УДК 517.9

Е.В. Бычков, К.Ю. Котлованов

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается математическая модель колебаний термоупругой пластины при некоторых допущениях. В ее основе лежит неклассическое уравнение математической физики, кроме того, уравнение является уравнением соболевского типа. Как известно, задача Коши для уравнения соболевского типа не является разрешимой припроизвольных начальных значениях. В статье рассматривается задача Шоуолтера–Сидорова, которая разрешима при произвольных начальных значениях и более «подходяща» для уравнений соболевского типа. Исследуемая математическая модель в подходящим образом выбранных функциональных пространствах может быть редуцирована к абстрактному уравнению соболевского типа третьего порядка с относительно (n, p)-секториальным оператором в правой части. Основным подходом к исследованию является метод построения разрешающих полугрупп.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, относительно спектрально ограниченный оператор, модель колебания термоупругой пластины.

E.V. Bychkov, K.Iu. Kotlovanov

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

ON AN EQUATION OF SOBOLEV TYPE OF THIRD ORDER

We consider a mathematical model of thermoelastic plate vibrations under certain assumptions. The model is based on the nonclassical high-order equation of the mathematical physics, in addition, the equation is an equation of the Sobolev type. As is known, a Cauchy problem for the equation of Sobolev type is not solvable for arbitrary initial values. In this paper we consider the Showalter–Sidorov problem, which is solvable for arbitrary initial values and is more suitable for a Sobolev type equation. In appropriately chosen functional spaces, the considered mathematical model can be reduced to an abstract Sobolev type equation of the third order with relatively (n, p)-sectorial operator on the right-hand side. The main research approach is the method to construct resolving semigroups.

Keywords: Sobolev type equation, relatively spectral-bounded operator, mathematical model of thermoelastic plate vibrations.

Введение

В наше время методы математического моделирования широко применяются в исследованиях динамического поведения пластин. Они играют важную роль в современном строительстве различных зданий, автомобильных дорог, мостов. Вместе с тем элементы некоторых конструкций, таких как двигатели машин, самолетов, ракет, элементы различных ядерных и атомных станций, в процессе эксплуатации подвергаются различным воздействиям температуры. При проектировании такого рода конструкций их динамическое поведение описывается теорией термоупругости. Результаты о доказательстве существования единственного решения являются основой для дальнейшего исследования задач управления. В дальнейшем для рассмотрения модели колебаний термоупругой пластины будем рассматривать уравнение вида

$$u'''_{ttt} + 2\Delta^2 u'_t - \gamma\Delta u'''_{ttt} - k\Delta^3 u + k\gamma\Delta^2 u''_{tt} - k\Delta u''_{tt} = f\left(x, y, t\right). \tag{1}$$

Функция u характеризует отклонение пластины от положения покоя. Коэффициенты k и γ – положительные, характеризующие свойства материала термоупругой пластины; $f(x, y, t)$ – это внешнее воздействие. Под термоупругостью понимается тепловое расширение, полностью обратимое или термически упругое, т.е. эффекты деформации при нагревании и охлаждении по абсолютной величине равны.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать уравнение, моделирующее колебание термоупругой пластины [1]:

$$u'''_{ttt} + 2\Delta^2 u'_t - \gamma\Delta u'''_{ttt} - k\Delta^3 u + k\gamma\Delta^2 u''_{tt} - k\Delta u''_{tt} = f\left(x, y, t\right). \tag{2}$$

Если предположить, что в процессе нагревания пластина не подвержена диффузии или диффузия незначительно влияет на физические свойства и процесс колебания, то параметр k можно положить равным нулю.

Таким образом, уравнение (2) упрощается до уравнения вида

$$\left(\Delta - \lambda\right) u_{ttt} = \gamma^2 \Delta^2 u_t \,. \tag{3}$$

Дополним уравнение (3) краевыми условиями Бенара [2]

$$u\left(x, y, t\right) = \Delta u\left(x, y, t\right) = 0, \qquad \left(x, y, t\right) \in \partial D \times R \tag{4}$$

и начальными условиями

$$u^{(m)}\left(x, y, 0\right) = u_m\left(x, y\right), \qquad m = 0, 1, 2\,. \tag{5}$$

Проинтегрировав уравнение (3) с учетом начальных условий (5), получим

$$\left(\Delta - \lambda\right) u_{tt} = \gamma^2 \Delta^2 u_t + f\,. \tag{6}$$

$$u(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) = 0, \qquad (x,y,t) \in \partial D \times R, \tag{7}$$

$$u^{(m)}(x,y,0) = u_m(x,y), \qquad m = 0,1. \tag{8}$$

Здесь $D \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂D, $f = (\Delta - \lambda)u_2 - \gamma^2 \Delta^2 u_0$.

2. Задача Шоуолтера–Сидорова для уравнения математической модели колебаний термоупругой пластины

Рассмотрим задачу Коши

$$\lim_{t \to 0+} u^{(m)}(t) = u_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{9}$$

для уравнения

$$Lu^{(n)} = Mu + f. \tag{10}$$

Уравнение (10) редуцируется к системе

$$Hu^{0(n)} = u^0 + M_0^{-1} + f^0, \tag{11}$$

для уравнения

$$u^{1(n)} = Su^1 + L_1^{-1} f^0. \tag{12}$$

Рассмотрим задачу Шоуолтера–Сидорова

$$\lim_{t \to 0+} P(\dot{u}(t) - u_1) = 0, \qquad \lim_{t \to 0+} P(u(t) - u_0) = 0 \tag{13}$$

для уравнения соболевского типа [3]

$$L\ddot{u} = Mu + f, \tag{14}$$

Теорема 1. Для любой вектор-функции f, такой что $f^0 \in C^2((0,T); \mathfrak{F}^0)$ и $f^1 \in C((0,T); \mathfrak{F}^1)$, и произвольных начальных значениях u_0, $u_1 \in \mathfrak{A}$ существует единственное решение $u \in C^2((0,T); \mathfrak{A})$ задачи (13) для уравнения (14), которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} f^1(s)\, ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(nq)}(t).$$

Доказательство. Доказательство основано на подстановке решения в уравнение и начальные условия.

Математическую модель (6)–(8) редуцируем к задаче (9), (10). Для этого введем пространства [4, 5]

$$\mathfrak{A} = \left\{ u \in W_2^{m+2}\left(D\right) : u\left(x, y\right) = \Delta u\left(x, y\right) = 0 \forall \left(x, y\right) \in \partial D \right\},$$

$$\mathfrak{I} = W_2^m\left(D\right)$$

и зададим операторы [6]

$$L = \Delta - \lambda \mathrm{I}, \quad M = \gamma^2 \Delta^2.$$

В силу предыдущей теоремы справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть $f^0 \in C^2((0,T);\mathfrak{I}^0)$ и $f^1 \in C((0,T);\mathfrak{I}^1)$, $\lambda,\ \gamma \in R$ ($\gamma \neq 0$). Тогда существует единственное решение задачи (6)–(8).

Список литературы

1. Фалалеев М.В., Красник А.В., Орлов С.С. Вырожденные дифференциальные уравнения высоких порядков специального вида в банаховых пространствах и их приложения // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2010. – Т. XIII, № 3 (43). – С. 126–139.

2. Замышляева А.А. Об аналитическом исследовании математической модели Бенни–Люка // Математические заметки СВФУ. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 57–65.

3. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operator. – Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003.

4. Замышляева А.А. Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 45–57.

5. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.

6. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

References

1. Falaleev M.V., Krasnik A.V., Orlov S.S. *Vyrozhdennye differentsial'nye uravneniia vysokikh poriadkov spetsial'nogo vida v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniia* [Special types degenerated differential equations of high order

in Banach spaces and it's applications] – *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki*. 2010, vol. XIII, iss. 3 (43), pp. 126-139.

2. Zamyshliaeva A.A. *Ob analiticheskom issledovanii matematicheskoi modeli Benni–Liuka* [An analytical investigation of linearized Benney-Luke model] – *Matematicheskie zametki SVFU*. 2013, vol. 20, iss. 2, pp. 57-65.

3. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operator. Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003.

4. Zamyshliaeva A.A. *Fazovoe prostranstvo uravneniia sobolevskogo tipa vysokogo poriadka* [The phase space of a high order Sobolev type equation] – *Izv. Irkuts. gos. un-ta*. 2011, vol. 4, iss. 4, pp. 45-57.

5. Sviridiuk G.A. *Fazovye prostranstva polulineinykh uravnenii tipa Soboleva s otnositel'no sil'no sektorial'nym operatorom* [The phase spaces of semilinear Sobolev type equation whose operator is relatively spectrally bounded] – *Algebra i analiz*. 1994, vol. 6, iss. 5, pp. 252-272.

6. Sviridiuk G.A. *K obshchei teorii polugrupp operatorov* [To the general theory of semigroup operators] – *Uspekhi mat. nauk.* 1994, vol. 49, iss. 4, pp. 47–74.

Получено 07.07.2017

Об авторах

Бычков Евгений Викторович (Челябинск, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, e-mail: bychkovev@susu.ru).

Котлованов Константин Юрьевич (Челябинск, Россия) – магистр, Южно-Уральский государственный университет (454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, e-mail: kotlovanovki@susu.ru).

About the authors

Evgenii V. Bychkov (Chelyabinsk, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Equations of Mathematical Physics, South Ural State University (76, Lenina av., Chelyabinsk, 454080, Russian Federation, e-mail: bychkovev@susu.ru).

Konstantin Iu. Kotlovanov (Chelyabinsk, Russian Federation) – Master of Science, South Ural State University (76, Lenina av., Chelyabinsk, 454080, Russian Federation, e-mail: kotlovanovki@susu.ru).