УДК 517.929.4, 519.21

Р.И. Кадиев, А.В. Поносов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Описана модификация W-метода Н.В. Азбелева с помощью теории положительно обратимых матриц. Отличие состоит в том, что преобразуется каждое уравнение системы в отдельности, и сначала оценивается каждая компонента решения. Далее для получения оценки решения, которая обеспечивает соответствующую устойчивость решения, применяется теория положительно обратимых матриц. Такой подход позволяет получить новые результаты для линейных стохастических уравнений с последействием в терминах параметров этих уравнений.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения с последействием, устойчивость решений, метод вспомогательных уравнений, положительная обратимость матриц.

Введение

W-метод в его настоящем виде был предложен Н.В. Азбелевым, но, согласно его комментарию в работе [1], он восходит к Г. Фубини и Ф. Трикоми. Первоначально метод описывал способ регуляризации краевых задач для детерминированных дифференциальных уравнений. Позже он был развит, обобщен и применен в теории устойчивости детерминированных [2—7] и стохастических [8—15] функционально-дифференциальных уравнений.

В детерминированном случае W-метод может быть схематически описан следующим образом (см. [1], где описана более общая ситуация). Прежде всего устанавливается связь между асимптотическим поведением решений и допустимостью определенных пар функциональных пространств на полуоси. Затем проверяется свойство допустимости при выборе более простого уравнения (называемого *модельным уравнением*), которое уже обладает требуемым свойством. Решив это уравнение, приходим к интегральному преобразованию (W-преобразованию), которое, будучи примененным к первоначальному уравнению, дает интегральное уравнение вида $x - \Theta x = f$. Если последнее разрешимо (например, если $\|\Theta\| < 1$), то допустимость, а значит, и устойчивость доказаны. Этот метод является особенно полезным для линейных функционально-дифференциальных уравнений, но во многих ситуациях эта идея может оказаться плодотворной и в нелинейном случае.

В определенном смысле W-метод аналогичен прямому (второму) методу Ляпунова. Только вместо поиска функции (функционала) Ляпунова мы пытаемся найти подходящее модельное уравнение, решения которого обладают заданными асимптотическими свойствами. Важно подчеркнуть, что теоретически этот подход, как и метод Ляпунова, также дает необходимые и достаточные условия устойчивости.

В настоящей статье описывается модификация W-метода с помощью теории положительно обратимых матриц. Отличие состоит в том, что преобразуется каждое уравнение системы в отдельности, и сначала оценивается каждая компонента решения. Далее для получения оценки решения применяется теория положительно обратимых матриц. Такой подход позволяет получить новые результаты для линейных стохастических уравнений с последействием в терминах параметров этих уравнений. При проведении исследований использован подход работы [16], примененный для исследования глобальной экспоненциальной устойчивости систем детерминированных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздываниями. В случае стохастических уравнений понятие *стохастические функционально-дифференциальные уравнения* введено нами по аналогии с детерминированным случаем и является обобщением стохастических обыкновенных уравнений и стохастических уравнений с последействием. Ранее нами устойчивость решений линейных стохастических уравнений с последействием была исследована на основе теории допустимости пар пространств для линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений. В рамках этой статьи нами будут применены идеи этого подхода без использования терминологии допустимости пар пространств.

1. Предварительные сведения и объект исследования

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geqslant 0}, P)$ — стохастический базис, где Ω — множество элементарных событий; $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий на Ω; $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$ — непрерывный справа поток σ-алгебр на Ω; P — полная вероятностная мера на $\mathcal{F}$; $\mathcal{B}_i$, $i = 2, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы; N^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных процессов, заданных на $(-\infty, 0)$; k^n — линейное пространство n-мерных $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных величин; E — символ математического ожидания; $|\cdot|$ — норма в R^n; $\|\cdot\|$ — норма $n\times n$-матрицы, согласованная с нормой в R^n; $Z = (z_1, \ldots, z_m)^T$ — m-мерный семимартингал [17]; $\bar{E}$ — единичная $n\times n$-матрица; $1 \leqslant p < \infty$.

Рассмотрим начальную задачу

$$dx(t) = (V_1 x)(t)\, dZ(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$x(s) = \varphi(s), \qquad s < 0, \tag{1a}$$

$$x(0) = x_0, \tag{1b}$$

где V_1 — k^1-линейный (см. ниже) вольтерров оператор, т. е. оператор, зависящий от «прошлого», который определен на некоторых пространствах случайных процессов, $\varphi \in N^n$, $x_0 \in k^n$. Под k^1-линейностью понимается следующее свойство:

$$V_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 V_1 x_1 + \alpha_2 V_1 x_2$$

для любых ограниченных $\mathcal{F}_0$-измеримых скалярных α_1, α_2 и любых x_1, x_2 из области определения оператора V_1. Решение задачи (1), (1b) обозначается $x(t, x_0, \varphi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Ниже предполагаются его существование и единственность для соответствующих $\varphi(s)$, x_0.

Замечание 1. Отметим, что в строке (1a) написано $s < 0$. Обычно строку (1b) включают в строку (1a), написав $s \leqslant 0$. Н.В. Азбелев и его ученики называют (1), (1a) *уравнением.* Такой подход аналогичен подходу, принятому в работе [2], и позволяет рассматривать уравнение (1), (1a) как обобщение обыкновенного линейного стохастического уравнения. В дальнейшем мы также будем называть (1), (1a) *линейным стохастическим уравнением с последействием.*

Замечание 2. Уравнение (1), (1a) называют *однородным*, если $\varphi(s) \equiv 0$.

Определение 1. Нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) называется:

- *p-устойчивым по отношению к начальному значению x_0 и функции «предыстории»* φ (или просто *p-устойчивым*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех φ и x_0 из неравенства $E|x_0|^p + \operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p < \delta$ следует оценка $E|x(t, x_0, \varphi)|^p \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$;

- *асимптотически p-устойчивым*, если оно p-устойчиво и, кроме того, для всех φ и x_0, таких что $E|x_0|^p + \operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p < \delta$, выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty} E|x(t, x_0, \varphi)|^p = 0$;
- *экспоненциально p-устойчивым*, если существуют положительные константы $\bar{c}$, β, такие что для всех φ и x_0 справедливо неравенство $E|x(t, x_0, \varphi)|^p \leqslant \bar{c}(E|x_0|^p + \operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p)\exp\{-\beta s\}$ при $t \geqslant 0$.

Как и в детерминированном случае, мы представим уравнение (1), (1a) в более удобном для анализа виде. Пусть $x(t)$ — случайный процесс на полуоси ($t \geqslant 0$), $x_+(t)$ — случайный процесс, совпадающий с $x(t)$ при $t \geqslant 0$ и равный нулю при $t < 0$, а $\varphi_-(t)$ — случайный процесс, совпадающий с $\varphi(t)$ при $t < 0$ и равный нулю при $t \geqslant 0$. Тогда случайный процесс $x_+(t) + \varphi_-(t)$, заданный на всей числовой оси, будет решением задачи (1), (1b), если $x(t)$ будет решением задачи

$$dx(t) = ((Vx)(t) + f(t))\,dZ(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2a}$$

где $(Vx)(t) = (V_1 x_+)(t)$, $f(t) = (V_1\varphi_-)(t)$ при $t > 0$. Действительно, $V_1(x_+ + \varphi_-) = V_1(x_+) + V_1(\varphi_-) = Vx + f$, что дает (2). Заметим, что f однозначно определяется функцией φ, задающей предысторию решения, и не зависит от решения $x(t)$, $t > 0$. Отметим также, что задача Коши (2), (2a) эквивалентна начальной задаче (1), (1b) только для тех f, которые представимы в виде $f = V_1\varphi_1$, где φ_1 является каким-либо продолжением функции φ на $(-\infty, +\infty)$.

В дальнейшем используются следующие линейные пространства случайных процессов:

- $L^n(Z)$ состоит из $n\times m$-матричных предсказуемых случайных процессов, заданных на $[0, +\infty)$, строки которых являются локально интегрируемыми по семимартингалу Z (см., например, [17]);
- D^n состоит из n-мерных случайных процессов на $[0, +\infty)$, которые могут быть представлены в виде $x(t) = x(0) + \int_0^t H(s)dZ(s)$, где $x(0) \in k^n$, $H \in L^n(Z)$.

Как было отмечено во введении, ранее нами устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1), (1a) была исследована на основе теории допустимости пар пространств для уравнения (2), где $V : D^n \to L^n(Z)$ — k^1-линейный вольтерров оператор, $f \in L^n(Z)$. Оператор $V : D^n \to L^n(Z)$ называют *вольтерровым*, если для любого момента остановки τ, значения которого из множества $[0, +\infty)$ с вероятностью единица, и для любых случайных процессов x, y, принадлежащих пространству D^n, из того, что $x(t) = y(t)$ при $t \in [0, \tau]$ почти наверное, будет следовать $(Vx)(t) = (Vy)(t)$ при $t \in [0, \tau]$ почти наверное. В дальнейшем в задаче (2), (2a) будем считать, что $V : D^n \to L^n(Z)$ — k^1-линейный вольтерров оператор, $f \in L^n(Z)$, $x_0 \in k^n$.

Решение задачи (2), (2a) — это случайный процесс из D^n, удовлетворяющий интегро-функциональному уравнению

$$x(t) = x_0 + (Fx)(t), \quad t \geqslant 0,$$

где $(Fx)(t) = \int_0^t (Vx)(s)\,dZ(s)$ — вольтерров оператор, действующий в пространстве D^n (интеграл в предыдущем равенстве — *стохастический интеграл по семимартингалу* Z [11]). Решением задачи (1), (1b) является решение задачи (2), (2a), если задача (2), (2a) является задачей, соответствующей задаче (1), (1b).

Уравнение (2) называют *линейным функционально-дифференциальным уравнением по семимартингалу.* Частными случаем уравнения (2) являются линейные функционально-дифференциальные уравнения Ито. В этом случае $Z(t) = \mathrm{col}\,(t, \mathcal{B}_2(t), \ldots, \mathcal{B}_m(t))$.

Частными случаями уравнения (1), (1a) являются:

1) *система линейных обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений по семимартингалу (система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Ито)*;
2) *система линейных стохастических дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием по семимартингалу (система линейных дифференциальных уравнений Ито с сосредоточенным запаздыванием)*;
3) *линейное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение по семимартингалу (линейное интегро-дифференциальное уравнение Ито)*;
4) *линейное стохастическое дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием по семимартингалу (линейное дифференциальное уравнение Ито с распределенным запаздыванием).*

Следовательно, все упомянутые уравнения можно записать в виде уравнения (2).

Если в уравнении (2) $f \equiv 0$, то его называют *линейным однородным стохастическим функционально-дифференциальным уравнением.*

Частными случаями уравнения (2) являются стохастические функционально-дифференциальные уравнения в мерах. В этом случае $Z(t) = \lambda(t)$, где $\lambda(t)$ — некоторая функция с локально ограниченной вариацией; $L^n(Z)$ — линейное пространство n-мерных случайных процессов на $[0, +\infty)$, траектории которых почти наверно локально интегрируемы по функции λ. К линейному стохастическому функционально-дифференциальному уравнению в мерах (2) сводятся линейная система обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений в мерах линейная система стохастических дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием в мерах, линейная система стохастических интегро-дифференциальных уравнений в мерах, линейная система стохастических дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием в мерах. Кроме того, если пространство элементарных событий Ω состоит из достоверного и невозможного событий, то стохастические функционально-дифференциальные уравнения в мерах (2) являются детерминированными функционально-дифференциальными уравнениями в мерах. Частными случаями детерминированных функционально-дифференциальных уравнений в мерах являются детерминированные функционально-дифференциальные уравнения. В этом случае $\lambda(t) \equiv t$.

Пусть B — линейное подпространство пространства $L^n(Z)$. Предполагается, что пространство B наделено нормой $\| \cdot \|_B$. Для заданной положительной непрерывной функции $\gamma(t)$, $t \in [0, \infty)$ положим $B^\gamma = \{f : f \in B, \gamma f \in B\}$, что является линейным пространством с нормой $\|f\|_{B^\gamma} = \|\gamma f\|_B$.

Нам также понадобятся некоторые линейные нормированные подпространства пространств начальных данных k^n и N^n, а также пространства решений D^n:

$$N_p^n = \{\varphi : \varphi \in N^n, \operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p) < \infty,$$
$$\|\varphi\|_{N_p^n} = \operatorname{vrai\,sup}_{s<0} (E|\varphi(s)|^p)^{1/p}\};$$
$$k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n, E|\alpha|^p < \infty, \|\alpha\|_{k_p^n} = (E|\alpha|^p)^{1/p}\};$$
$$M_p^\gamma = \{x : x \in D^n, \sup_{t \geqslant 0} E|\gamma(t)x(t)|^p < \infty\}, M_p^1 = M_p.$$

Определение 2. Нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) назовем *M_p^γ-устойчивым по отношению к начальному значению x_0 и функции φ* (или просто *M_p^γ-устойчивым*), если для любых $x_0 \in k_p^n$ и $\varphi \in N_p^n$ имеем $x(t, x_0, \varphi) \in M_p^\gamma$ и $\|x(\cdot, x_0, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leqslant c(\|x_0\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{N_p^n})$, где c — некоторое положительное число.

Нетрудно убедиться, что:

1) если $\gamma(t) = 1$ $(t \geqslant 0)$ и нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) M_p^γ-устойчиво, то нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) p-устойчиво;

2) если $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ $(t \geqslant 0)$ и нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) M_p^γ-устойчиво, то нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) является экспоненциально p-устойчивым;

3) если $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$ и $\gamma(t) \geqslant \delta > 0$ при $t \in [0, +\infty)$ для некоторого числа δ и нулевое решение однородного уравнения (1), (1a) M_p^γ-устойчиво, то нулевое решение уравнения (1), (1a) является асимптотически p-устойчивым.

2. Метод исследования

Через $x_f(t, x_0)$ обозначим решение задачи (2), (2a), т. е. решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (2a) $(x_f(0, x_0) = x_0)$.

Представление решений детерминированных функционально-дифференциальных уравнений (*формула Коши*) играет важную роль, например, в задачах устойчивости, краевых задачах, а также в теории квазилинейных уравнений. Рассмотрим вопрос представления решений для задачи (2), (2a).

Лемма 1. *Пусть задача* (2), (2a) *имеет единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение для любых $f \in L^n(Z)$ и $x_0 \in k^n$. Тогда для решения этой задачи имеет место представление*

$$x_f(t, x_0) = X(t)x(0) + (Cf)(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $X(t)\,(X(0) = \bar{E})$ — $n \times n$-матрица, столбцами которой являются решения однородного уравнения (2) *(фундаментальная матрица), а $C : L^n(Z) \to D^n$ — k^1-линейный оператор (оператор Коши), такой что $(Cf)(0) = 0$ и Cf — решение уравнения* (2).

Доказательство. Используя k^1-линейность оператора V нетрудно убедиться в том, что $X(t)x(0)$ является решением однородного уравнения (2). Для уравнения (2) рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = 0. \tag{2b}$$

Задача Коши (2), (2b) в силу предположений леммы однозначно разрешима при любом $f \in L^n(Z)$. Следовательно, эта задача задает некоторый оператор, действующий из пространства $L^n(Z)$ в пространство D^n. Обозначим этот оператор через C. Очевидно, что $(Cf)(0) = 0$, а в k^1-линейности этого оператора можно убедиться непосредственно проверкой, используя при этом k^1-линейность оператора V и однозначную разрешимость задачи (2), (2b). Отсюда следует, что (3) является решением задачи (2), (2a). □

Любое W-преобразование порождается вспомогательным уравнением, которое называется *модельным уравнением*. По этой причине мы предположим, что нам дано другое уравнение, которое похоже на уравнение (2), только «проще», а решения его уже обладают требуемыми асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнение имеет вид

$$dx(t) = [(Qx)(t) + g(t)]\, dZ(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $Q : D^n \to L^n(Z)$ — k^1-линейный, вольтерров оператор, $g \in L^n(Z)$. Предполагается, что через любое $x(0) \in k^n$ проходит единственное (с точностью до P-эквивалентности) решение x уравнения (4). Тогда в силу леммы 1 для этого решения x имеет место представление

$$x(t) = U(t)x(0) + (Wg)(t), \quad t \geqslant 0,$$

где U — фундаментальная матрица и W — оператор Коши уравнения (4).

Как и в детерминированном случае, существуют два способа применения стохастического W-преобразования к исходному уравнению: справа и слева. Формально они порождаются одним и тем же модельным уравнением, но приводят к различным интегральным уравнениям. Условия их применимости также различны. Для дальнейшего нам потребуется следующее условие на $U(t)$.

Условие 1. Для априорно заданной положительной непрерывной функции $\gamma(t)$ $(t \geqslant 0)$ предполагается, что фундаментальная матрица $U(t)$ для уравнения (3) удовлетворяет оценке $\|\gamma(t)U(t)\| \leqslant \bar{c}$, где $\bar{c} \in \mathbb{R}_+$ и $t \geqslant 0$.

Начнем с правой подстановки. Подставив выражение (4) в уравнение (2), получим

$$[(QUx(0))(t) + (QWg)(t) + g(t)]\,dZ(t) =$$
$$= [(VUx(0))(t) + (VWg)(t) + f(t)]\,dZ(t).$$

Обозначив $(V - Q)W = \Theta_r$, приходим к операторному уравнению

$$(I - \Theta_r)g = (V - Q)Ux(0) + f.$$

Подстановка является *правой*, так как оператор W стоит справа от оператора V в уравнении (2). Буква r в Θ_r происходит от слова *right*.

Теорема 1. *Пусть дана положительная непрерывная функция* $\gamma(t)$ $(t \geqslant 0)$, *случайный процесс* $f(t) = (V_1\varphi_-)(t)$ *принадлежит* B^γ *для всех* φ, *таких что* $\operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p < \infty$, *а норма* f *удовлетворяет оценке* $\|f\|_{B^\gamma} \leqslant K \operatorname{vrai\,sup}_{s<0}(E|\varphi(s)|^p)^{1/2p}$ *для некоторой константы* $K > 0$. *Предположим, что уравнение* (2), *построенное по уравнению* (1), (1a), *и модельное уравнение* (4) *удовлетворяют следующим условиям:*

1) операторы V, Q *непрерывно действуют из* M_p^γ *в* B^γ*;*

2) модельное уравнение (4) *удовлетворяет условию 1;*

3) оператор W *непрерывно действует из* B^γ *в* M_p^γ.

Если теперь оператор $I - \Theta_r : B^\gamma \to B^\gamma$ *имеет ограниченный обратный в этом пространстве, то тривиальное решение однородного уравнения* (1), (1a) M_p^γ*-устойчиво.*

Доказательство. В предположениях теоремы мы имеем $x_f(t, x_0) = = U(t)x_0 + (W(I - \Theta_r)^{-1}(V - Q)Ux_0)(t) + (W(I - \Theta_r)^{-1}f)(t)$ для произвольных $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Беря нормы справа и слева в предыдущем равенстве и снова используя предположения теоремы, приходим к неравенству $\|x_f(\cdot, x_0)\|_{M_p^\gamma} \leqslant \hat{c}(\|x_0\|_{k_p^n} + \|f\|_{B^\gamma})$, которое выполняется для всех $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Здесь $\hat{c}$ — некоторое положительное число. Если учесть, что $x_f(t, x_0) = x(t, x_0, \varphi)$ и $\|f\|_{B^\gamma} \leqslant K \operatorname{vrai\,sup}_{s<0}(E|\varphi(s)|^p)^{1/2p}$ для некоторой константы $K > 0$, то получим M_p^γ-устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1), (1a). □

Теперь рассмотрим случай левого W-преобразования, переписав уравнение (2) в виде

$$dx(t) = [(Qx)(t) + ((V - Q)x)(t) + f(t)]\,dZ(t), \quad t \geqslant 0,$$

или эквивалентным образом

$$x(t) = U(t)x(0) + (W(V-Q)x)(t) + (Wf)(t), \quad t \geqslant 0.$$

Обозначив $W(V-Q) = \Theta_l$, получим операторное уравнение

$$((I-\Theta_l)x)(t) = U(t)x(0) + (Wf)(t), \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть дана положительная непрерывная функция* $\gamma(t)$ $(t \geqslant 0)$*, случайный процесс* $f(t) = (V_1\varphi_-)(t)$ *принадлежит* B^γ *для всех* φ*, таких что* $\operatorname{vrai\,sup}_{s<0} E|\varphi(s)|^p < \infty$*, а норма* f *удовлетворяет оценке* $\|f\|_{B^\gamma} \leqslant K \operatorname{vrai\,sup}_{s<0}(E|\varphi(s)|^p)^{1/2p}$ *для некоторой константы* $K > 0$*. Предположим, что уравнение* (2)*, построенное по уравнению* (1), (1a)*, и модельное уравнение* (4) *удовлетворяют следующим условиям:*

1) операторы V, Q *непрерывно действуют из* M_p^γ *в* B^γ*;*

2) модельное уравнение (4) *удовлетворяет условию 1;*

3) оператор W *непрерывно действует из* B^γ *в* M_p^γ*.*

Если теперь оператор $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ *имеет ограниченный обратный в этом пространстве, то тривиальное решение однородного уравнения* (1), (1a) M_p^γ*-устойчиво.*

Доказательство. В предположениях теоремы мы имеем, что $U(\cdot)x_0 \in M_p^\gamma$, как только $x_0 \in k_p^n$, а также, что $x_f(t,x_0) = ((I- -\Theta_l)^{-1}(Ux_0))(t) + ((I-\Theta_l)^{-1}Wf)(t)$, $t \geqslant 0$, для произвольных $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Беря нормы справа и лева в предыдущем равенстве и используя предположения теоремы, накладываемые на модельное уравнение, как и в предыдущей теореме, получаем неравенство $\|x_f(\cdot,x_0)\|_{M_p^\gamma} \leqslant \hat{c}(\|x_0\|_{k_p^n} + +\|f\|_{B^\gamma})$, где $x_0 \in k_p^n$, $f \in B^\gamma$. Если учесть, что $x_f(t,x_0) = x(t,x_0,\varphi)$ и $\|f\|_{B^\gamma} \leqslant K \operatorname{vrai\,sup}_{s<0}(E|\varphi(s)|^p)^{1/2p}$ для некоторой константы $K > 0$, то мы получим M_p^γ-устойчивость тривиального решения однородного уравнения (1), (1a). □

Буква l в Θ_l происходит от слова *left*. Это означает, что W-преобразование применяется к оператору V в (2) слева.

В детерминированном случае W-преобразование и W-подстановку одинаково эффективно можно использовать для исследования устойчивости решений. Для исследования вопросов устойчивости для стохастических уравнений с последействием W-подстановка неэффективна, так как в этом случае размерность системы, полученной после W-подстановки, на несколько порядков выше, чем у исходной системы.

При практическом применении теорем 1 и 2 обратимость операторов $I-\Theta_r : B^\gamma \to B^\gamma$ и $(I-\Theta_l) : M_p^\gamma \to M_p^\gamma$ устанавливается оценкой нормы операторов Θ_r и Θ_l в пространствах B^γ и M_p^γ соответственно. Если нормы этих операторов меньше единицы, то обратимость соответствующих операторов обеспечена. Однако факт, что нормы операторов Θ_l в пространстве M^γ_p меньше единицы, можно использовать и непосредственно для оценки решения задачи (1), (1b) в пространстве M^γ_p. Для этого уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$x(t) = (\Theta_l x)(t) + U(t)x(0) + (Wf)(t), \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Переходя к норме в пространстве M^γ_p в правой и левой частях уравнения (7), с учетом условий теоремы 2 получим неравенство

$$\|x\|_{M^\gamma_p} \leqslant \|\Theta_l\|_{M^\gamma_p}\|x\|_{M^\gamma_p} + \bar{c}\|x(0)\|_{k^n_p} + \hat{c}\|f\|_{B^\gamma},$$

где $\bar{c}, \hat{c}$ — некоторые положительнее числа. Из предыдущей оценки видно, что если $\|\Theta_l\|_{M^\gamma_p} < 1$, то тривиальное решение однородного уравнения (1), (1a) M^γ_p-устойчиво. Используя этот факт и теорию положительной обратимости матриц, можно модифицировать W-преобразование уравнения (2). В дальнейшем мы остановимся на этом.

Пусть $B = (b_{ij})^m_{i,j=1}$ — $m{\times}m$-матрица. Матрицу B называют *неотрицательной*, если $b_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, и *положительной*, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Определение 3 [18]. Матрица $B = (b_{ij})^m_{i,j=1}$ называется $\mathcal{M}$-*матрицей*, если $b_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = 1, \ldots, m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:

- для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1};
- диагональные миноры матрицы B положительны.

Лемма 2 [18]. *Матрица B является $\mathcal{M}$-матрицей, если $b_{ij} \leqslant 0$ при $i, j = 1, \ldots, m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:*

- $b_{ii} > \sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $i = 1, \ldots, m$;
- $b_{jj} > \sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{m} |b_{ij}|$, $j = 1, \ldots, m$;
- *существуют положительные числа* ξ_i, $i = 1, \ldots, m$, *такие что* $\xi_i b_{ii} > \sum\limits_{j=1,\, i\neq j}^{m} \xi_j |b_{ij}|$, $i = 1, \ldots, m$;
- *существуют положительные числа* ξ_i, $i = 1, \ldots, m$, *такие что* $\xi_j b_{jj} > \sum\limits_{i=1,\, i\neq j}^{m} \xi_i |b_{ij}|$, $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим $x(t) = \mathrm{col}\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $\bar{x}_i = \sup_{t\geqslant 0}\,(E|\gamma(t)x_i(t)|^p)^{1/p}$, $\bar{x} = \mathrm{col}\,(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Пусть, переходя к оценкам в каждом уравнении системы (6), нам удалось получить матричное неравенство следующего вида:

$$\bar{E}\bar{x} \leqslant C\bar{x} + \bar{c}||x(0)||_{k_{2p}^n}\bar{E} + \hat{c}\|\varphi\|_{N_p^n}\bar{E}, \tag{7}$$

где C — некоторая $n{\times}n$-матрица, $\bar{c}, \hat{c}$ — некоторые положительные числа. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если матрица $\bar{E}-C$ является $\mathcal{M}$-матрицей, то тривиальное решение однородного уравнения* (1), (1a) M_p^γ*-устойчиво.*

Доказательство. В предположениях теоремы матрица $\bar{E}-C$ положительно обратима. Следовательно, неравенство (7) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{E}\bar{x} \leqslant (\bar{E}-C)^{-1}(\bar{c}||x(0)||_{k_{2p}^n}\bar{E} + \hat{c}\|\varphi\|_{N_p^n}\bar{E}).$$

Тогда получаем

$$|\bar{x}| \leqslant K(\|x(0)\|_{k_{2p}^n} + \|\varphi\|_{n_p^n}),$$

где $K = ||(\bar{E}-C)^{-1}||\max\{\bar{c}, \hat{c}\}$. Поскольку $x(t, x_0, \varphi) = x(t)$ и $\|x(\cdot, x_0, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leqslant |\bar{x}|$, то из неравенства (8) следует, что для любых $x_0 \in k_p^n$ и $\varphi \in N_p^n$ имеем $x(t, x_0, \varphi) \in M_p^\gamma$ и $\|x(\cdot, x_0, \varphi)\|_{M_p^\gamma} \leqslant c(\|x_0\|_{k_p^n} + \|\varphi\|_{N_p^n})$, где c — некоторое положительное число. Следовательно, тривиальное решение однородного уравнения (1), (1a) M_p^γ-устойчиво. □

3. Примеры

Рассмотрим систему детерминированных линейных дифференциальных уравнений с постоянными запаздываниями и коэффициентами вида

$$dx(t) = -\sum_{j=1}^{m} A_j x(t-h_j)\,dt, \qquad t \geqslant 0, \tag{8}$$

$$x(s) = \varphi(s), \qquad s < 0, \tag{8a}$$

где $A_j = (a_{sl}^j)_{s,l=1}^n$, $j = 1, \ldots, m$, — $n \times n$-матрицы, элементами которых являются действительные числа; h_j, $j = 1, \ldots, m$, — неотрицательные действительные числа; φ — некоторая известная функция.

Пусть $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ss}^j = a_s > 0$, $s = 1, \ldots, n$, и $n \times n$-матрица C, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss} = 1 - \frac{1}{a_s} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ss}^k| h_k |a_{ss}^j|, \quad s = 1, \ldots, n;$$

$$c_{sl} = -\frac{1}{a_s} \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ss}^k| h_k |a_{sl}^j| + \sum_{j=1}^{m} |a_{sl}^j| \right], \quad s, l = 1, \ldots, n, \quad s \neq l,$$

является $\mathcal{M}$-матрицей. Тогда тривиальное решение однородной системы (8), (8a) экспоненциально устойчиво по отношению к начальному значению и функции.

Пусть в системе (8) $h_1 = 0$, $a_{ss}^1 > 0$, $s = 1, \ldots, n$, и $n \times n$-матрица C, элементы которой определены следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ss} &= 1 - \frac{1}{a_{ss}^1} \sum_{j=2}^{m} |a_{ss}^j|, \quad s = 1, \ldots, n, \\ c_{sl} &= -\frac{1}{a_{ss}^1} \sum_{j=1}^{m} |a_{sl}^j|, \quad s, l = 1, \ldots, n, \quad s \neq l, \end{aligned} \tag{9}$$

является $\mathcal{M}$-матрицей. Тогда тривиальное решение однородной системы (8), (8a) экспоненциально устойчиво по отношению к начальному значению и функции. Пользуясь достаточными условиями, обеспечивающими то, что $n \times n$-матрица C, элементы которой определены формулами (9), будет $\mathcal{M}$-матрицей, получим следующее. Если $c_{ss} > \sum_{l=1, l \neq s}^{n} |c_{sl}|$, $s = 1, \ldots, n$, где c_{sl}, $s, l = 1, \ldots, n$, определены формулами (9), то тривиальное решение однородной системы (8), (8a) экспоненциально устойчиво по отношению к начальному значению и функции. В частности, если все элементы матриц A_j, $j = 2, \ldots, m$, нулевые и $a_{ss}^1 > \sum_{l=1, l \neq s}^{n} |a_{sl}^1|$, $s = 1, \ldots, n$, то тривиальное решение однородной системы (8), (8a) экспоненциально устойчиво по отношению к начальному значению и функции.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений Ито с постоянными запаздываниями вида

$$dx(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j} x(t - h_{1j})\, dt + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} A_{ij} x(t - h_{ij})\, d\mathcal{B}_i(t), \ t \geqslant 0, \tag{10}$$

$$x(s) = \varphi(s), \quad s < 0, \tag{10a}$$

где $A_{ij} = (a_{sl}^{ij})_{s,l=1}^{n}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$, — $n \times n$-матрицы, элементы которых являются действительными числами, h_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m_i$ — неотрицательные действительные числа, $\varphi \in N^n$.

Пусть $\sum_{j=1}^{m_1} a_{ss}^{1j} = a_s > 0$, $s = 1, \ldots, n$, и $n \times n-$матрица C, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss} = 1 - \frac{1}{a_s} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{ss}^{1j}| -$$

$$- \frac{c_p}{\sqrt{2a_s}} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{ss}^{ij}| + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| \right], s = 1, \ldots, n;$$

$$c_{sl} = -\frac{1}{a_s} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} |a_{ss}^{1k}| h_{1k} |a_{sl}^{1j}| + \sum_{j=1}^{m_1} |a_{sl}^{1j}| \right] -$$

$$- \frac{c_p}{\sqrt{2a_s}} \left[\sum_{k=1}^{m_1} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{1k}| \sqrt{h_{1k}} |a_{sl}^{ij}| + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{sl}^{ij}| \right], s, l = 1, \ldots, n, s \neq l,$$

где c_p — некоторое число, зависящее от p из неравенства 4 работы [17, с. 65], является $\mathcal{M}$-матрицей. Тогда тривиальное решение однородной системы (10), (10а) экспоненциально $2p$-устойчиво по отношению к начальному значению и функции.

Пусть в (10) $m_1 = 1$, $h_{11} = 0$, $a_{ss}^{11} > 0$, $s = 1, \ldots, n$, и $n \times n$-матрица C, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ss} = 1 - \frac{c_p}{\sqrt{2a_{ss}^{11}}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}|, \quad s = 1, \ldots, n,$$

$$c_{sl} = -\frac{|a_{sl}^{11}|}{a_{ss}^{11}} - \frac{c_p}{\sqrt{2a_{ss}^{11}}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{sl}^{ij}|, \quad s, l = 1, \ldots, n, \quad s \neq l,$$

является $\mathcal{M}$-матрицей. Тогда тривиальное решение однородной системы (10), (10а) экспоненциально $2p$-устойчиво по отношению к начальному значению и функции. Для проверки факта, является ли матрица C $\mathcal{M}$-матрицей, воспользуемся достаточными условиями, указанными нами ранее. В частности, если

$$1 - \frac{c_p}{\sqrt{2a_{ss}^{11}}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{ss}^{ij}| >$$

$$> \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{|a_{sl}^{11}|}{a_{ss}^{11}} + \frac{c_p}{\sqrt{2a_{ss}^{11}}} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{m_i} |a_{sl}^{ij}| \right), \quad s = 1, \ldots, n,$$

то матрица C является $\mathcal{M}$-матрицей, а тривиальное решение однородной системы (10), (10a) экспоненциально $2p$-устойчиво по отношению к начальному значению и функции.

В заключение отметим, что в работе [19] исследованы вопросы глобальной экспоненциальной p-устойчивости ($2 \leqslant p < \infty$) систем нелинейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями специального вида с помощью модифицированного W-метода Н.В. Азбелева и теории положительно обратимых матриц.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В.* Как это было // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2003. — Т. 9, вып. 1 (17). — С. 22—39.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. — 230 с.

3. Устойчивость линейных систем с последействием. I / *Н.В. Азбелев, Л.М. Березанский, П.М. Симонов, А.В. Чистяков* // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 5. — С. 745—754.

4. Устойчивость линейных систем с последействием. II / *Н.В. Азбелев, Л.М. Березанский, П.М. Симонов, А.В. Чистяков* // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 4. — С. 555—562.

5. Устойчивость линейных систем с последействием. III / *Н.В. Азбелев, Л.М. Березанский, П.М. Симонов, А.В. Чистяков* // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 190. — С. 1659—1668.

6. Устойчивость линейных систем с последействием. IV / *Н.В. Азбелев, Л.М. Березанский, П.М. Симонов, А.В. Чистяков* // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 2. — С. 196—204.

7. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 6 (421). — С. 3—16.

8. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Устойчивость стохастических функционально-дифференциальных уравнений относительно постоянно действующих возмущений // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 2. — С. 198—207.

9. *Кадиев Р.И.* Достаточные условия устойчивости стохастических систем с последействием // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 2. — С. 555—564.

10. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений: дис. …д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 2000. — 231 с.

11. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // E. J. Diff. Eqs. — 2004. — № 92. — P. 1—36.

12. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Relations between stability and admissibility for stochastic linear functional differential equations // J. Func. Diff. Eqs. — 2005. — № 12. — P. 117—141.

13. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Stability of solutions of linear impulsive systems of Ito differential equations with aftereffect // Diff. Eqs. Springer. — 2007. — Vol. 43, № 7. — P. 898—904.

14. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Exponential stability of linear stochastic differential equations with bounded delay and the W-transform // E. J. Qualitative Theory Diff. Eq. — 2008. — № 23. — P. 1—16.

15. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Stability of im-pulsive stochastic differential equations with linear delays // J. Abstract Diff. Eqs. Appl. — 2012. — Vol. 2, № 2. — P. 7—25.

16. *Berezansky L., Braverman E., Idels L.* New global exponential stability criteria for nonlinear delay differential systems with applications to bam neural networks // Appl. Math. Comput. — 2014. — Vol. 243. — P. 899—910.

17. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

18. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М., 1969. — 352 с.

19. *Кадиев Р.И., Поносов А.В.* Положительная обратимость матриц и устойчивость дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 579—590.

Кадиев Рамазан Исмаилович
Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия
E-mail: kadiev_r@mail.ru

Поносов Аркадий Владимирович
Норвежский университет естественных наук, Ас, Норвегия
E-mail: arkadi@nmbu.no