УДК 517.983

В.Ф. Журавлев

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрены условия разрешимости и способы представления решений линейных нормально разрешимых операторных уравнений и краевых задач для них в банаховых пространствах. Полученные результаты проиллюстрированы на примере линейной краевой задачи для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в банаховом пространстве.

Ключевые слова: линейная краевая задача, банахово пространство, нормально разрешимое уравнение, дополняемое пространство, обобщенно обратимый оператор.

1. Линейные уравнения

Пусть $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $z(t)$, определенных на конечном промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$; $z(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbf{B}_1$ с нормой $|||z||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, а $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахово пространство ограниченных вектор-функций $\varphi(t)$, определенных на том же промежутке $\mathcal{I}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}_2$ с нормой $|||\varphi||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}_2}$ [1].

Рассмотрим уравнение

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \tag{1}$$

где $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — линейный ограниченный оператор, ядро $N(L)$ и образ $R(L)$ которого дополняемы [2, 3] в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, соответственно. Известно [2], что каждой парой взаимно дополняемых пространств связаны ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ и $\mathcal{P}_{R(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to R(L)$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в прямые топологические суммы

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) &= N(L) \oplus X, \\ \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) &= Y \oplus R(L). \end{aligned} \tag{2}$$

Следовательно [4, с. 139], оператор L обобщенно обратим. Дополнительные проекторы на подпространства X и Y соответственно будем обозначать $\mathcal{P}_X = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y = I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{R(L)}$.

В дальнейшем класс линейных ограниченных обобщенно обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, будем обозначать $GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$. Очевидно, что оператор из $GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ является нормально разрешимым.

Известно [2, с. 73], что если подпространство X_1 дополняемо подпространством X_2 в банаховом пространстве $\mathbf{B}$, то оно имеет бесконечно много различных дополнений $\widetilde{X}_2$. С каждой парой взаимно дополняемых подпространств связан ограниченный проектор $\mathcal{P}_{X_1}$. Норма проектора может служить оценкой «качества» дополнения. Чем больше $\|\mathcal{P}_{X_1}\|$, тем «хуже» дополнение. Описание ограниченных проекторов $\widetilde{\mathcal{P}}_{X_1}$ в общем виде, порождающих это множество дополнений, дается в лемме А. Собчика [2, с. 80].

Сначала рассмотрим задачу об условиях существования и построении ограниченного обобщенно-обратного оператора L^- к оператору $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, установлении критерия разрешимости и представлении решений уравнения (1).

Поставленная задача будет рассматриваться в предположении, что выполнено одно из следующих условий.

(a1) *Подпространство $N(L)$ линейно изоморфно дополняемому в Y подпространству Y_1; $N(L) \cong Y_1 \subset Y$.*

В этом случае существуют линейный ограниченный обратимый оператор $J_1 : N(L) \to Y_1$, такой что $J_1 N(L) = Y_1$, $J_1^{-1} Y_1 = N(L)$, и ограниченный проектор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to \mathbf{B}_2$, разбивающий подпространство Y в прямую сумму замкнутых подпространств

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \tag{3}$$

где $Y_1 = \mathcal{P}_{Y_1} \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2} \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\mathcal{P}_{Y_2} = (\mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1})$ — ограниченный проектор. Тогда справедливы следующие разложения для тождественных операторов:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} &= \mathcal{P}_{N(L)} + \mathcal{P}_X, \\ I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} &= \mathcal{P}_{Y_1} + \mathcal{P}_{Y_2} + \mathcal{P}_{R(L)} \end{aligned} \tag{4}$$

пространств $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ соответственно.

(a2) *Подпространство Y линейно изоморфно дополняемому в $N(L)$ подпространству $N_1(L)$; $Y \cong N_1(L) \subset N(L)$.*

В этом случае существуют линейный ограниченный обратимый оператор $J_2 : N_1(L) \to Y$, такой что $J_2 N_1(L) = Y$, $J_2^{-1} Y = N_1(L)$, и ограниченный проектор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, разбивающий подпространство $N(L)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L),$$

где $N_1(L) = \mathcal{P}_{N_1(L)} \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)} \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — ограниченный проектор.

Тогда имеем два следующих разложения:

$$I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} = \mathcal{P}_{N_1(L)} + \mathcal{P}_{N_2(L)} + \mathcal{P}_X,$$
$$I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} = \mathcal{P}_Y + \mathcal{P}_{R(L)}.$$

(a3) *Подпространство $N(L)$ линейно изоморфно подпространству Y; $N(L) \cong Y$.*

В этом случае существует линейный ограниченный обратимый оператор $J_3 : N(L) \to Y$ такой что $J_3 N(L) = Y$, $J_3^{-1} Y = N(L)$.

Продолжим нулем операторы J_1 и J_3 на подпространстве X, а J_2 — на подпространстве $X \oplus N_2(L)$ и обозначим расширения операторов $J_i, i = 1, 2, 3$ на пространство $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} : \mathbf{B}_1 \to Y_1 \subseteq Y$. Аналогично продолжим нулем оператор J_1^{-1} на подпространстве $Y_2 \oplus R(L)$, а операторы J_2^{-1}, J_3^{-1} — на подпространстве $R(L)$ и обозначим через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_2 \to N_1(L) \subseteq N(L)$ — расширения операторов $J_i^{-1}, i = 1, 2, 3$ на пространство $\mathbf{B}_2$. В случае (a3) имеем $Y_1 \equiv Y$, $N_1(L) \equiv N(L)$, и поэтому $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1} \equiv \overline{\mathcal{P}}_Y$, $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)} \equiv \overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$.

Лемма 1. *Пусть $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ и выполнено одно из условий* (a1) *или* (a2). *Тогда оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ имеет ограниченный односторонне обратный оператор*

$$\overline{L}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1} - \textit{левый}, & \textit{если } N(L) \cong Y_1 \subset Y, \\ (L + \overline{\mathcal{P}}_Y)_r^{-1} - \textit{правый}, & \textit{если } N(L) \supset N_1(L) \cong Y. \end{cases}$$

Общий вид односторонне обратных операторов $\overline{L}_{l_0, r_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{L}_{l_0, r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2}) - \textit{левый}, & \textit{если } N(L) \cong Y_1 \subset Y, \\ (I_{\mathbf{B}_1} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1} - \textit{правый}, & \textit{если } N(L) \supset N_1(L) \cong Y, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N_2(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N_2(L)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_2$ — произвольные ограниченные проекторы.

Доказательство. Пусть, например, $N(L)$ изоморфно подпространству $Y_1 \subset Y$. Покажем, что оператор $L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ имеет ограниченный левый обратный. Для этого необходимо и достаточно показать, что [4, с. 61]:

1) $N(\overline{L}) = N(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \{0\}$;

2) $R(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1})$ дополняемо в $\mathbf{B}_2$.

Покажем это.

1. Пусть существует элемент $z_0 \in \mathbf{B}_1$, $z_0 \neq 0$, такой что

$$(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1})z_0 = Lz_0 + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}z_0 = 0.$$

Отсюда имеем, что $Lz_0 \in R(L)$, $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}z_0 \in Y_1$.

Подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют друг друга, а $Y_1 \subset Y$, следовательно, $R(L)\bigcap Y_1 = \{0\}$. Таким образом, они имеют только один общий элемент — нулевой, $Lz_0 = 0$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}z_0 = 0$, т.е. $z_0 \in N(L)$ и $z_0 \in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X$ одновременно. Подпространства $N(L)$ и X взаимно дополняют друг друга. Следовательно, $N(L)\bigcap X = \{0\}$. Отсюда следует, что $z_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) = \{0\}$.

2. Дополняемость $R(L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1})$ следует из ограниченности проектора $\mathcal{P}_{Y_2}$ и соотношения (3).

Таким образом, оператор $L+\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ имеет левый обратный.

Известно [4], что левые обратные операторы в общем виде записываются следующим образом: $\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$, где $\mathcal{P}_{R(\overline{L})}$ — некоторый проектор, обладающий свойством $R(\mathcal{P}_{R(\overline{L})}) = R(\overline{L})$. Как следует из разложений (4), таким свойством обладает проектор $I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2}$, т. е. $R(I_{\mathbf{B}_2} - \widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2}) = R(\overline{L})$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{Y_2} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_2$ — ограниченный проектор, построенный в общем виде. Отсюда следует, что общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_l^{-1}(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_{\widetilde{Y}_2}).$$

В случае когда Y изоморфно подпространству $N_1(L) \subset N(L)$, имеем, что $Y_1 \equiv Y$ и $\mathcal{P}_{Y_1} \equiv \mathcal{P}_Y$. Для существования ограниченного правого обратного оператора к оператору $L+\overline{\mathcal{P}}_Y$ необходимо и достаточно показать, что [4, с. 62]:

1) $R(\overline{L}) = R(L+\overline{\mathcal{P}}_Y) = \mathbf{B}_2$,

2) $N(L+\overline{\mathcal{P}}_Y)$ дополняемо в $\mathbf{B}_1$.

Для этого случая доказательство проводится аналогично проведенному выше. □

Замечание 1. Если оператор $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — нетеров ($\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\ker L^* \neq 0 < \infty$), то лемма 1 переходит в лемму 2.4 из работ [5, с. 47; 6].

Замечание 2. В отличие от конечномерного случая, когда ядро и коядро оператора L конечномерны, для ограниченности односторонне обратного оператора $\overline{L}_{l_0, r_0}^{-1}$ в бесконечномерном случае требования дополняемости нуль-пространства $N(L)$ и образа $R(L)$ оказывается недостаточно, так как ядро и образ оператора $\overline{L}$ могут оказаться недополняемыми. Поэтому дополняемость подпространств Y_1, $N_1(L)$ в Y и $N(L)$ соответственно является существенным условием и выполняется в банаховых пространствах далеко не всегда (в отличие от гильбертовых, имеющих ортогональное дополнение к любому подпространству).

Для случая 3, когда $N(L)$ изоморфно Y, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ *и выполнено условие* (а3). *Тогда оператор*

$$L^- = (L + \overline{\mathcal{P}}_Y)^{-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} = \overline{L}^{\,-1} - \overline{\mathcal{P}}_{N(L)} \tag{5}$$

является ограниченным обобщенно-обратным к оператору L.

Общий вид обобщенно-обратных операторов L_0^- *к оператору* L *дается формулой*

$$L_0^- = (I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N(L)})L^-(I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - \widetilde{\mathcal{P}}_Y),$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ *и* $\widetilde{\mathcal{P}}_Y : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y$ *— произвольные ограниченные бесконечномерные проекторы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. □

Замечание 3. Если оператор $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ имеет конечномерные ядро и коядро и $\dim N(L) = \dim N(L^*)$, т. е. он является фредгольмовым, то конструкция (5) переходит в конструкцию из работы [7, с. 340].

Далее получим условия разрешимости и представление общего решения операторного уравнения (1).

Из формулы (3) следует, что общее решение операторного уравнения (1) с линейным ограниченным обобщенно обратимым оператором L представляет собой прямую сумму

$$z(t) = \tilde{z}(t) + \bar{z}(t)$$

общего решения $\tilde{z}(t)$ соответствующего уравнению (1) однородного уравнения $(Lz)(t) = 0$ и частного решения $\bar{z}(t) = (L^{-}\varphi)(t)$ неоднородного уравнения (1).

Поскольку оператор $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$, то линейное операторное уравнение (1) является нормально разрешимым, и для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы элемент $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ принадлежал образу $R(L)$ оператора L. Поскольку $R\,(L) = N\,(\mathcal{P}_Y)$, то из выражений (2) следует, что $\varphi \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ будет принадлежать образу $R(L)$ оператора L тогда и только тогда, когда

$$(\mathcal{P}_Y\varphi)(t) = 0. \tag{6}$$

Эти рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$. Операторное уравнение (1) разрешимо для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, для которых выполняется условие (6), и при этом оно имеет семейство решений*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t) + (L^{-}\,\varphi)(t), \tag{7}$$

где $(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z})(t)$ — общее решение соответствующего (1) однородного уравнения $(Lz)(t) = 0$; $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахового пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$; $(L^{-}\,\varphi)(t)$ — частное решение операторного уравнения (1); L^{-} — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору L.

Доказательство. Подставив решение (7) в исходное уравнение (1), получим

$$Lz = L\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z} + LL^{-}\varphi = LL^{-}\varphi = (I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_Y)\varphi =$$
$$= I_{\mathbf{B}_2}\varphi - \mathcal{P}_Y\varphi = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)}\varphi = \varphi,$$

поскольку $L\mathcal{P}_{N(L)} = 0$, $LL^{-} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)} - \mathcal{P}_Y$, а $\mathcal{P}_Y\varphi = 0$ по условию теоремы. $\square$

2. Линейные краевые задачи

Далее рассмотрим задачу о необходимых и достаточных условиях разрешимости и структуре множества решений $z(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ линейной краевой задачи

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \tag{8}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \tag{9}$$

где $\ell = \mathrm{col}(l_1, l_2,\ l_3, \ldots) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ — линейный ограниченный вектор-функционал, $\mathbf{B}$ — банахово пространство векторов с постоянными компонентами, $\alpha \in \mathbf{B}$.

По теореме 2 нормально разрешимое уравнение (8) разрешимо для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, которые удовлетворяют условию (6), при выполнении которого общее решение уравнения (8) представимо в виде (7).

Для того чтобы решение (7) неоднородного операторного уравнения (8) было решением краевой задачи (8), (9) необходимо и достаточно, чтобы элемент $\hat{z}(t) = \hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ удовлетворял операторному уравнению

$$\ell(\mathcal{P}_{N(L)}\hat{z}_0)(\cdot) + \ell(L^-\varphi)(\cdot) = \alpha,$$

полученному после подстановки решения (7) в краевое условие (9).

Обозначим через $\mathcal{L}* = \ell\mathcal{P}_{N(L)}*$ линейный оператор, действующий из банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Оператор $\mathcal{L}$ является ограниченным как суперпозиция ограниченных функционала ℓ и проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$.

Пусть оператор $\mathcal{L} \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B}$. Обозначим: $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to$ $\to N(\mathcal{L})$ — ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ на нуль-пространство оператора $\mathcal{L}$; $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} : \mathbf{B} \to Y_\mathcal{L}$ — ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{B}$ на подпространство $Y_\mathcal{L} \subset \mathbf{B}$; $\mathcal{L}^-$ — линейный ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору $\mathcal{L}$.

Из операторного уравнения

$$(\mathcal{L}\hat{z}_0)(\cdot) = \alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot) \tag{10}$$

определим элемент $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, при котором решение (7) уравнения (8), существующее при выполнении условия (6), будет решением краевой задачи (8), (9). Поскольку по предположению оператор $\mathcal{L}$ — обобщенно обратим, а следовательно, нормально разрешим, то уравнение (10) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\alpha - \ell(L^{-}\varphi)(\cdot)\} = 0.$$

При выполнении этого условия уравнение (10) имеет семейство решений вида

$$\hat{z}_0(t) = (\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (\mathcal{L}^{-}\{\alpha - \ell(L^{-}\varphi)(\cdot)\})(t), \tag{11}$$

где $\hat{z}(t)$– произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Подставляя $\hat{z}_0(t)$ из (11) вместо $\hat{z}(t)$ в (7), получим общее решение краевой задачи (8), (9)

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\{(\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(\cdot) + \mathcal{L}^{-}[\alpha - \ell(L^{-}\varphi)(\cdot)]\})(t) + (L^{-}\varphi)(t) =$$
$$= (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (G\varphi)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\alpha)(t).$$

Здесь $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — разрешающий оператор соответствующей (8), (9) однородной краевой задачи, а оператор $G : \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to N(\ell) \subset \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ имеет представление

$$(G\varphi)(t) = (L^{-}\varphi)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\ell(L^{-}\varphi)(\cdot))(t) \tag{12}$$

и называется обобщенным оператором Грина полуоднородной ($\alpha = 0$) краевой задачи (8), (9).

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия $L \in GI(\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ и $\mathcal{L} \in GI(\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$.*

Тогда соответствующая задаче (8), (9) *однородная краевая задача* ($\varphi(t) = 0$, $\alpha = 0$) *имеет семейство решений*

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t),$$

где $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$.

Неоднородная краевая задача (8), (9) *разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{l}_{\infty}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$, которые удовлетворяют условиям*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0,$$
$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{L}}}\{\alpha - \ell(L^{-}\varphi)(\cdot)\} = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (G\varphi)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^{-}\alpha)(t), \tag{13}$$

где $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — разрешающий оператор соответствующей задаче (8), (9) *однородной краевой задачи; G — обобщенный оператор Грина* (12).

Следствие 1. *Если операторы L и $\mathcal{L}$ — нормально разрешимые и действуют в гильбертовых пространствах, то в теореме 4 вместо обобщенно-обратных операторов L^- и $\mathcal{L}^-$ будут псевдообратные операторы L^+ и $\mathcal{L}^+$* [6], *а вместо проекторов $\mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_{Y_L}$ и $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$, $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}$ будут ортопроекторы $P_{N(L)}$, $P_{N(L^*)}$ и $P_{N(\mathcal{L})}$, $P_{N(\mathcal{L}^*)}$ соответственно. В этом случае формула* (13) *примет вид*

$$z(t) = (P_{N(L)}P_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (G\varphi)(t) + (P_{N(L)}\mathcal{L}^+\alpha)(t),$$

где $(G\varphi)(t) = (L^+\varphi)(t) - (P_{N(L)}\mathcal{L}^+\ell(L^+\varphi)(\cdot))(t)$ *— обобщенный оператор Грина.*

Применим теорему 3 к следующей начальной задаче:

$$(Lz)(t) = \varphi(t), \tag{14}$$

$$\ell z(\cdot) \equiv z(t_0) = z_0, \ t_0 \in \mathcal{I}. \tag{15}$$

Эта задача является специфической краевой задачей, в которой $\mathcal{L}* = (\mathcal{P}_{N(L)}*)(t_0)$.

Следствие 2. *Пусть* $L \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2))$ *и* $\mathcal{L} \in GI(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1),\mathbf{B})$.

Тогда задача Коши (14), (15) *разрешима для тех и только тех* $z_0 = z(t_0) \in \mathbf{B}_1$ *и* $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_2)$, *которые удовлетворяют условиям*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0,$$
$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\{z_0 - (L^-\varphi)(t_0)\} = 0,$$

и при этом имеет семейство решений

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}\hat{z})(t) + (G_0\varphi)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^- z_0)(t), \tag{16}$$

где $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$ — разрешающий оператор соответствующей (14), (15) *однородной* ($z_0 = 0$, $\varphi(t) = 0$) *задачи Коши; $\hat{z}(t)$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$;* $(G_0\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-(L^-\varphi)(t_0))(t)$ *— оператор Грина полуоднородной* ($z_0 = 0$) *задачи Коши* (14), (15).

Замечание 4. Если L — всюду разрешимый дифференциальный оператор $(Lz)(t) = z'(t) - A(t)z(t)$, действующий из банахового пространства $\mathbf{C}^1(\mathcal{I},\mathbf{B})$ непрерывно дифференцируемых функций со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ в банахово пространство $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$ непрерывных вектор-функций с супремум-нормой, и $\varphi(t)$ — непрерывная на промежутке $\mathcal{I}$ вектор-функция, то $\mathcal{P}_{Y_L}\equiv 0$, оператор $\mathcal{L}*=(\mathcal{P}_{N(L)}*)(t_0)$ обратим для любого $t_0\in\mathcal{I}$, обобщенно-обратный оператор L^- будет интегральным правым обратным оператором L_r^{-1}. В этом случае формула (16) примет вид [3, с. 148]

$$z(t)=U(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}U(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,\quad t_0\in\mathcal{I},$$

где $U(t,\tau)=U(t)U^{-1}(\tau)$ — эволюционный оператор.

3. Линейные краевые задачи для интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром

В качестве примера рассмотрим линейную краевую задачу для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.

Пусть $z(t)$ — вектор-функция, которая действует из отрезка $\mathcal{I}=[a,b]$ в действительное банахово пространство $\mathbf{B}_1$; $z(t)\in\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ означает, что $z(\cdot)\to\mathbf{B}_1, |z|=\sup_{t\in\mathcal{I}}|z(t)|_{\mathbf{B}_1}$; $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ — банахово пространство непрерывных на $\mathcal{I}$ вектор-функций; $\mathbf{B}$ — действительное банахово пространство.

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{B}_1$ линейную краевую задачу для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$(Lz)(t):=z(t)-M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds=\varphi(t), \tag{17}$$

$$\ell z(\cdot)=\alpha, \tag{18}$$

где оператор-функции $M(t)$ и $N(t)$, действующие из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{B}_1$, сильно непрерывны с нормами $|||M|||=\sup_{t\in\mathcal{I}}\|M(t)\|_{\mathbf{B}_1}=$ $=M_0<\infty$ и $|||N|||=\sup_{t\in\mathcal{I}}||N(t)||_{\mathbf{B}_1}=N_0<\infty$; оператор ℓ ограничен и действует из банахова пространства $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)$ в банахово пространство $\mathbf{B}_1$; $\ell:\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)\to\mathbf{B}$, $\alpha\in\mathbf{B}$.

Известно [3, с. 141], что произведение $M(t)x$ сильно непрерывной оператор-функции $M(t)$ на элемент $x\in\mathbf{B}_1$ является непрерывной вектор-функцией. Поэтому оператор L действует из банахова пространства $\mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1)$ в это же пространство. Обозначим

$$D = I_{\mathbf{B}_1} - A, \quad A = \int\limits_a^b N(s)M(s)\,ds.$$

Линейный оператор D действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{B}_1$ и является ограниченным. Пусть оператор $D \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$. Тогда существуют следующие ограниченные проекторы: $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \to N(D)$, который проектирует банахово пространство $\mathbf{B}_1$ на нуль-пространство $N(D)$ оператора D; и $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \to Y_D$, который проектирует банахово пространство $\mathbf{B}_1$ на подпространство Y_D, изоморфное нуль-пространству $N(D^*)$ сопряженного оператора D^* к оператору D. Также существует ограниченный обобщенно-обратный оператор D^-.

Теорема 4. *Пусть $D \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$. Тогда интегральный оператор L из задачи* (17) *обобщенно обратим.*

Для доказательства обобщенной обратимости интегрального оператора (17) построены проекторы

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int\limits_a^b N(s)z(s)ds, \quad \mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1) \to N(L),$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds, \quad \mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{C}([a,b],\mathbf{B}_1) \to Y_L,$$

и доказано, что они ограничены.

Теорема 5. *Пусть $D \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$. Тогда оператор*

$$(L^- f)(t) = \varphi(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)ds \tag{19}$$

является ограниченным обобщенно-обратным оператором к интегральному оператору L из (17)*, где D^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору D.*

Сначала найдем условия существования и общий вид решения операторного уравнения (17). Поскольку обобщено обратимый оператор нормально разрешим, то для уравнения (17) справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $D \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$. Тогда при выполнении условия*

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D} \int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds = 0$$

и только при нем операторное уравнение (17) *разрешимо и имеет семейство решений*

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + (L^{-}\varphi)(t), \tag{20}$$

где $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$ — оператор-функция, которая является решением соответствующего уравнению (17) *однородного уравнения*; c *— произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$; L^{-} — обобщенно-обратный оператор* (19) *к интегральному оператору L из уравнения* (17).

Запишем уравнение (17) в виде

$$z(t) = M(t)\, c + \varphi(t), \tag{21}$$

где $c = \int_a^b N(s)z(s)ds$.

Применив к обеим частям уравнения (21) оператор-функцию $N(t)$ и проинтегрировав их на промежутке $[a, b]$, получим операторное уравнение

$$\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = \int\limits_a^b N(s)M(s)\, c\, ds + \int\limits_a^b N(s)f(s)ds,$$

или

$$(I_{\mathbf{B}_1} - A)c = Dc = b, \tag{22}$$

где

$$b = \int\limits_a^b N(s)f(s)ds.$$

Учитывая обобщенную обратимость оператора $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$ имеем, что операторное уравнение (22) нормально разрешимо, т. е. оно разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathcal{P}_{Y_D} b = 0,$$

при этом семейство решений уравнения имеет вид

$$c = \mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^{-}b,$$

где $\hat{c}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$.

Подставив полученное c в выражение (20), получим общее решение интегрального уравнения (17)

$$\begin{aligned} z(t) &= M(t)\,\{\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + D^{-}b\} + \varphi(t) = \\ &= M(t)\,\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + \varphi(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds = \\ &= M(t)\,\mathcal{P}_{N(D)}\hat{c} + (L^{-}\varphi)(t), \end{aligned} \tag{23}$$

поскольку по теореме 4

$$(L^{-}\varphi)(t) = \varphi(t) + M(t)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds.$$

Далее найдем условия существования и общее решение краевой задачи (17), (18). Подставив решение (20) неоднородного операторного уравнения (17) в краевое условие (18), получим операторное уравнение

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})\hat{c} + \ell\varphi(\cdot) + \ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds = \alpha. \tag{24}$$

Обозначим через $Q = \ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})$ оператор, который действует из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Оператор Q ограничен как суперпозиция ограниченного оператора ℓ и ограниченной оператор-функции $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}$. Тогда уравнение (24) запишется в виде

$$\hat{c} = \alpha - \ell\varphi(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds. \tag{25}$$

Пусть оператор $Q \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$. Обозначим через $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B}_1 \to N(Q)$ ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{B}_1$ на нуль-пространство $N(Q)$ оператора Q, $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B} \to Y_Q$ — ограниченный проектор банахова пространства $\mathbf{B}$ на подпространство $Y_Q \subset \mathbf{B}$. Поскольку оператор Q обобщенно обратим, а следовательно, нормально разрешим, то уравнение (25) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\Big[\alpha - \ell\varphi(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds\Big] = 0,$$

при выполнении которого уравнение имеет семейство решений

$$\hat{c} = \mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c} + Q^{-}\Big[\alpha - \ell\varphi(\cdot) - \ell M(\cdot)D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds\Big], \tag{26}$$

где $\tilde{c}$ — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}_1$, Q^{-} — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору Q.

Подставляя $\hat{c}$ из (26) в (23), получим общее решение краевой задачи (17), (18)

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c} + \Big[\varphi(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell\varphi(\cdot)\Big] + M(t)\times$$
$$\times\big[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\big]D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\alpha =$$
$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c} + (G\varphi)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\alpha,$$

где

$$(Gf)(t) = \big[\varphi(t) - M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell\varphi(\cdot)\big]+$$
$$+M(t)\big[I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(D)}Q^{-}\ell M(\cdot)\big]D^{-}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)\,ds \tag{27}$$

есть обобщенный оператор Грина полуоднородной ($\alpha = 0$) краевой задачи (17), (18), а оператор-функция $M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}$ является решением соответствующей однородной ($\varphi(t) = 0$, $\alpha = 0$) краевой задачи.

Действительно,

$$(Lz)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)} - M(t)\int\limits_a^b N(s)\Big\{M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\Big\}ds =$$
$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)} - M(t)A\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)} = 0,$$

поскольку $A = I_{\mathbf{B}_1} - D$, $D\mathcal{P}_{N(D)} = 0$, а

$$\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)})\mathcal{P}_{N(Q)} = Q\mathcal{P}_{N(Q)} = 0,$$

так как $\ell(M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)}) = Q$, а $Q\mathcal{P}_{N(Q)} = 0$.

Следовательно, для краевой задачи (17), (18) справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть операторы* $D \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1)$ *и* $Q \in GI(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$. *Тогда соответствующая задаче* (17), (18) *однородная* ($\varphi(t) = 0, \alpha = 0$) *краевая задача имеет семейство решений*

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c},$$

где $\tilde{c}$ — *произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}_1$.

Неоднородная краевая задача (17), (18) разрешима для тех и только тех $\varphi(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ и $\alpha \in \mathbf{B}$, которые удовлетворяют условиям

$$(\mathcal{P}_{Y_L} f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_Q}\Big[\alpha - \ell\varphi(\cdot) - \ell M(\cdot)D^- \int\limits_a^b N(s)\varphi(s)ds\Big] = 0,$$

при этом она имеет семейство решений

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(Q)}\tilde{c} + (Gf)(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}Q^-\alpha,$$

где G — обобщенный оператор Грина (27).

Список литературы

1. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004. — 552 с.

2. *Кадец М.И., Митягин Б.С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. — 1973. — Т. 28, вып. 6. — С. 77—94.

3. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

4. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.

5. *Бойчук А.А.,Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. — 319 с.

6. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 c.

7. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.

Журавлев Валерий Филиппович
Житомирский национальный агроэкологический университет, Житомир, Украина
E-mail: `vfz2008@ukr.net`