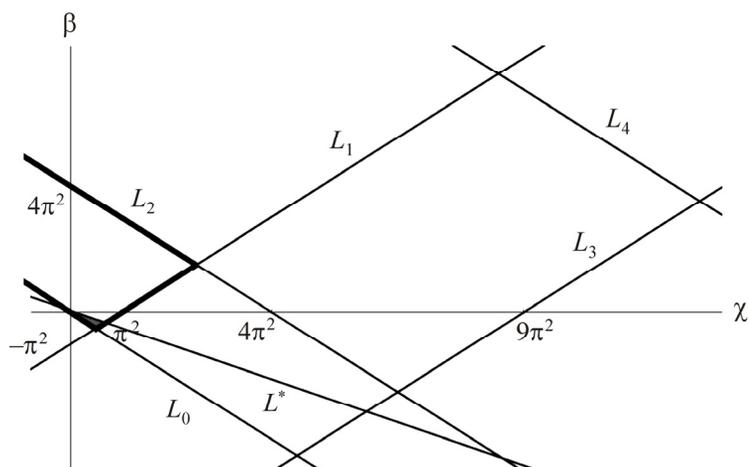


Рис. 1. Области D -разбиения при $\zeta = 1$

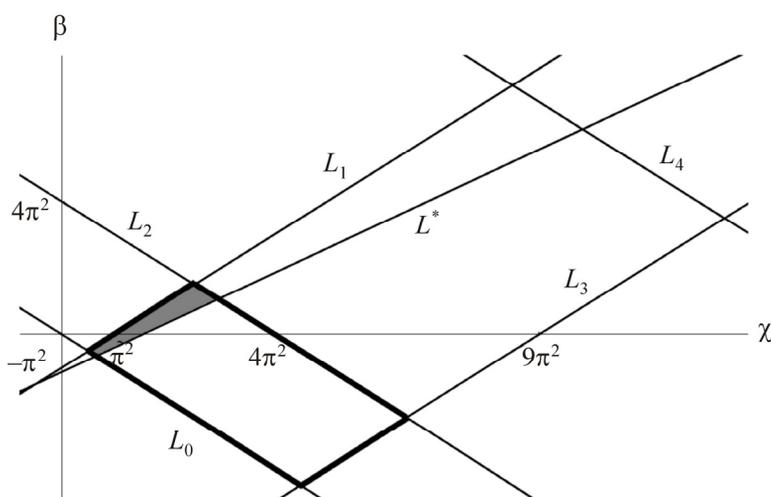


Рис. 2. Области D -разбиения при $\zeta = 15$

Теорема 1. Для того чтобы функция (10) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $\zeta > 0$, $\sqrt{\zeta}/\pi$ не является целым числом, точка $\{\chi, \beta\}$ принадлежит D_1 .

Доказательство. Прямая L^* разбивает D_0 на две области: D_1 и $D_0 \setminus D_1$. По доказанному выше абсолютный индекс любой другой области D -разбиения положителен.

По определению Π^* вектор $\vec{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\sqrt{\zeta}}(\mathbf{b})$ направлен внутрь области $D_0 \setminus D_1$, поэтому $\rho(D_0) + 2 = \rho(\mathbf{b}) = \rho(D_1) = 0$.

В точке \mathbf{b} имеем $F(z) = e^z (z^2 + \zeta)$, поэтому $\rho(\mathbf{b}) = 2$, следовательно, область D_1 , и только она, имеет нулевой абсолютный индекс. \square

Нетрудно найти явное описание области D_0 . Если $\sqrt{\zeta} < \pi$, то эта область задается неравенствами $0 < \chi + \beta < 4\pi^2$ и $\chi - \beta < \pi^2$. Если же $\sqrt{\zeta} \in (\pi n, \pi(n+1))$ при натуральных n , то D_0 является внутренностью прямоугольника и задается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} \pi^2 n^2 < \chi + (-1)^n \beta < \pi^2 (n+2)^2, \\ \pi^2 (n-1)^2 < \chi - (-1)^n \beta < \pi^2 (n+1)^2. \end{cases} \quad (13)$$

Следствие 1. Пусть $\chi < 0$. Для того чтобы функция (8) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} 0 < \zeta < \pi^2/4, \\ \chi + \beta > 0, \\ \beta + (\chi - \zeta) \cos \sqrt{\zeta} < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Доказательство. Если выполняется система (13), то $\chi > 0$. Следовательно, функция F устойчива в том и только том случае, когда $\zeta < \pi^2$, $\chi + \beta > 0$, $\chi + \beta < 4\pi^2$, $\chi - \beta < \pi^2$ и $\beta + (\chi - \zeta) \cos \sqrt{\zeta} < 0$.

Исключим лишние неравенства. При условии $\chi < 0$ первое и последнее неравенства совместны, если и только если $0 < \beta < \zeta (1 - \cos \sqrt{\zeta})^{-1} \cos \sqrt{\zeta}$, откуда получаем $\zeta < \pi^2/4$, $\chi - \beta < 0 < \pi^2$ и

$$\chi + \beta < \beta < \left(\frac{\sqrt{\zeta}}{\sin \sqrt{\zeta}} \right)^2 \cos \sqrt{\zeta} (1 + \cos \sqrt{\zeta}) < \frac{\pi^2}{2} < 4\pi^2. \quad \square$$

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (6) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} 0 < -k_1 < 2k_2, \\ k_2 + \omega^2 < -k_1, \\ h < \frac{1}{\sqrt{k_2 - \omega^2}} \arccos \left(-\frac{k_1}{2k_2} \right). \end{cases} \quad (15)$$

Доказательство. Если F устойчива, то $\zeta > 0$, следовательно, функция Φ устойчива только при $k_2 > 0$. Таким образом, для исследования устойчивости функции Φ достаточно рассмотреть F при $\chi < 0$, т.е. мы в условиях применимости следствия 1. Система (15) эквивалентна системе (14), если в последней положить $\chi = -h^2(k_2 + \omega^2)$, $\zeta = h^2(k_2 - \omega^2)$ и $\beta = -h^2k_1$. \square

Проведенные исследования позволяют положительно ответить на вопрос о возможности стабилизации обратного маятника посредством двух запаздываний в упругой обратной связи. При этом полученный критерий может быть полезен для анализа бифуркаций в нелинейных моделях, линейное приближение которых имеет вид (6).

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ, проект 1.5336.2017/8.9.

Список литературы

1. Campbell S.A., Crawford S., Morris K. Time delay and feedback control of an inverted pendulum with stick slip friction // Proceedings of ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2007. – Las Vegas, 2007. – P. 749–756.

2. Insperger T., Milton J., Stepan G. Acceleration feedback improves balancing against reflex delay // *J. R. Soc. Interface.* – 2013. – Vol. 10, № 79. – URL: <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2012.0763> (дата обращения: 09.10.2017).

3. Kollar L.E., Stepan G., Hogan S.J. Sampling delay and backlash in balancing systems // *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering.* – 2000. – Vol. 44, № 1. – P. 77–84.

4. Konishi K., Kokame H., Hara N. Delayed feedback control based on the act-and-wait concept // *Nonlinear Dynamics.* – 2011. – Vol. 63, № 3. – P. 513–519.

5. Effect of intermittent feedback control on robustness of human-like postural control system / H. Tanabe, K. Fujii, Y. Suzuki, M. Kouzaki // *Scientific Reports.* – 2016. – № 6.

6. Intermittent feedback-control strategy for stabilizing inverted pendulum on manually controlled cart as analogy to human stick balancing / N. Yoshikawa, Y. Suzuki, K. Kiyono, T. Nomura // *Front. Comput. Neurosci.* – 2016. – URL: <https://doi.org/10.3389/fncom.2016.00034> (дата обращения: 10.10.2017).

7. Dynamics of an inverted pendulum with delayed feedback control / M. Landry, S.A. Campbell, K. Morris, C.O. Aguilar // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* – 2005. – № 4 (2). – P. 333–351.

8. The time-delayed inverted pendulum: implications for human balance control / J. Milton, J.L. Cabrera, T. Ohira, S. Tajima, Y. Tonosaki, C.W. Eurich, S.A. Campbell // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* – 2009. – Vol. 19, № 2. – URL: <https://doi.org/10.1063/1.3141429> (дата обращения: 13.10.2017).

9. Sieber J., Krauskopf B. Bifurcation analysis of an inverted pendulum with delayed feedback control near a triple-zero eigenvalue singularity // *Nonlinearity.* – Vol. 17. – № 1. – URL: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/1/006> (дата обращения: 13.10.2017).

10. Stepan G. Delay effects in the human sensory system during balancing // *Phil. Trans. R. Soc. A.* – 2009. – Vol. 367, № 1891. – P. 1195–1212.

11. Stepan G. Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. – New York: Longman Scientific & Technical, 1989. – 151 p.

12. Мулюков М.В. Устойчивость одной линейной модели осциллятора с запаздывающей обратной связью // *Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика.* – 2014. – № 4 (27). – С. 62–67.

13. Мулюков М.В. Устойчивость линейного автономного осциллятора с запаздывающей обратной связью // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2015. – № 3 (30). – С. 5–11.

14. Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 170, № 1. – P. 79–102.

15. Campbell S.A. Stability and bifurcation in the harmonic oscillator with multiple, delayed feedback loops // Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems. – 1999. – № 5. – P. 225–235.

16. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. – 1966. – Vol. 33, № 1. – P. 113–118.

17. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. – 1966. – Vol. 33, № 2. – P. 119–124.

18. Malakhovskii E., Mirkin L. On stability of second-order quasipolynomials with a single delay // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 1041–1047.

19. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

20. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.

21. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 6. – С. 3–15.

22. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Н.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

23. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: МИР, 1963. – 548 с.

24. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.

References

1. S.A. Campbell, S. Crawford, K. Morris. Time delay and feedback control of an inverted pendulum with stick slip friction / Proceedings of ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences &

Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2007. USA: Las Vegas, September 4-7, 2007. PP. 749-756.

2. Insperger T., Milton J., Stepan G. Acceleration feedback improves balancing against reflex delay // *J.R.Soc.Interface*. 2013. – V. 10. – № 79. available at: <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2012.0763>.

3. Kollar L.E., Stepan G., Hogan S.J. Sampling delay and backlash in balancing systems // *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*. 2000 – V. 44. – № 1. PP. 77-84.

4. Konishi K., Kokame H., Hara N. Delayed feedback control based on the act-and-wait concept // *Nonlinear Dynamics*. 2011. – V. 63. – № 3. PP. 513-519.

5. Tanabe H. Effect of intermittent feedback control on robustness of human-like postural control system / Tanabe H., Fujii K., Suzuki Y., Kouzaki M. // *Scientific Reports*. 2016. – № 6.

6. Yoshikawa N. Intermittent Feedback-Control Strategy for Stabilizing Inverted Pendulum on Manually Controlled Cart as Analogy to Human Stick Balancing / Yoshikawa N., Suzuki Y., Kiyono K., Nomura T. // *Front. Comput. Neurosci.* 2016. available at <https://doi.org/10.3389/fncom.2016.00034>.

7. Landry M. Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback Control / Landry M., Campbell S.A., Morris K., Aguilar C.O. // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005. – № 4(2) . – P. 333–351.

8. Milton J. The time-delayed inverted pendulum: Implications for human balance control / Milton J., Cabrera J.L., Ohira T., Tajima S., Tonosaki Y., Eurich C.W., Campbell S.A. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2009 – Vol. 19. – № 2. available at <https://doi.org/10.1063/1.3141429>.

9. Sieber J., Krauskopf B. Bifurcation analysis of an inverted pendulum with delayed feedback control near a triple-zero eigenvalue singularity // *Nonlinearity*. – Vol. 17. – № 1. available at <https://doi.org/10.1088/0951-7715/17/1/006>.

10. Stepan G. Delay effects in the human sensory system during balancing // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2009 – Vol. 367. – № 1891. PP. 1195-1212.

11. Stepan G. Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. – New York: Longman Scientific & Technical, 1989. – 151 p.

12. Mulyukov M.V. Ustoichivost' odnoi lineinoi modeli ostsillatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu // Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2014. – № 4(27). – С. 62-67.

13. Mulyukov M.V. Ustoichivost' lineinogo avtonomnogo ostsillatora s zapazdyvaiushchei obratnoi sviaz'iu // Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2015. – № 3(30). – С. 5-11.

14. Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients // J. of Computational and Applied Mathematics. 2004. – Vol. 170. – № 1. P. 79-102.

15. Campbell S.A. Stability and bifurcation in the harmonic oscillator with multiple, delayed feedback loops // Dynamics of continuous discrete and impulsive systems. 1999. – № 5. P. 225-235.

16. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. 1966. – V. 33. – № 1. P. 113-118.

17. Hsu C.S., Bhatt S.J. Stability charts for second-order dynamical systems with time lag // J. Appl. Mech. 1966. – V. 33. – № 2. P. 119-124.

18. Malakhovskii E., Mirkin L. On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay // Automatica. 2006. – V. 42. – P. 1041-1047.

19. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otkloniaiushchimsia argumentom. – M.: Izd-vo «Nauka», 1971. – 296 s.

20. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoichivost' reshenii uravnenii s obyknovennymi proizvodnymi. – Perm': Izd-vo Permsk. un-ta, 2001. – 230 s.

21. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoichivost' uravnenii s zapazdyvaiushchim argumentom // Izv. vuzov. Matem. 1997. – № 6. – S. 3-15.

22. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina N.F. Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. – M.: Izd-vo «Nauka. Gl. red. fiz. mat. lit.», 1991. – 280 s.

23. Bellman R., Kuk K.L. Differentsial'no-raznostnye uravneniia. – M.: Izd-vo «MIR», 1963. – 548 s.

24. Trenogin V.A. Funktsional'nyi analiz. – M.: Izd-vo «Fizmatlit». – 488 s.

Получено 04.12.2017

Об авторе

Мулюков Михаил Вадимович (Пермь, Россия) – инженер-исследователь, НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mulykoff@gmail.com).

About the author

Mikhail V. Mulyukov (Perm, Russian Federation) – Research Engineer, Research Center “Functional Differential Equations”, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: mulykoff@gmail.com).