УДК 519.872:656

А.С. Сысоев, А.О. Горяйнов

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОДКЛЮЧАЕМЫМ ПРИБОРОМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АВТОМАГИСТРАЛИ С РЕВЕРСИВНОЙ ПОЛОСОЙ

Организация реверсивного движения — один из способов решения сложившейся тяжелой транспортной ситуации в современных крупных городах. В статье представлены система массового обслуживания для моделирования такого типа организации дорожного движения, а также способ выбора оптимального напрвления движения реверсивной полосы за счет решения поставленной задачи оптимизации.

Ключевые слова: система массового обслуживания, резервный прибор, автомагистраль, оптимизация.

A.S. Sysoev, A.O. Goriainov

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation

QUEUING SYSTEM WITH ADDITIONAL SERVER TO SIMULATE HIGHWAY WITH REVERSE LINE

Reverse road traffic organization is a way to solve the current difficult traffic situation in a large city. The paper presents a queuing system for modeling this type of traffic management, as well as the method to selecting the optimal direction of a reverse-line functioning by solving an optimization problem.

Keywords: queuing system, reserve server, highway, optimization.

Введение

Вопрос загруженности дорог стоит очень остро в современных развитых городах, где имеет место большое количество личных автотранспортных средств. Одновременный выезд автомобилей на отдельный участок приводит к образованию заторов. Все это влечет за собой необходимость поиска выходов из сложившейся ситуации. Одним из вариантов разрешения этой проблемы является организация полос реверсивного движения. Такие участки предполагают, что в зависимости от значения некоторого параметра, который может быть принят в качестве управляющего, полоса будет использоваться для движения в одном из направлений. Такие дороги с реверсивным движением можно описать с помощью систем массового обслуживания с симметричным резервным прибором. Управление этим резервным прибором происходит по времени ожидания заявки в системе, а не по длине очереди. Принятие в качестве критерия переключения длины очереди было бы некорректным, так как очередь теряет свой смысл, когда транспортные средства в ней движутся с допустимой на данном участке скоростью. В данной работе рассматриваются построение и оптимизация системы управления реверсивными полосами на автодорогах с однотипным, симметричным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди, позволяющей находить оптимальный момент включения резервного прибора (реверсивной полосы).

1. Система массового обслуживания с подключаемым резервным прибором

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком (интенсивность λ), к которой может быть подключен резервный прибор. Обслуживание предполагается экспоненциальным с интенсивностью μ_1 и μ_2 для основного и резервного приборов соответственно. Дисциплина обслуживания системы зависит от времени ожидания s заявки, находящейся в очереди первой, и описывается следующим правилом: как только s достигает величины s_1, подключается резервный прибор и берет для обслуживания заявку, стоящую в очереди первой; после обслуживания одного требования резервный прибор выключается, если $s < s_0$, и продолжает работать, если $s \geq s_0$ ($s_0 < s_1$).

Поскольку поток заявок является простейшим, а обслуживание экспоненциальным, то s представляет марковский случайный процесс. Тогда финальная плотность вероятностей $P(s)$ величины s: для работы только основного прибора $P_1(s)$ в области $s \leq s_0$ и $P_2(s)$ в области $s_0 \leq s \leq s_1$, для работы основного и резервного приборов $P_3(s)$ в области $s \leq s_0$ и $P_4(s)$ в области $s_0 \leq s \leq s_1$ и $P_5(s)$ в области $s \geq s_1$ [1].

Обратное уравнение Колмогорова с учетом возможных переходов за время Δt:

$$P_1(s) = (1 - \mu_1 \Delta t) P_1(s - \Delta t) + \mu_1 \Delta t \int_0^{s_0 - s} \lambda e^{-\lambda} P_1(s + \upsilon) d\upsilon +$$

$$+ \mu_1 \Delta t \int_{s_0 - s}^{s_1 - s} \lambda e^{-\lambda} P_2(s + \upsilon) d\upsilon + \mu_2 \Delta t P_3(s), \tag{1}$$

где υ – интервал времени, через который поступило требование, следующее за находящимся в очереди первым [2]. Раскладывая (1) в Тейлора по Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dP_1(s)}{ds} = \mu_1 P_1(s) - \mu_2 P_3(s) =$$

$$= \mu_1 \int_0^{s_0 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_1(s+\upsilon)\, d\upsilon + \mu_1 \Delta t \int_{s_0 - s}^{s_1 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_2(s+\upsilon)\, d\upsilon. \qquad (2)$$

Производя замену $(s + \upsilon) = y$, умножая на $e^{-\lambda\upsilon}$ и затем дифференцируя по s, приведем (2) к виду

$$\frac{d^2 P_1(s)}{ds^2} = (\mu_1 - \lambda)\frac{dP_1(s)}{ds} - \mu_2 \frac{dP_3(s)}{ds} + \mu_2 \lambda P_3(s) = 0.$$

Аналогично получаем

$$\begin{gathered} \frac{dP_2(s)}{ds} + \mu_1 P_2(s) = \mu_1 \int_0^{s_1 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_2(s+\upsilon)\, d\upsilon, \\ \frac{d^2 P_2(s)}{ds^2} + (\mu_1 - \lambda)\frac{dP_2(s)}{ds} = 0; \end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} \frac{dP_3(s)}{ds} + (\mu_1 + \mu_2) P_3(s) = \lambda e^{-\lambda(s_1 - s)} P_2(s_1) + \mu_1 \int_0^{s_0 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_3(s+\upsilon)\, d\upsilon + \\ + (\mu_1 + \mu_2)\left(\int_{s_0 - s}^{s_1 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_4(s+\upsilon)\, d\upsilon + \int_{s_1 - s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_5(s+\upsilon)\, d\upsilon \right), \\ \frac{d^2 P_3(s)}{ds^2} + (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)\frac{dP_3(s)}{ds} - \lambda\mu_2 P_3(s) = 0; \end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered} \frac{dP_4(s)}{ds} + (\mu_1 + \mu_2) P_4(s) - \lambda e^{-\lambda(s_1 - s)} P_2(s_1) = \\ = (\mu_1 + \mu_2) \int_0^{s_0 - s} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_4(s+\upsilon)\, d\upsilon + (\mu_1 + \mu_2) \int_{s_1 - s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_5(s+\upsilon)\, d\upsilon, \\ \frac{d^2 P_4(s)}{ds^2} + (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)\frac{dP_4(s)}{ds} = 0; \end{gathered} \qquad (5)$$

$$\frac{dP_5(s)}{ds} + (\mu_1 + \mu_2) P_5(s) = (\mu_1 + \mu_2) \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\upsilon} P_5(s+\upsilon)\, d\upsilon.$$

Особого внимания требует рассмотрение моментов $s = s_0$ и $s = s_1$. Рассматривая переходы в точках $s = s_0$, получим

$$P_2(s_0) = (1 - \mu_1 \Delta t) P_1(s - \Delta t) + \mu_1 \Delta t \int_0^{s_1 - s} \lambda e^{-\lambda \upsilon} P_2(s_0 + \upsilon) d\upsilon,$$

откуда после предельного перехода ($\Delta t \to 0$) $P_1(s_0) = P_2(s_0)$. Аналогично $P_3(s_0) = P_4(s_0)$.

Принимая в уравнениях (2)–(5) $s = s_0$ и сравнивая их правые части, можно получить выполнение остальных условий сшивания.

Обозначим через $\pi(0, 0)$ вероятность того, что в системе нет заявок, через $\pi(1, 0)$ – вероятность того, что в системе находится одна заявка, которая обслуживается основным прибором, через $\pi(0,1)$ – вероятность нахождения в системе одной заявки, которая обслуживается резервным прибором, и через $\pi(1,1)$ – вероятность того, что в системе находятся две заявки, одна из которых обслуживается основным прибором, а вторая – резервным. Рассматривая возможные переходы в точке $s = 0$, получим

$$P_3(0) = \lambda \pi(1,1) + \mu_1 \Delta t \int_0^{s_0} \lambda e^{-\lambda \upsilon} P_3(\upsilon) d\upsilon +$$

$$+(\mu_1 + \mu_2) \Delta t \int_{s_0}^{s_1} \lambda e^{-\lambda \upsilon} P_4(\upsilon) d\upsilon + (\mu_1 + \mu_2) \Delta t \int_{s_1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda \upsilon} P_5(\upsilon) d\upsilon +$$

$$+(1 - \mu_1 \Delta t) \lambda \Delta t e^{-\lambda \upsilon} P_2(s_1 - \Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$P_3(0) = \lambda \pi(1,1). \tag{6}$$

Аналогичным образом можно получить

$$P_1(0) = \lambda \pi(0,1), \tag{7}$$

$$\lambda \pi(0,0) = \mu_1 \pi(1,0) + \mu_2 \pi(0,1), \tag{8}$$

$$(\lambda + \mu_2) \pi(0,1) = \mu_1 \pi(1,1), \tag{9}$$

$$(\lambda + \mu_1) \pi(1,0) - \lambda \pi(0,0) - \mu_2 \pi(1,1) =$$

$$= \mu_1 \int_0^{s_0} e^{-\lambda \upsilon} P_1(\upsilon) d\upsilon + \mu_1 \int_{s_0}^{s_1} e^{-\lambda \upsilon} P_2(\upsilon) d\upsilon, \tag{10}$$

$$\left(\mu_1+\mu_2+\lambda\right)\pi\left(1,1\right)-\lambda\pi\left(0,1\right)=\mu_1\int_0^{s_0}e^{-\lambda\upsilon}P_3\left(\upsilon\right)d\upsilon+$$

$$+\left(\mu_1+\mu_2\right)\int_{s_0}^{s_1}e^{-\lambda\upsilon}P_4\left(\upsilon\right)d\upsilon+\left(\mu_1+\mu_2\right)\int_{s_1}^{\infty}e^{-\lambda\upsilon}P_5\left(\upsilon\right)d\upsilon+e^{-\lambda s_1}P_2\left(s_1\right). \quad (11)$$

Полагая в (2) и (4) s = 0 и сравнивая правые части с (10) и (11), получим

$$\left(\lambda+\mu_1\right)\pi\left(1,0\right)-\lambda\pi\left(0,0\right)-\mu_2\pi\left(1,1\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{dP_1\left(s\right)}{ds}\Big|_{s=0}+\mu_1P_1\left(0\right)+\mu_2P_3\left(0\right)\right], \quad (12)$$

$$\left(\mu_1+\mu_2+\lambda\right)\pi\left(1,1\right)-\lambda\pi\left(0,1\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{dP_3\left(s\right)}{ds}\Big|_{s=0}+\left(\mu_1+\mu_2\right)P_3\left(0\right)\right]. \quad (13)$$

С учетом (6) и (7) соотношения (12) и (13) примут вид

$$\frac{dP_1\left(s\right)}{ds}\Big|_{s=0}-\lambda P_1\left(0\right)=-\lambda^2\pi\left(0,0\right), \quad (14)$$

$$\frac{dP_1\left(s\right)}{ds}\Big|_{s=0}-\lambda P_1\left(0\right)=-\lambda^2\pi\left(0,0\right). \quad (15)$$

Получено шесть условий в нуле (6)–(9) и (14)–(15). Отметим, что одно из них является следствием остальных. К этим условиям следует добавить еще естественное условие $\lim\limits_{s\to 0}P_5\left(s\right)=0$ и условие нормировки

$$\int_0^{s_0}\left[P_1\left(s\right)+P_3\left(s\right)\right]ds+\int_{s_0}^{s_1}\left[P_2\left(s\right)+P_4\left(s\right)\right]ds+\int_{s_1}^{\infty}P_5\left(s\right)ds+$$

$$+\pi\left(0,0\right)+\pi\left(0,1\right)+\pi\left(1,0\right)+\pi\left(1,1\right)=1.$$

Выписанные уравнения для $P_1(s)$, $P_2(s)$, $P_3(s)$, $P_4(s)$, $P_5(s)$, условия сшивания, граничные условия при $s \to 0$ и $s \to \infty$, условия нормировки, определяют $P(s)$ однозначно. В силу громоздкости решение не приводится. Его можно найти, например, в работе [1].

2. Моделирование автомагистрали с реверсивной полосой

На основе математической модели, приведенной в предыдущем пункте, построим модель, позволяющую найти оптимальный момент подключения реверсивной полосы на автодорогах. Будем рассматривать такую автодорогу как систему массового обслуживания с резервным симметричным прибором и опишем ее случайным процессом с компонентами $\{s(t), \upsilon(t)\}$, где $s(t)$ – текущее время ожидания транспортного средства, находящегося первым в очереди, $\upsilon(t)$ – число работающих полос в момент времени t. Кроме того, возможны еще три особых состояния системы:

1) $\upsilon(t) = 0$ – система пуста, в очереди нет ни одного транспортного средства;

2) $\upsilon(t) = 1$ – очередь пуста, и функционирует только основная полоса движения;

3) $\upsilon(t) = 2$ – очередь пуста, и функционирует основная полоса движения с подключенной реверсивной полосой.

Как только $s(t)$ – текущее время ожидания заявки в системе достигает некой величины s_0 = const, подключается резервный прибор.

Поскольку поток заявок является простейшим, а обслуживание экспоненциальное, то процесс $\{s(t), \upsilon(t)\}$ с состояниями $\upsilon(t) = 0$, $\upsilon(t) = 1$, $\upsilon(t) = 2$ представляет собой марковский случайный процесс. Достаточным условием существования стационарного режима работы рассматриваемой системы массового обслуживания является условие $\lambda < 2\mu$. Стоит также указать, что интенсивность обслуживания (пропускная способность полосы) резервного прибора совпадает с интенсивностью обслуживания (пропускной способностью основной полосы) основного прибора. Найдем финальную плотность вероятностей $P(s, \upsilon)$ величины (s, υ) и финальные вероятности состояний:

$$
\begin{aligned}
P_1(s) &= \frac{\lambda^2(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{(\lambda-\mu)s}}{\mu m},\\
P_2(s) &= \frac{\lambda^3(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{\lambda s-\mu s_0}}{2\mu^2 m},\\
P_3(s) &= \frac{\lambda^3(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{(\lambda-2\mu)s+\mu s_0}}{2\mu^2 m},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$\pi(0)=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}{m},$$

$$\pi(1)=\frac{\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}{\mu m},$$

$$\pi(2)=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}{2\mu^2 m}.$$

где $m = \mu\,(2\mu - \lambda) - \lambda^2 e^{(\lambda-\mu)s0}$, $\lambda > \mu$.

Если $\lambda = \mu$, то $P_i(s)$, $i = 1, 2, 3 \ldots$ и $\pi(\upsilon)$, $\upsilon = 1, 2, 3, \ldots$ имеют следующий вид:

$$P_1(s)=\frac{\lambda}{1+\lambda s_0},\quad P_2(s)=\frac{\lambda e^{\lambda(s-s_0)}}{2(1+\lambda s_0)},\quad P_3(s)=\frac{\lambda e^{\lambda(s-s_0)}}{2(1+\lambda s_0)},$$
$$\pi(0)=\frac{\lambda}{1+\lambda s_0},\quad \pi(1)=\frac{\lambda}{1+\lambda s_0},\quad \pi(2)=\frac{e^{-\lambda s_0}}{2(1+\lambda s_0)}. \tag{17}$$

3. Оптимизация системы

Естественным для рассмотрения является случай, когда в описываемой системе существуют два вида потерь: потери на ожидания заявки (транспортного средства) в очереди (такие потери могут, например, быть представлены количеством израсходованного топлива) и потери на амортизацию резервного прибора (например, износ дорожного полотна резервной полосы).

Нахождение заявок в системе, ожидающих обслуживания, приводит к потерям, которые будут называться потерями на ожидание. Будем считать, что если в очереди находится i заявок, то потери в единицу времени равны $F(i)$. Найдем математическое ожидание $M(F(i))$ этих потерь. Пусть в какой-то момент времени заявка, находящаяся в очереди первой, ожидает обслуживания в течение времени s. За это время с вероятностью $\frac{(\lambda s)^{i-1}e^{-\lambda s}}{(i-1)!}$ пришла еще одна $i - 1$ заявка. Таким образом, условное распределение числа заявок в очереди i есть

$$P\left(\frac{i}{s}\right)=\frac{(\lambda s)^{i-1}e^{-\lambda s}}{(i-1)!},\ i=1,2,\ldots$$

Тогда среднее значение потерь можно записать в виде [3]

$$L_1 = M\left[F(i)\right] = \int_0^{s_0} F(s)\left[P_1(s)+P_2(s)\right]ds + \int_{s_0}^{\infty} F(s)P_3(s)ds, \qquad (18)$$

где

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\infty} F(i)\frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!}.$$

В частности, если потери пропорциональный числу заявок, находящихся в очереди $F(i)$ = $D_1(i)$, то $F(s)$ = $D_1(\lambda s+1)$, где D_1 – положительная константа, имеющая смысл потерь от ожидания одной заявки в единицу времени.

Будем считать, что работа резервного прибора приводит к потерям в единицу времени, равным D_2. Тогда среднее значение потерь на амортизацию резервного прибора в единицу времени имеет вид

$$L_2 = D_2\left[\pi(2) + \int_0^{s_0} P_2(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} P_3(s)ds\right]. \qquad (19)$$

Таким образом, средние суммарные потери системы массового обслуживания в единицу времени примут вид [2, 4]

$$L(s_0) = L_1 + L_2 = \int_0^{s_0} F(s)\left[P_1(s)+P_2(s)\right]ds +$$

$$+\int_{s_0}^{\infty} F(s)P_3(s)ds + D_2\left[\pi(2) + \int_0^{s_0} P_2(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} P_3(s)ds\right], \qquad (20)$$

где $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, $\pi(2)$ для значений $\lambda = \mu$ и $\lambda \neq \mu$ имеют вид (18) и (19) соответственно.

Задача оптимизации такой системы массового обслуживания сводится к нахождению момента x_{opt} включения резервного прибора, который минимизирует функцию общих потерь (20).

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которой функция потерь линейно зависит от числа заявок в системе $F(i)$–$D_i(i)$, где D_i – потери от ожидания одной заявки в единицу времени. Тогда средние суммарные потери системы в единицу времени имеют вид

$$L(s_0) =$$
$$= D_1\left[\int_0^{s_0}(\lambda s - 1)\left[P_1(s) + P_2(s)\right]ds + \int_{s_0}^{\infty}(\lambda s - 1)P_3(s)\,ds\right] +$$
$$+D_2\left[\pi(2) + \int_0^{s_0}P_2(s)\,ds + \int_{s_0}^{\infty}P_3(s)\,ds\right]. \qquad (21)$$

Перейдем к безразмерным величинам $\omega = \mu/\lambda$, $x_0 = \lambda s_0$. Принимая во внимание (18) и (19), перепишем функцию общих потерь в виде

$$L(x_0) = D_1\tilde{E}(x_0) + D_1\tilde{K}(x_0). \qquad (22)$$

При $\omega \neq 1$

$$\tilde{E}(x_0) = \frac{e^{(1-\omega)x_0}}{\omega m}\left[\frac{(1-2\omega)\omega}{1-\omega}\left(e^{(\omega-1)x_0}\right) - \omega x_0 + \frac{1-\omega}{1-2\omega}\right],$$

$$\tilde{K}(x_0) = \frac{(1-\omega)e^{(1-\omega)x_0}}{\omega m},$$

$$m = (2\omega - 1)\omega - e^{(1-\omega)x_0}.$$

При $\omega = 1$

$$\tilde{E}(x_0) = \frac{x_0^2 + 4x_0 + 2}{2(1 + x_0)},$$

$$\tilde{K}(x_0) = \frac{1}{1 + x_0}.$$

Аналитически решить задачу нахождения оптимального момента включения резервного прибора x_{opt}, который минимизирует функцию общих потерь, получилось только для $\omega = 1$. Если $\omega = 1$, $D_1/D_2 < 1$, то

$$x_0^{\text{opt}} = -1 + \sqrt{2\frac{D_2}{D_1} - 1}. \qquad (23)$$

Для значений $\omega \neq 1$ задача оптимизации решена численно (метод оптимизации – BFGS [5]).

4. Численный эксперимент

Для численных расчетов было разработано программное обеспечение в среде *Qt*. Структурно программа представляет собой систему поддержки принятия решений, которая может быть использована как в онлайн-режиме (при наличии поступления данных об интенсивности и о пропускной способности полосы движения), так и в режиме офлайн (для анализа сложившейся ситуации и оценки перспектив ее дальнейшего развития). Функционально каждая из полос движения моделируется системой массового обслуживания с подключаемой реверсивной полосой. В качестве интенсивностей обслуживания основного и резервного приборов (пропускной способности основной и реверсивной полос) было выбрано рекомендованное значение прив. авт./ч [6]. В зависимости от значений интенсивностей движения и пропускных способностей, а также потерь различных типов параллельно решаются две оптимизационные задачи – для прямого и обратного направлений движения. В качестве реверсивного выбирается то направление, для которого оптимальный момент времени включения резервного прибора меньше.

Список литературы

1. Зиновьева Л.И. Система массового обслуживания с гистерезисом и резервным прибором, управляемым временем ожидания // Математическая статистика и ее приложения. – 1980. – № 6. – С. 152–164.

2. Зиновьева Л.И., Терпугов А.Ф. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 1. – С. 27–30.

3. Самочернова Л.И. Оптимизация системы массового обслуживания с резервным прибором с управлением, зависящим от времени ожидания // Изв. Том. политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. – 2010. – Т. 317, № 5. – С. 94–97.

4. Самочернова Л.И., Петров Е.С. Оптимизация системы массового обслуживания с однотипным резервным прибором // Изв. Том. политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. – 2010. – Т. 317, № 5.. – С. 28–31.

5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 440 с.

6. Highway capacity manual / Transportation Research Board. – Washington D.C., 2000.

References

1. Zinov'eva L.I. Sistema massovogo obsluzhivaniia s gisterezisom i rezervnym priborom, upravliaemym vremenem ozhidaniia [The queuing system with hysteresis and backup device, controlled by the current time of waiting for the request]. *Matematicheskaia statistika i ee prilozheniia*. 1980, no. 6, pp. 152-164.

2. Zinov'eva L.I., Terpugov A.F. Odnolineinaia sistema massovogo obsluzhivaniia s peremennoi intensivnost'iu, zavisiashchei ot vremeni ozhidaniia [Single-line queuing system with variable intensity, depending on time expectation]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1981, no. 1, pp. 27-30.

3. Samochernova L.I. Optimizatsiia sistemy massovogo obsluzhivaniia s rezervnym priborom s upravleniem, zavisiashchim ot vremeni ozhidaniia [Optimization of the queuing system with a uniform backup device controlled by the current time of waiting for the request]. *Izvestiia tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov*, 2010, vol. 317, iss. 5, pp. 94-97.

4. Samochernova L.I., Petrov E.S. Optimizatsiia sistemy massovogo obsluzhivaniia s odnotipnym rezervnym priborom [Optimazation of the queuing system with a uniform backup device*]. Izvestiia tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov*, 2010, vol. 317, iss. 5, pp. 28-31.

5. Dennis DZh., Shnabel' R. Chislennye metody bezuslovnoi optimizatsii i resheniia nelineinykh uravnenii [Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations]. Per. s angl. – Moscow, Mir, 1988, 440 p.

6. Highway Capacity Manual. Transportation Research Board. Washington D.C. 2000.

Получено 02.07.2017

Об авторах

Сысоев Антон Сергеевич (Липецк, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет (г. Липецк, ул. Московская, 30, e-mail: anton_syssoyev@mail.ru).

Горяйнов Александр Олегович (Липецк, Россия) – магистрант кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет (г. Липецк, ул. Московская, 30).

About the authors

Anton S. Sysoev (Lipetsk, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University (30, Moskovskaya st., Lipetsk, Russian Federation, e-mail: anton_syssoyev@mail.ru).

Aleksandr O. Goriainov (Lipetsk, Russian Federation) – Master Student, Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University (30, Moskovskaya st., Lipetsk, Russian Federation).