УДК 517.929.2, 512.622

А.А. Кандаков, К.М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ЭФФЕКТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача экспоненциальной устойчивости автономного разностного уравнения, сводящаяся к задаче Шура–Кона определения количества корней многочлена, расположенных внутри единичного круга комплексной плоскости. В отличие от известных подходов, использующих методы комплексного анализа и линейной алгебры или сведение к задаче Рауса–Гурвица о количестве корней многочлена в левой полуплоскости, в статье предлагается доказательство теоремы Шура–Кона методом *D*-разбиения. Предлагаемый подход отличается простотой и в явном виде связывает классические методы, традиционно рассматриваемые как независимые.

Ключевые слова: разностное уравнение, характеристический многочлен, устойчивость, метод *D*-разбиения, критерий Шура–Кона.

A.A. Kandakov, K.M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

EFFECTIVE STABILITY CRITERION FOR A DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM

We consider the problem of the exponential stability of an autonomous difference equation. As is known, the problem is reduced to the Schur–Cohn problem of obtaining the number of roots of a polynomial which are inside the unit circle of the complex plane. In contrast to known approaches based on the methods of complex analysis and linear algebra, or on the reduction to the Routh–Hurwitz problem for the number of roots of a polynomial in the left half-plane, we propose the proof of the Schur–Cohn theorem by using the D-decomposition method. The presented approach is simple and explicitly relates the classical methods traditionally considered as independent.

Keywords: difference equation, characteristic polynomial, stability, D-decomposition method, Schur–Cohn criterion.

Введение

Термин «теория динамических систем» в течение нескольких десятилетий фактически указывал на качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, в первую очередь применительно к автономным системам вида $\dot{x} = f(x)$, где $x = x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, при линеаризации приводящим к системе $\dot{x} = Ax$, где A – квадратная $(m \times m)$-матрица. В конце XX в. стало быстро возрастать теоретическое и практическое значение исследований дискретных систем вида $x(n+1) = f(x(n))$, в связи с чем само понятие «динамическая система» все реже стало пониматься как система, описываемая только дифференциальными уравнениями. Сегодня системами разностных уравнений моделируются задачи автоматического регулирования, теории управления, а также разнообразные задачи экономики, биологии, химии, экологии (описания некоторых приложений см. в работах [1, 2]).

Для линейных разностных уравнений построена теория устойчивости [3, 4], подобная классической теории устойчивости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость системы $x(n+1) = Ax(n)$ определяется расположением корней характеристического многочлена матрицы A внутри единичного круга.

Задача об определении условий расположения всех корней многочлена внутри единичного круга была впервые рассмотрена как приложение исследования степенных рядов И. Шуром, который в работе [5] получил алгоритм для проверки, все ли корни находятся в единичном круге. А. Кон, используя методы И. Шура, получил в работе [6] алгоритм для определения числа корней многочлена в круге. Формально эта задача сводится дробно-линейным преобразованием комплексной плоскости к задаче о расположении корней в левой полуплоскости, которая, как известно, равносильна задаче об условиях устойчивости линейной системы $\dot{x} = Ax$. Задаче о расположении корней многочлена относительно мнимой оси посвящено большое количество литературы; достаточно полное изложение классической теории содержится, в частности, в известных монографиях [7, гл. XVI; 8]. Однако для решения прикладных вопросов важны алгоритмы определения наличия корней в тех или иных областях комплексной плоскости, явно выраженные через коэффициенты исходного многочлена. Для единичного круга такой алгоритм был получен И. Шуром и А. Коном. В последующие десятилетия было найдено много переформулировок критериев Шура–Кона. В литературе XX в. выделим монографию М. Мардена [9] о многочленах, содержащую отдельную главу, посвященную задаче Шура–Кона, и книги Э. Джури [10, 11], посвященные методам качественного исследования дискретных динамических систем. По-видимому, наиболее полный современный обзор результатов исследования условий расположения корней многочлена в единичном круге содержится в работе [12, гл. 14] (хотя некоторые существенные работы в обзор все же не попали, например [13, 14]).

С середины XX в. и поныне исследования задачи Шура–Кона сконцентрированы в основном на ее вычислительном аспекте, что, по-видимому, обусловлено быстрым ростом возможностей вычислительной техники. Первичными критериями оценки результата служат количество требуемых арифметических операций (в зависимости от степени многочлена) и простота алгоритма. Сегодня известно по меньшей мере несколько десятков коэффициентных критериев попадания корней многочлена в единичный круг. Однако знакомство с достижениями в этом направлении приводит к выводу, что количество накопленного фактического материала не перешло в новое качество: по-видимому, после работы А. Кона 1922 г. принципиально новых идей о способах определения количества корней многочлена в единичном круге предложено не было. Рискнем предположить, что это объясняется оторванностью фактически решаемой чисто алгебраической задачи от ее источника – задачи об устойчивости динамических систем. Исследование задачи о корнях многочлена не позволяет забыть о геометрии комплексной плоскости, но не требует принимать во внимание геометрию пространства параметров исходной динамической системы, а следовательно, и методы, основанные на изучении этого пространства.

Задачу построения области устойчивости динамической системы в пространстве параметров естественно рассматривать как задачу синтеза систем с наперед заданными характеристиками [15]. Это приводит к задаче описания области в пространстве параметров, точкам которой соответствуют системы, обладающие заданными свойствами. Этой задаче наиболее соответствует известный *метод D-разбиения,* суть которого заключается в построении границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменяется количество корней характеристического уравнения, находящихся внутри заданной области. Областью устойчивости является объединение всех областей разбиения, которым соответствует нулевое число корней.

Метод *D*-разбиения в явном виде разработал Ю.И. Неймарк на основе идей И.А. Вышнеградского и описал в монографии [16]. Сегодня метод *D*-разбиения применяется к исследованию свойств решений непрерывных и дискретных динамических систем и их гибридов, включая уравнения с последействием (для последних характеристической функцией является не многочлен, а квазимногочлен) [17–19].

Настоящая статья показывает, как использование метода D-разбиения позволяет относительно просто получить классический результат Шура–Кона о сведении вопроса о расположении корней многочлена относительно единичного круга комплексной плоскости к аналогичному вопросу для многочлена меньшего порядка.

1. Постановка задачи

Обозначим $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $R = (-\infty, +\infty)$.

Автономное разностное уравнение k-го порядка имеет вид

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x(n+k-i) = 0, \quad n \in N_0, \tag{1.1}$$

где $a_i \in R$, $i = \overline{0, k}$, $a_0 \neq 0$.

Определение 1.1. *Решением* уравнения (1.1) называется функция $x : N_0 \to R$, удовлетворяющая равенству (1.1) для всех $n \in N_0$.

Очевидно, что решение уравнения (1.1) однозначно определяется произвольной начальной функцией $\varphi : \{0, 1, \ldots, k-1\} \to R$ и условием $x(n) = \varphi(n)$, $n = \overline{0, k-1}$.

Понятие «устойчивость решения» отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции. Для уравнения (1.1) в силу его линейности и однородности устойчивость определяется оценкой модуля решения.

В данной работе мы исследуем *асимптотическую устойчивость* уравнения (1.1), которая для него совпадает с *экспоненциальной*, что следует из формулы представления решения [2, с. 77].

Определение 1.2. Уравнение (1.1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если существует такая константа $\gamma > 0$, что для каждого решения x при некотором $M > 0$ для всех $n \in N_0$ имеем $|x(n)| \leq M e^{-\gamma n}$.

Всюду ниже для краткости термин «устойчивость» понимается в смысле «экспоненциальная устойчивость».

Хорошо известен следующий критерий.

Теорема 1.1 [2, с. 246]. *Уравнение* (1.1) *устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена* $\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^{k-i}$ *лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга* $\{z : |z| < 1\}$.

Сделаем некоторые наблюдения. Рассмотрим область устойчивости уравнения 4-го порядка, полученную в работе [20] с использованием приема понижения размерности.

Теорема 1.2 [20]. *Уравнение*

$$a_0 x(n+4) + a_1 x(n+3) + a_2 x(n+2) + a_3 x(n+1) + a_4 x(n) = 0 \qquad (1.2)$$

устойчиво, если и только если $|a_4| < |a_0|$ *и точка*

$$\left\{ \frac{a_3 - a_1}{2\left(a_0 - a_4\right)}, \frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_4}, \frac{a_2}{a_0 + a_4} \right\}$$

принадлежит области

$$D = \left\{ (\xi, \eta, \rho) \in \mathbb{R}^3 : 2\xi^2 + \xi\eta + \rho - 1 < 0 \,,\; 1 - \eta + \rho > 0 \,,\; 1 + \eta + \rho > 0 \right\}.$$

Сравним вид области D с видом известной области устойчивости уравнения 3-го порядка

$$b_0 x(n+3) + b_1 x(n+2) + b_2 x(n+1) + b_3 x(n) = 0 \,. \qquad (1.3)$$

Теорема 1.3 [21]. *Уравнение* (1.3) *устойчиво, если и только если для его коэффициентов выполнены неравенства*

$$\frac{b_2}{b_0} < 1 + \frac{b_3}{b_0}\left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{b_3}{b_0} \right); \quad \frac{b_2}{b_0} > -1 - \frac{b_1}{b_0} - \frac{b_3}{b_0}; \quad \frac{b_2}{b_0} > \frac{b_1}{b_0} + \frac{b_3}{b_0} - 1 \,.$$

Области на рис. 1 и 2 подобны: нетрудно убедиться, что одна из них переходит в другую поворотом системы координат. Аналогичное явление наблюдается и для уравнений меньших порядков. Это подсказывает, что между областями устойчивости уравнений соседних порядков существует несложно формализуемая связь. Для ее выявления в следующем разделе результат, полученный в работе [20] для уравнений низких порядков, будет обобщен на уравнения произвольного порядка.

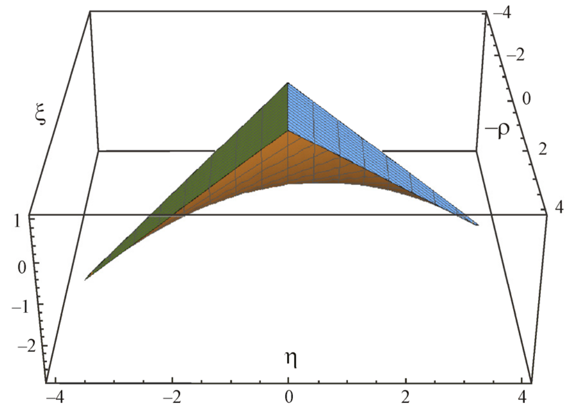

Рис. 1. Область *D*

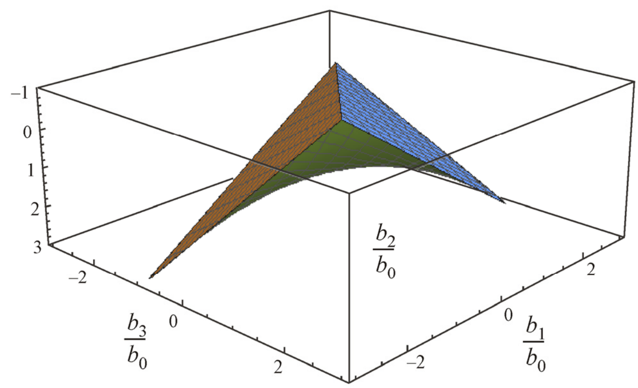

Рис. 2. Область устойчивости уравнения (1.3)

2. Основные результаты

Поставим в соответствие уравнению k-го порядка (1.1) уравнение (k – 1)-го порядка, которое назовем *редуцированным* уравнением:

$$\sum_{i=0}^{k-1} b_i x(n+k-1-i) = 0, \;\; n \in N_0. \tag{2.1}$$

Коэффициент $b_0 \neq 0$ будем считать заданным произвольно, а остальные коэффициенты будем определять через a_i, $i = \overline{1, k}$, и b_0.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.1) *устойчиво, если и только если выполняется условие* $|a_k/a_0|<1$ *и устойчиво уравнение* (2.1), *в котором*

$$b_i = b_0 \frac{a_0 a_i - a_{k-i} a_k}{a_0^2 - a_k^2}, \quad i = \overline{1, k-1}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Условие $|a_k/a_0|<1$ необходимо для устойчивости уравнения (1.1) в силу теоремы Виета. Будем считать это условие выполненным.

Применим метод D-разбиения и прием понижения порядка из работы [20]. Положим, $\lambda = e^{i\varphi}$ $(\varphi \in R)$ в характеристических уравнениях для уравнений (1.1) и (2.1):

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0, \tag{2.3}$$

$$b_0\lambda^{k-1} + b_1\lambda^{k-2} + \ldots + b_{k-1} = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) домножим на $e^{-ik\varphi/2}$:

$$a_0 e^{i\frac{k}{2}\varphi} + a_1 e^{i\frac{k-2}{2}\varphi} + a_2 e^{i\frac{k-4}{2}\varphi} + \ldots + a_{k-1} e^{-i\frac{k-2}{2}\varphi} + a_k e^{-i\frac{k}{2}\varphi} = 0.$$

Отсюда, используя формулу Эйлера и свойства тригонометрических функций, получаем систему

$$\begin{cases} (a_0 + a_k)\cos\frac{k}{2}\varphi + (a_1 + a_{k-1})\cos\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0, \\ (a_0 - a_k)\sin\frac{k}{2}\varphi + (a_1 - a_{k-1})\sin\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0 \end{cases}$$

(вид последних слагаемых в суммах зависит от четности k). В силу условия $|a_k/a_0|<1$ можно разделить оба уравнения системы на их первые коэффициенты:

$$\begin{cases} \cos\frac{k}{2}\varphi + \left(\frac{a_1 + a_{k-1}}{a_0 + a_k}\right)\cos\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0, \\ \sin\frac{k}{2}\varphi + \left(\frac{a_1 - a_{k-1}}{a_0 - a_k}\right)\sin\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Аналогично домножим уравнение (2.4) на $e^{-i\varphi\left(\frac{k}{2}-1\right)}$:

$$b_0 e^{i\varphi\frac{k}{2}} + b_1 e^{i\varphi\frac{k-2}{2}} + b_2 e^{i\varphi\frac{k-4}{2}} + \ldots + b_{k-2} e^{-i\varphi\frac{k-4}{2}} + b_{k-1} e^{-i\varphi\frac{k-2}{2}} = 0,$$

откуда получим

$$\begin{cases} \cos\frac{k}{2}\varphi + \frac{b_1 + b_{k-1}}{b_0}\cos\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0, \\ \sin\frac{k}{2}\varphi + \frac{b_1 - b_{k-1}}{b_0}\sin\frac{k-2}{2}\varphi + \ldots = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Обратим внимание, что системы (2.5) и (2.6) подобны с точностью до коэффициентов. Приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, независимо от четности k получим

$$\frac{a_i \pm a_{k-i}}{a_0 \pm a_k} = \frac{b_i \pm b_{k-i}}{b_0}, \quad i = \overline{1, k}, \tag{2.7}$$

откуда получаем формулу (2.2).

Считая для удобства значения a_0 и b_0 фиксированными, заключаем: *границы D-разбиения k-мерного пространства параметров* $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ *исходного уравнения* (1.1) *переходят в границы D-разбиения* $(k-1)$*-мерного пространства параметров* $\{b_i\}_{i=1}^{k-1}$ *редуцированного уравнения* (2.1) *при преобразовании, определяемом формулой* (2.2).

Остается показать, что область устойчивости уравнения (1.1) переходит в область устойчивости уравнения (2.1). Для этого сделаем следующие наблюдения из теоремы Виета (a_0 фиксировано):

1) область устойчивости уравнения (1.1) ограниченна;

2) все области D-разбиения уравнения (1.1), соответствующие расположению от одного до $(k-1)$ корня внутри единичного круга, неограниченны.

Первое утверждение следует из теоремы Виета напрямую, докажем второе. Рассмотрим уравнение (1.1), характеристический многочлен которого имеет корни $z_1, z_2, \ldots, z_k$, при этом $|z_1| > 1$ и $|z_2| < 1$. Зафиксируем корни $z_3, \ldots, z_k$ и произведение $z_1 z_2$, и будем непрерывно увеличивать модуль z_1, уменьшая соответственно модуль z_2. Пусть $|z_1| \to \infty$, $|z_2| \to 0$. Тогда $a_1 = a_0 \sum_{i=1}^{k} z_i \to \infty$, следовательно, соответствующая уравнению точка D-разбиения уходит в бесконечность, не пересекая границ области (поскольку количество корней внутри единичного круга не изменяется), при этом значение $a_k / a_0 = z_1 \ldots z_k$ остается постоянным. Поскольку $|a_k / a_0| < 1$, уравнение (2.3) имеет не более $(k-1)$ корня внутри единичного круга. Следовательно, в силу вышесказанного единственная ограниченная область среди областей D-разбиения пространства параметров $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ уравнения (1.1) – его область устойчивости. Нетрудно показать, что единственная ограниченная область среди областей D-разбиения пространства параметров $\{b_i\}_{i=1}^{k}$ уравнения (2.1) тоже его область устойчивости (здесь мы не стеснены ограничением свободного члена b_{k-1} характеристического многочлена, поэтому можно направить один из корней в бесконечность при фиксированных остальных). В силу формулы (2.2) все не ограниченные по координате a_1 при фиксированных остальных координатах области D-разбиения пространства параметров уравнения (1.1) переходят в не ограниченные по координате b_1 области D-разбиения пространства параметров уравнения (2.1). Таким образом, область устойчивости уравнения (1.1) переходит в область устойчивости уравнения (2.1).

Замечание. Для вывода утверждения, что границы D-разбиения пространства параметров исходного уравнения переходят в границы D-разбиения пространства параметров редуцированного уравнения, фактически требуется не условие $|a_k / a_0| < 1$, а только условие $|a_k / a_0| \neq 1$. Пересечения областей D-разбиения уравнения (1.1) с квадрантами $|a_k / a_0| > 1$, в отличие от квадрантов $|a_k / a_0| < 1$, неограниченны.

Взяв в качестве исходного уравнения редуцированное, теорему 2.1 можно применить повторно. Последовательное ее применение для уравнения k-го порядка приводит к накоплению ограничений и понижению порядка исходного уравнения, вплоть до первого. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

Запишем уравнение k-го порядка в следующем виде:

$$\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} x\left(n+k-j\right)=0, \quad n\in N_0. \tag{2.8}$$

Здесь $a_{k,j}\in R,\ \ a_{k,0}\neq 0.$

Зафиксируем $a_{i,0}\neq 0,\ \ i=\overline{1,k-1}$, и определим рекурсивно:

$$a_{i-1,j}=a_{i-1,0}\frac{a_{i,0}a_{i,j}-a_{i,i-j}a_{i,i}}{a_{i,0}^2-a_{i,i}^2}, \ \ i=\overline{1,k}, \quad j=\overline{1,i-1}.$$

Теорема 2.2. *Уравнение* (2.8) *устойчиво, если и только если* $\left|a_{i,i}/a_{i,0}\right|<1$, *где* $i=\overline{1,k}$.

Доказательство. В силу вышесказанного теорема 2.2 является прямым следствием теоремы 2.1. □

Таким образом, в координатном пространстве $\{a_{i,i}/a_{i,0}\}_{i=1}^{k}$ область устойчивости уравнения (3.7) оказывается единичным (k-мерным) кубом.

3. Примеры

Продемонстрируем работу теорем, установленных в предыдущем разделе, построив области устойчивости для уравнений с первого до четвертого порядка.

Рассмотрим уравнение 4-го порядка

$$a_0x(n+4)+a_1x(n+3)+a_2x(n+2)+a_3x(n+1)+a_4x(n)=0. \tag{3.1}$$

Теорема 2.1 позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Уравнение* (3.1) *устойчиво, если и только если выполняется условие* $\left|a_4/a_0\right|<1$ *и устойчиво уравнение*

$$x(n+3)+\frac{b_1}{b_0}x(n+2)+\frac{b_2}{b_0}x(n+1)+\frac{b_3}{b_0}x(n)=0, \tag{3.2}$$

где

$$\frac{b_1}{b_0}=\frac{a_0a_1-a_3a_4}{a_0^2-a_4^2},\quad \frac{b_2}{b_0}=\frac{a_2}{a_0+a_4},\quad \frac{b_3}{b_0}=\frac{a_0a_3-a_1a_4}{a_0^2-a_4^2}.$$

Теперь применим теорему 3.1 к уравнению (3.2).

Теорема 3.2. *Уравнение* (3.2) *устойчиво, если и только если выполняется условие* $|b_3/b_0|<1$ *и устойчиво уравнение*

$$x(n+2)+\frac{c_1}{c_0}x(n+1)+\frac{c_2}{c_0}x(n)=0, \qquad (3.3)$$

где

$$\frac{c_1}{c_0}=\frac{b_0b_1-b_2b_3}{b_0^2-b_3^2},\quad \frac{c_2}{c_0}=\frac{b_0b_2-b_1b_3}{b_0^2-b_3^2}.$$

Точно таким же образом перейдем к первому порядку.

Теорема 3.3. *Уравнение* (3.3) *устойчиво, если и только если выполняется условие* $|c_2/c_0|<1$ *и устойчиво уравнение*

$$x(n+1)+\frac{d_1}{d_0}x(n)=0,\ \text{где}\ \frac{d_1}{d_0}=\frac{c_1}{c_0+c_2}.$$

Теперь из теорем 3.1–3.3 и критерия устойчивости уравнения первого порядка, проводя последовательные замены параметров, представим область устойчивости уравнения (3.1) в виде единичного куба в новом четырехмерном координатном пространстве.

Теорема 3.4. *Уравнение* (3.1) *устойчиво, если и только если*

$$\left|\frac{a_4}{a_0}\right|<1,\quad \left|\frac{a_0a_3+a_1a_4}{a_0^2+a_4^2}\right|<1,$$

$$\left|\frac{a_0^3a_2+a_0a_4\left(a_1^2+a_3^2-a_2a_4\right)+a_4^2\left(-a_1a_3+a_2a_4\right)-a_0^2\left(a_1a_3+a_2a_4\right)}{\left(a_0^2-a_0a_3+\left(a_1-a_4\right)a_4\right)\left(a_0\left(a_0+a_3\right)-a_4\left(a_1+a_4\right)\right)}\right|<1,$$

$$\left|\frac{\left(a_0-a_4\right)\left(a_0^2a_1+a_4\left(a_1a_2-a_3a_4\right)-a_0\left(-a_1a_4+a_3\left(a_2+a_4\right)\right)\right)}{\left(a_0^2-a_0a_3+\left(a_1-a_4\right)a_4\right)\left(a_0\left(a_0+a_3\right)-a_4\left(a_1+a_4\right)\right)}\right|<1.$$

Теорема 3.4 является переформулировкой теоремы 2.2 и следствием теоремы 3.2, которая унифицирует процесс получения области устойчивости уравнений произвольного порядка.

Выводы

Основной результат данной работы связывает два классических метода – алгоритм Шура–Кона и метод D-разбиения, причем связь оказывается выраженной очень простым образом. Авторы полагают, что этот результат может рассматриваться как аргумент в пользу следующей общей идеи: при изучении алгебраических критериев расположения корней многочлена в той или иной области комплексной плоскости следует принимать во внимание природу динамической системы, к которой может быть приложен критерий. Такое сопоставление чисто алгебраической по постановке задачи с методами из других областей математики, которые могут быть применены в исследованиях динамических систем, часто вскрывает связи между различными задачами и дает новое видение природы исследуемых явлений.

Авторы благодарны участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным и разностным уравнениям за интерес к работе и конструктивную критику. Отдельную благодарность выражаем В.В. Малыгиной за помощь в переводе и обсуждение выдающихся работ И. Шура и А. Кона.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9).

Список литературы

1. Симонов П.М. Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие: в 2 ч. – Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2009. – Ч. 1. – 338 с.

2. Elaydi S. An introduction to difference equations. – 3rd ed. – New York: Springer, 2005. – 539 p.

3. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.

4. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.

5. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math. – 1918. – Bd. 148. – S. 122–145.

6. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Math. Zeit. – 1922. – Bd. 14. – S. 111–148.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

8. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

9. Marden M. Geometry of polynomials. – 2nd ed. – Rhode Island: American Math. Soc., 1966. – 243 p.

10. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / пер. З.Н. Кравец, под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1979. – 300 с.

11. Jury E.Y. Theory and application of *z*-transform method. – New York: Krieger Pub. Co., 1973. – 330 p.

12. McNamee J.M., Pan V. Numerical methods for roots of polynomials // Studies in Computational Mathematics. – Elsevier Science, 2013. – Vol. 16. – 718 p. – URL: http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-52730-1.00008-4 (дата обращения: 15.11.2017).

13. Корсаков Г.Ф. О количестве корней полинома вне круга // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13, вып. 1. – С. 3–12.

14. Корсаков Г.Ф. К задаче Шура–Кона // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, вып. 1. – С. 27–30.

15. Алгебраические критерии локализации корней полинома в заданных областях комплексной плоскости / В.М. Вартанян, Н.М. Федоренко, Ю.А. Романенков, И.В. Дронова, А.В. Кононенко // Авиационно-космич. техника и технология. – 2005. – № 3 (19). – С. 82–87.

16. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949. – 140 с.

17. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Современное состояние метода D-разбиения // Автомат. и телемех. – 2008. – № 12. – С. 3–40.

18. Gryazina E.N., Polyak B.T. Stability regions in the parameter space: *D*-decomposition revisited // Automatica. – 2006. – Vol. 42, № 1. – P. 13–26. – URL: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.010 (дата обращения: 10.11.2017).

19. Kipnis M., Nigmatulin R. D-decomposition method for stability checking for trinomial linear difference equation with two delays // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 111, № 3. – P. 479–489. – URL: http://www.ijpam.eu. DOI: 10.12732/ijpam.v111i3.11 (дата обращения: 13.11.2017).

20. Кандаков А.А., Чудинов К.М. Об устойчивости автономных разностных уравнений четвертого порядка // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 4.

21. Баландин А.С., Малыгина В.В. О разрешимости одного класса разностных уравнений // Вычислительная механика: сб. науч. тр. – Пермь, 2006. – № 4. – С. 67–72.

References

1. Simonov P.M. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie: uchebnoye posobie: v 2 chastyach* [Economical and Mathematical Modelling: Workbook: In 2 Parts]. Part 1. Perm', Publ. of Perm state university, 2009. 338 p.

2. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. – 3rd ed. – New York: Springer, 2005. – 539 c.

3. Martyniuk D.I. *Lektsii po kachestvennoi teorii raznostnykh uravnenii* [Lectures on Qualitative Theory of Difference Equations]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972. 246 p.

4. Khalanai A., Veksler D. *Kachestvennaia teoriia impul'snykh system* [Qualitative Theory of Impulse Systems]. Moscow: Mir Publ., 1971. 310 p.

5. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math., 1918. – Bd. 148. – S. 122-145.

6. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Math. Zeit., 1922. – Bd. 14. – S. 111-148.

7. Gantmakher F.R. *Teoriia matrits* [Matrix Theory]. 2nd ed., revised. Moscow, Nauka Publ., 1966. 576 p.

8. Postnikov M.M. *Ustoichivye mnogochleny* [Stable Polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 176 p.

9. Marden M. Geometry of Polynomials. – 2nd ed. – Rhode Island: American Math. Soc., 1966. – 243 p.

10. Dzhuri E. *Innory i ustoichivost' dinamicheskikh sistem* [Inners and Stability of Dynamic Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. – 300 p.

11. Jury E.Y. Theory and Application of *z*-Transform Method. – New York: Krieger Pub. Co., 1973. – 330 p.

12. McNamee J.M., Pan V. Numerical Methods for Roots of Polynomials. – Studies in Computational Mathematics. Vol. 16. – Elsevier Sscience, 2013. – 718 p. Available at http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-52730-1.00008-4

13. Korsakov G.F. *O kolichestve kornei polinoma vne kruga* [On the number of roots of a polynomial outside a circle], Matematicheskiye zametki, 1973. Vol. 13, No. 1. pp. 3-12.

14. Korsakov G.F. *K zadache Shura – Kona* [Concerning the Schur-Cohn problem], Matematicheskiye zametki, 1975. Vol. 18, No. 1. pp. 27-30.

15. Vartanian V.M., Fedorenko N.M., Romanenkov Iu.A., Dronova I.V., Kononenko A.V. *Algebraicheskie kriterii lokalizatsii kornei polinoma v zadannykh oblastiakh kompleksnoi ploskosti* [Algebraic criteria of the localization of roots of a polynomial in determined domains of the complex plane], Aviatsionno-kosmich. tekhnika i tekhnologiia, 2005. No. 3(19). pp. 82-87.

16. Neimark Iu.I. *Ustoichivost' linearizovannykh system* [Stability of Linearized Systems]. Leningrad, LKVVIA Publ., 1949. 140 p.

17. Griazina E.N., Poliak B.T., Tremba A.A. *Sovremennoe sostoianie metoda D-razbieniia* [The modern state of the D-decomposition method], Avtomatika i telemekhanika. 2008. No.12. pp. 3-40.

18. Gryazina E.N., Polyak B.T. Stability regions in the parameter space: *D*-decomposition revisited // Automatica, 2006. – Vol. 42, No. 1. – P. 13-26. Available at https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.08.010

19. Kipnis M., Nigmatulin R. D-decomposition method for stability checking for trinomial linear difference equation with two delays // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016. – Vol.111, No. 3. – P. 479-489. Available at http://www.ijpam.eu, doi: 10.12732/ijpam.v111i3.11

20. Kandakov A.A., Chudinov K.M. *Ob ustoichivosti avtonomnykh raznost-nykh uravnenii chetvertogo poriadka* [On stability of autonomous difference equations of the 4th order], Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017. No. 4.

21. Balandin A.S., Malygina V.V. *O razreshimosti odnogo klassa raznostnykh uravnenii* [On solvability of a class of difference equations], Vychislitel'naia mekhanika: sb. nauchn. tr. № 4. Perm', 2006. pp. 67-72.

Получено 04.12.2017

Об авторах

Кандаков Александр Андреевич (Пермь, Россия) – студент, факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com).

Чудинов Кирилл Михайлович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: cyril@list.ru).

About the authors

Aleksandr A. Kandakov (Perm, Russian Federation) – Student, Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com).

Kirill M. Chudinov (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Center “Functional Differential Equations”, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: cyril@list.ru).